

УДК 62-67

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРУЙНОГО КАВИТАТОРА  
В ИМПУЛЬСНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ ТЕПЛОНОСИТЕЛЯ****Левцев А.П., Лысяков А.И., Давыдов А.Е., Неясов А.С., Янкин В.О., Баранов И.А.***ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева»,  
Саранск, e-mail: lysyakov\_lai@mail.ru*

На сегодняшний день практически исчерпан потенциал для повышения энергетической эффективности классических источников теплоснабжения на основе водогрейных и паровых котлов. Поэтому развитие новых источников энергии в этой области может привести к значительным результатам. К таким источникам, несомненно, можно отнести и кавитаторы. Внедрение кавитаторов существенно ограничивается отсутствием моделирования их работы в нестационарных режимах. Данная работа направлена на моделирование работы струйного кавитатора в импульсном режиме течения теплоносителя. Для этого разработана схема лабораторной установки со струйным кавитатором, работающим в импульсном режиме. Предложена конструкция струйного кавитатора с оптимальными параметрами. Построена энергетическая цепь полученной лабораторной установки. В моделировании используется теория энергетических цепей. Показаны амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики. Создана математическая модель в виде дифференциальных уравнений на приращение. Уравнения решались в частотном виде при варьировании следующих параметров: масса теплоносителя, активное сопротивление кавитатора, податливость системы. В результате моделирования выявлено, что наибольшее влияние оказывает масса теплоносителя. Из результатов моделирования определена оптимальная частота колебаний, которая составляет 25–30 рад/с при выбранных параметрах.

**Ключевые слова:** ударный узел, энергетическая цепь, амплитудно-частотная характеристика, фазо-частотная характеристика, струйный кавитатор

**MATHEMATICAL MODEL OF A JET CAVITATOR IN THE PULSE  
MODE OF THE COOLANT FLOW****Levtsev A.P., Lysyakov A.I., Davydov A.E., Neyasov A.S., Yankin V.O., Baranov I.A.***Ogarev Mordovia State University, Saransk, e-mail: lysyakov\_lai@mail.ru*

Classical heat supply sources based on hot water and steam boilers today have almost exhausted the potential for increasing energy efficiency. Therefore, the development of new energy sources in this area can lead to significant results. These sources can undoubtedly include cavitators. The introduction of cavitators is significantly limited by the lack of modeling of their work in non-stationary modes. This work is aimed at modeling the operation of a jet cavitator in a pulsed mode of flow of a coolant. For this, a laboratory setup with a jet cavitator operating in a pulsed mode has been developed. A cavitator design with optimal parameters is proposed. The energy chain of the resulting system is built. Modeling is based on the theory of energy circuits. The amplitude-frequency and phase-frequency characteristics are obtained. A mathematical model is developed in the form of differential equations for increment. The equations were solved in the frequency form by varying the following parameters: mass of the coolant, the active resistance of the cavitator, the compliance of the system. As a result of modeling, it was revealed that the mass of the coolant has the greatest influence. From the simulation results, the optimal oscillation frequency was determined, which is 25–30 rad / s for the selected parameters.

**Keywords:** shock node, energy circuit, amplitude-frequency response, phase-frequency response, jet cavitator

В настоящее время очень большое внимание уделяется альтернативным источникам энергии [1]. Это связано, в основном, с высокой стоимостью энергоносителей, а также с ухудшением экологической обстановки в мире. При этом классические системы также обладают и существенными недостатками, такими как увеличение температуры дымовых газов, повышение коэффициента избытка воздуха и иные, приводящими к увеличению потерь при производстве тепловой энергии [2]. Для повышения эффективности работы системы отопления жилого или производственного помещения используют различные схемы и методы получения тепловой энергии, к ним относятся и системы с импульсной циркуляцией теплоносителя. Подобные системы приведены, в том числе, и в наших ранних работах [3, 4]. Один из аппаратов, используемый для повышения эффектив-

ности системы отопления, – кавитатор [5, 6]. Этот аппарат является альтернативным вариантом замены любого отопительного котла. В нем нагрев воды осуществляется за счет кавитации. Этот эффект возникает в результате резкого снижения давления, когда локально в слое воды образуются пузырьки пара, при резком схлопывании которых происходит гидравлический удар и осуществляется нагрев воды [7, 8, 9]. При этом, как показывают многие исследования, чем выше изначальное давление воды, тем сильнее эффект от кавитации [10]. Так как использование импульсного режима течения позволяет существенно повысить давление воды, то и эффект от кавитации будет значительно выше. Для определения оптимальных параметров режима работы предлагаемой системы теплоснабжения на основе кавитатора проведено математическое моделирование.

В данной работе представлено моделирование режимов работы струйного кавитатора в импульсном режиме течения теплоносителя с целью определения оптимальных параметров его функционирования.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

- разработать схему лабораторной установки со струйным кавитатором, работающим в импульсном режиме;
- построить энергетическую цепь полученной системы;
- получить уравнение математической модели;
- построить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики полученной системы;
- определить оптимальные параметры работы кавитатора.

На рис. 1 показана предлагаемая принципиальная схема лабораторной установ-

ки струйного кавитатора с импульсной циркуляцией течения теплоносителя.

Схема работает следующим образом: циркуляционный насос 1 направляет жидкость из бака аккумулятора 3 по двум контурам: первый контур – через ударный узел 2 [7] в бак аккумулятора 3; второй контур – через обратный клапан 4 и кавитатор 5, где происходит нагрев жидкости, в бак аккумулятора 3. Генерируемые в ударном узле 2 гидравлические удары повышают давление во втором контуре, тем самым существенно увеличивая эффективность работы кавитатора [9]. Гидроаккумулятор 6 сглаживает давление, создаваемое ударным узлом 2. Датчики температуры и давления 7 и 8 соответственно регистрируют параметры работы системы.

Для нагрева жидкости в лабораторной установке используется струйный кавитатор [10], представленный на рис. 2.

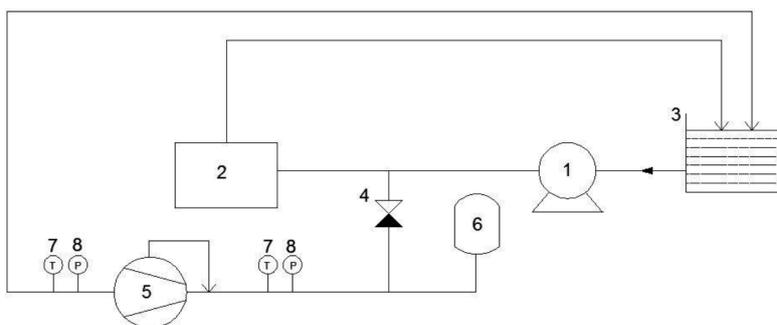


Рис. 1. Схема лабораторной установки с импульсной циркуляцией теплоносителя:  
1 – циркуляционный насос; 2 – ударный узел; 3 – бак аккумулятора; 4 – обратный клапан;  
5 – кавитатор; 6 – гидроаккумулятор; 7 – датчики температуры; 8 – датчики давления

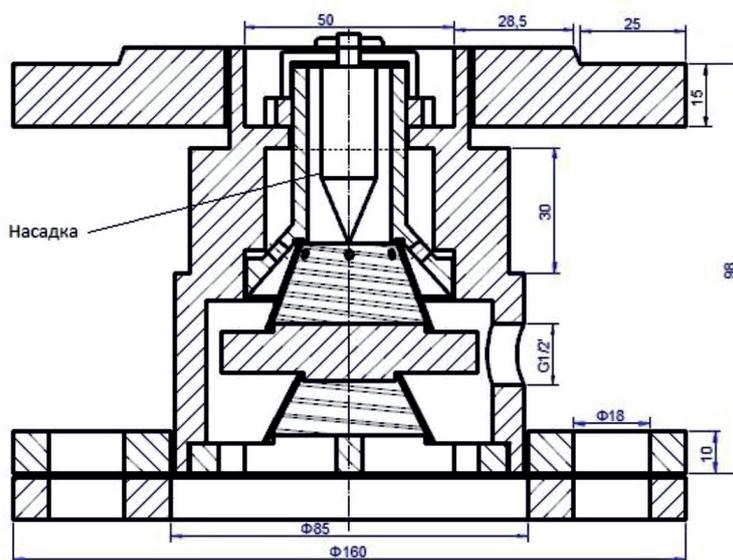


Рис. 2. Схема струйного кавитатора

Моделирование начнем с построения энергетической цепи струйного кавитатора, представленной на рис. 3 [10].

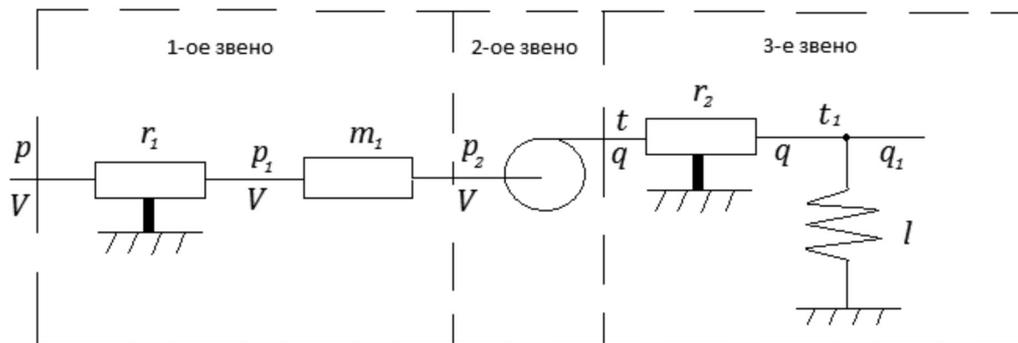


Рис. 3. Энергетическая цепь с использованием кавитатора

Данная цепь состоит из трех звеньев. Первое звено гидравлическое, учитывает потери на трение потока при помощи активного сопротивления  $r_1$ , инерционные свойства потока характеризуются массой жидкости  $m_1$  в трубопроводе. Второе звено – преобразовательное, преобразует давление  $p_2$  и объемный расход  $v$  жидкости на входе кавитатора в температуру  $t$  и удельный тепловой поток  $q$ . Третье звено – тепловое, учитывает потери тепла в окружающую среду и аккумулирование теплового потока с податливостью  $L$ .

Уравнение звеньев цепи:

1-ое	2-е	3-е
$\begin{cases} p = r_1 v^2 + m^1 \dot{v} + p_2, \\ v = v. \end{cases}$	$\begin{cases} t = p_2  c \rho k_1 , \\ q = v_0 c \rho k_2. \end{cases}$	$\begin{cases} t = r_2 q + t_1, \\ q = l \dot{t}_1 + q_1. \end{cases}$

Составим частотную функцию энергетической цепи как отношение параметров выхода к параметрам входа в соответствии со схемой, изображенной на рис. 4.



Рис. 4. Изображение входных и выходных переменных предлагаемой системы

Представим выходные переменные в виде постоянной составляющей и отклонения:

$$t_1 = t_{10} + \bar{t}_1, \quad q_1 = q_{10} + \bar{q}_1. \quad (1)$$

Далее запишем уравнение на давление в преобразовательном звене  $p_2$ :

$$p_2 = c p k_1 t = c p k_1 r_2 q + c p k_1 t_1 = c p k_1 r_2 \dot{t}_1 + c p k_1 r_2 q_1 + c p k_1 t_1. \quad (2)$$

Уравнение на объем жидкости  $V$  будет:

$$V = \frac{1}{c p k_2} q = \frac{l}{c p k_2} \left[ (r_2 \dot{q} + \dot{t}_1) + q_0 + \bar{q}_1 \right] = \frac{l r_2}{c p k_2} \dot{q} + \frac{l}{c p k_2} \dot{t}_1 + \frac{l}{c p k_2} q_0 + \frac{l}{c p k_2} \bar{q}_1. \quad (3)$$

Уравнение на приращение объема жидкости  $\dot{V}$ :

$$\dot{V} = \frac{l r_2}{c p k_2} \ddot{q}_1 + \frac{l}{c p k_2} \ddot{t}_1 + \frac{l}{c p k_2} \dot{\bar{q}}_1. \quad (4)$$

Уравнение на  $V^2$ :

$$V^2 = \frac{l^2}{l^2 p^2 k_2^2} q_0^2 + 2 \frac{l}{c p k_2} q_0 \left( \frac{l r_2}{c p k_2} \dot{\bar{q}}_1 + \frac{l}{c p k_2} \dot{\bar{t}}_1 + \frac{l}{c p k_2} \bar{q}_1 \right). \quad (5)$$

Уравнение на температуру нагрева  $t$ :

$$\begin{aligned} t &= \frac{r_1 l^2}{c^2 p^2 k_2^2} q_0^2 + 2 \frac{r_1 l}{c p k_2} q_0 \left( \frac{l r_2}{c p k_2} \dot{\bar{q}}_1 + \frac{l}{c p k_2} \dot{\bar{t}}_1 + \frac{l}{c p k_2} \bar{q}_1 \right) + \frac{m l r_2}{c p k_2} \ddot{\bar{q}}_1 + \frac{m l}{c p k_2} \ddot{\bar{t}}_1 + \\ &+ \frac{m l}{c p k_1} \dot{\bar{q}}_1 + c p k_1 r_2 \dot{\bar{t}}_1 + c p k_1 r_2 \bar{q}_1 + c p k_1 \bar{t}_1 = \\ &= \frac{m l}{c p k_2} \ddot{\bar{t}}_1 + \left( c p k_1 r_2 l + \frac{2 r_1 l^2}{c^2 p^2 k_2^2} q_0 \right) \dot{\bar{t}}_1 + c p k_1 \bar{t}_1 + \frac{m l r_2}{c p k_2} \ddot{\bar{q}}_1 + \\ &+ \left( \frac{m l}{c p k_1} + \frac{l r_2}{c p k_2} \right) \dot{\bar{q}}_1 + \left( \frac{l}{c p k_2} + c p k_1 r_2 \right) \bar{q}_1 + \frac{r_1 l^2}{c^2 p^2 k_2^2} q_0^2 = \\ &= a_1 \ddot{\bar{t}}_1 + a_2 \dot{\bar{t}}_1 + a_3 \bar{t}_1 + b_1 \ddot{\bar{q}}_1 + b_2 \dot{\bar{q}}_1 + b_3 \bar{q}_1 + b_4. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем коэффициенты для упрощения уравнения 6:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m l}{c p k_2}, \quad a_2 = c p k_1 r_2 l + \frac{2 r_1 l^2}{c^2 p^2 k_2^2} q_0, \quad a_3 = c p k_1, \\ b_1 &= \frac{m l r_2}{c p k_2}, \quad b_2 = \frac{m l}{c p k_1} + \frac{l r_2}{c p k_2}, \quad b_3 = \frac{l}{c p k_2} + c p k_1 r_2. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом введенных коэффициентов уравнение 6 принимает вид:

$$\left( a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \right) \cdot T_1(s) = - \left( b_1 s^2 + b_2 s + b_3 + 1 \right) Q_1(s). \quad (8)$$

При этом комплексное сопротивление цепи:

$$Z(s) = \frac{T_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{-b_1 s^2 - b_2 s - b_3 - 1}{a_1 s^2 + a_2 s + a_3}. \quad (9)$$

Частотная функция цепи:

$$Z(j\Omega) = \frac{b_1 \Omega^2 - b_2 j\Omega - b_3 - 1}{-a_1 \Omega^2 + a_2 j\Omega + a_3} = \frac{[b_1 \Omega^2 - b_2 j\Omega - b_3 - 1] \cdot [(a_1 \Omega^2 + a_3) - a_2 j\Omega]}{(-a_1 \Omega^2 + a_3)^2 - a_2^2 \Omega^2}. \quad (10)$$

Действительная часть функции:

$$\operatorname{Re}(j\Omega) = \frac{-b_1 a_1 \Omega^4 + b_1 a_3 \Omega^2 - b_2 a_2 \Omega^2 + b_3 a_1 \Omega^2 - b_3 a_3 + a_1 \Omega^2 - a_3}{(-a_1 \Omega^2 + a_3)^2 - a_2^2 \Omega^2}. \quad (11)$$

Мнимая часть функции:

$$\operatorname{Im}(j\Omega) = \frac{b_1 a_2 \Omega^3 + b_2 a_1 \Omega^3 - b_2 a_3 \Omega + b_3 a_2 \Omega + a_2 \Omega}{(-a_1 \Omega^2 + a_3)^2 - a_2^2 \Omega^2}. \quad (12)$$

Амплитудно-частотная характеристика цепи:

$$A(\Omega) = \sqrt{\operatorname{Re}(j\Omega)^2 + \operatorname{Im}(j\Omega)^2}. \quad (13)$$

Фазо-частотная характеристика:

$$\varphi(\Omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}}. \quad (14)$$

### Результаты исследования и их обсуждение

Кавитатор на рис. 2 имеет возможность замены зазора проходного сечения за счет сменных конусовидных насадок различных диаметров. Для определения оптимальных параметров струйного кавитатора построим по уравнениям 13 и 14 амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики для трех различных зазоров проходного сечения.

Для этого зададимся параметрами энергетической цепи (первый зазор – 0,1 мм):

$$1) r_1 = 100 \frac{\text{мс}^2}{\text{м}^6}, r_2 = 0,05 \frac{\text{мс}^2}{\text{м}^6}, m^1 = 100 \text{ кг}, c = 4,187 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}^\circ\text{С}}, \rho = 1000, k_1 = 1,3, k_2 = 1, l = 2 \frac{\text{м}}{\text{кг}}, q_0 = 0,27 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

**Таблица 1**

Расчетные коэффициенты для определения частотных характеристик (1-я конструкция)

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
0,143	544,31	5443,1	0,007	0,11	272,16

По результатам вычислений частотных характеристик построим графики амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) цепи (рис. 5, 6).

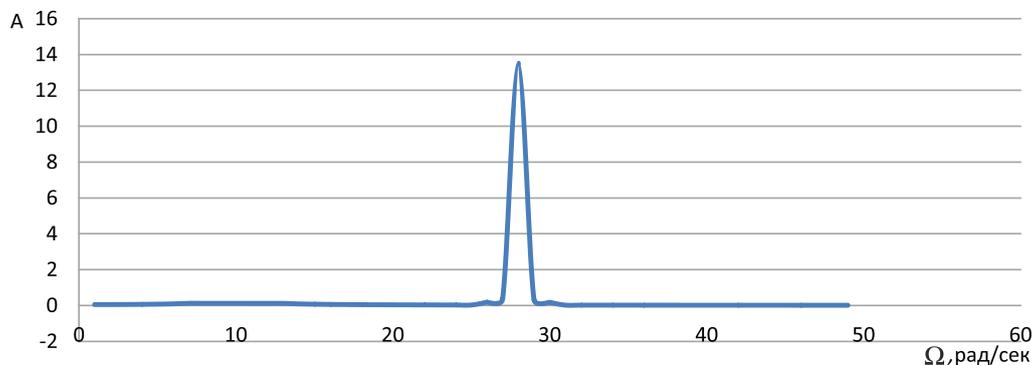


Рис. 5. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи (1-я конструкция)

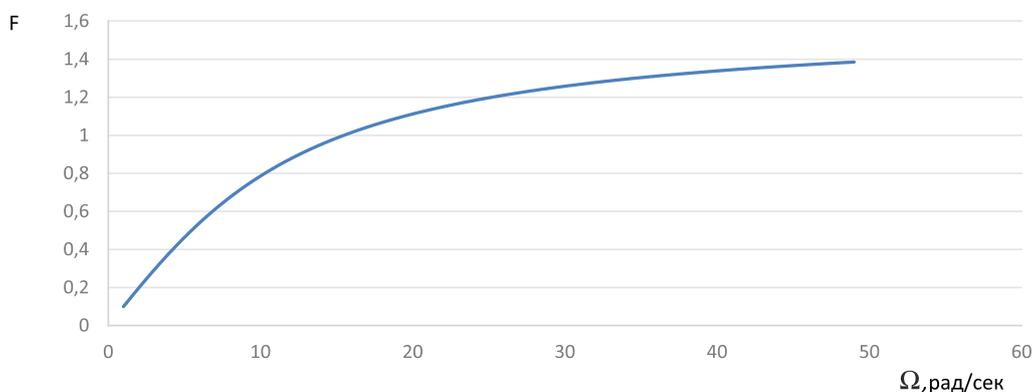


Рис. 6. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) цепи (зазор 0,1 мм)

Как видно из графика (рис. 5), имеется характерное увеличение амплитуды более 13 раз на частоте 25–30 рад/с, что свидетельствует о резком увеличении температуры потока при данном значении.

Изменим значения параметров энергетической цепи и для них также построим характеристики (второй зазор – 0,09 мм):

$$2) r_1 = 90 \frac{\text{мс}^2}{\text{м}^6}, r_2 = 0,05 \frac{\text{мс}^2}{\text{м}^6}, m^1 = 200 \text{ кг}, c = 4,187 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}^\circ\text{С}}, \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k_1 = 1,3, k_2 = 1,$$

$$l = 2 \frac{\text{м}}{\text{кг}}, q_0 = 0,27 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

**Таблица 2**

Расчетные коэффициенты для определения частотных характеристик (2-я конструкция)

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
0,239	8491,236	3265,86	0,117	0,184	163,3

По результатам расчета частотных характеристик построим графики амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) цепи для зазора 0,09 мм (рис. 7, 8).

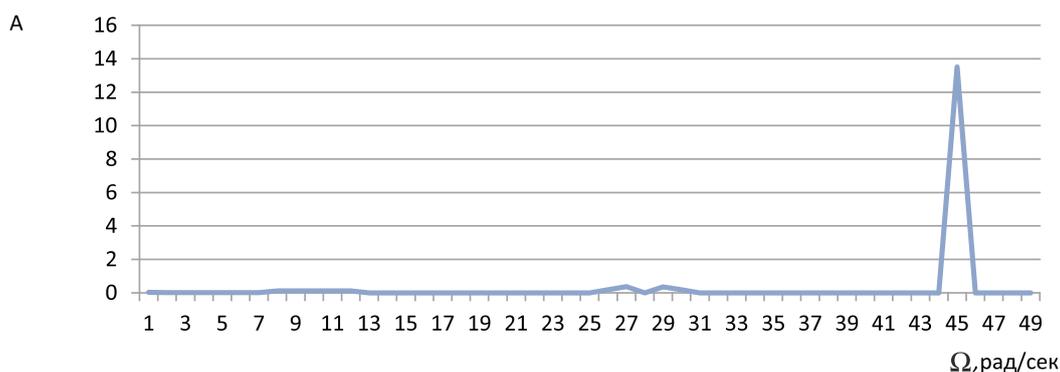


Рис. 7. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи (2-й зазор)

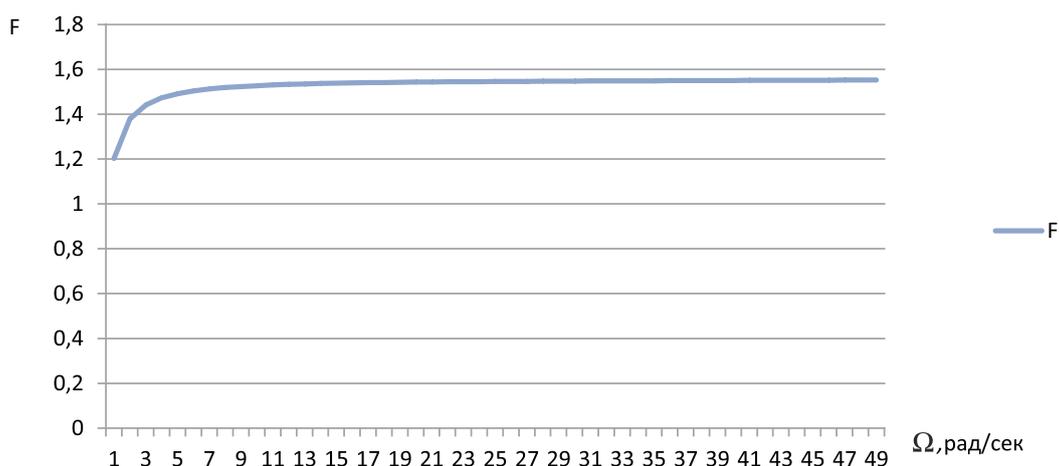


Рис. 8. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) цепи (2-я конструкция)

Как видно из графика (рис. 7), имеется характерное увеличение амплитуды более 13 раз на частоте 44–45 рад/с, что свидетельствует о резком увеличении температуры потока при данном значении.

Построим амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики для следующих параметров энергетической цепи (третий зазор – 0,05 мм):

$$3) r_1 = 50 \frac{\text{мс}^2}{\text{м}^6}, r_2 = 0,05 \frac{\text{мс}^2}{\text{м}^6}, m^1 = 300 \text{ кг}, c = 4,187 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}^\circ\text{С}}, \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, k_1 = 1,3, k_2 = 1,$$

$$l = 1 \frac{\text{м}}{\text{кг}}, q_0 = 0,27 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Таблица 3

Расчетные коэффициенты для определения частотных характеристик (3-я конструкция)

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
0,209	217,725	4354,48	0,0105	0,162	217,724

По результатам расчета частотных характеристик построим графики амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) цепи (рис. 9, 10).

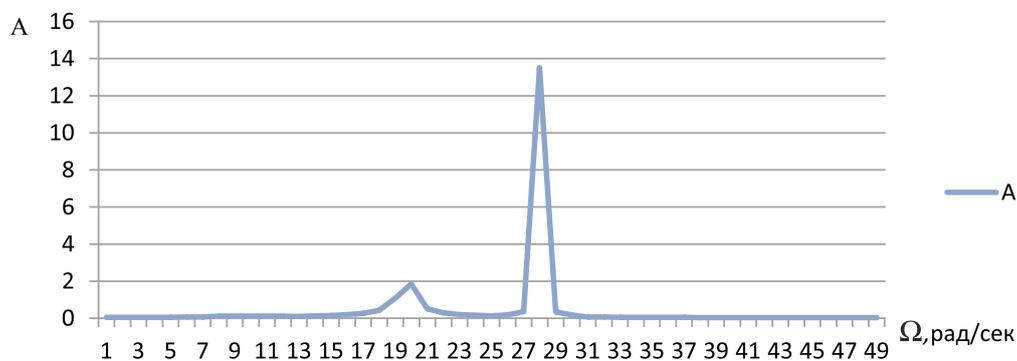


Рис. 9. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи (3-я конструкция)

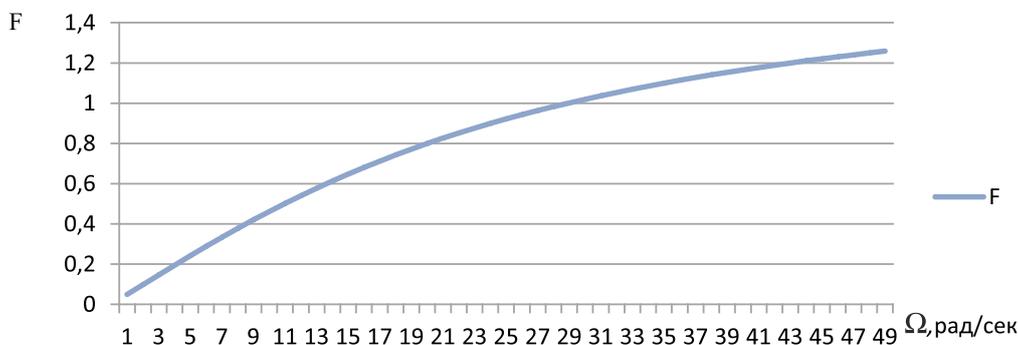


Рис. 10. Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) цепи (3-я конструкция)

Как видно из рис. 9, имеются характерное увеличение амплитуды более 13 раз на частоте 28–29 рад/с и незначительное увеличение амплитуды в 2 раза на частоте 18–20 рад/с.

### Заключение

В процессе моделирования была разработана математическая модель в виде дифференциальных уравнений на приращение, полученных с помощью энергетических це-

пей. Уравнения решались в частотном виде при варьировании следующих параметров: масса теплоносителя и активное сопротивление кавитатора. В результате моделирования выявлено, что наибольшее влияние оказывает масса теплоносителя, поэтому для увеличения эффекта необходимо увеличить расход теплоносителя. Сравнивая амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и фазо-частотные характеристики (ФЧХ) цепи, можно сделать вывод, что оптималь-

ная частота колебаний потока теплоносителя в импульсном режиме течения для выбранной конструкции кавитатора составляет 25–30 рад/с при зазоре проходного сечения кавитатора 0,1 мм, 44–45 рад/с – для зазора 0,09 мм и 44–45 рад/с – для зазора 0,05 мм. Увеличение величины нагрева на указанных частотах составляет более 13 раз. Полученные результаты моделирования могут быть использованы для определения и выбора параметров варьирования во время проведения физического эксперимента, а также в реальных импульсных системах теплоснабжения на основе кавитатора.

#### Список литературы

1. Магадеев В.Ш. Источники и системы теплоснабжения. М.: Энергия, 2013. 272 с.
2. Лысяков А.И. Методика гидравлического расчёта систем теплоснабжения с естественной циркуляцией теплоносителя // Приволжский научный журнал. 2018. № 4 (48) С. 59–68.
3. Левцев А.П., Лысяков А.И., Лапин Е.С., Панкратьев Р.В. Моделирование гидродинамики системы отопления здания с пульсирующей циркуляцией теплоносителя // Инновации и инвестиции. 2019. № 9. С. 232–236.
4. Левцев А.П., Лысяков А.И., Лапин Е.С., Панкратьев Р.В. Моделирование теплопередачи отопительного прибора с пульсирующим режимом течения теплоносителя // Инновации и инвестиции. 2019. № 10. С. 226–229.
5. Пирсол И.С. Кавитация: пер. с англ. М.: Мир, 2012. 98 с.
6. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация: пер. с англ. М.: Мир, 1974. 687 с.
7. Алимов М.А., Воробьев Д.А., Хвесюк В.И. Модель воздействия кавитационного пузырька на стенку канала в приближении точечного взрыва в несжимаемой жидкости // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 7. С. 309324. DOI: 10.7463/0712.0435175.
8. Капранова А.Б., Лебедев А.Е., Мельцер А.М., Неклюдов С.В. Стохастическое описание начальной стадии гидродинамической кавитации при работе клапана // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-29: сб. трудов 29-й Междунар. науч. конф. в 12 т. Т. 5. Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т; Санкт-Петербург: СПбГТИ(ТУ), СПбПУ, СПИИРАН; Самара: Самарский гос. техн. ун-т, 2016. С. 40–43.
9. Федоткин И.М., Гульый И.С. Кавитация, кавитационная техника и технология, их использование в промышленности (теория, расчёты и конструкции кавитационных аппаратов). М.: Полиграфкнига, 1997. 940 с.
10. Эпштейн Л.А. О минимальном числе кавитации при струйных течениях в цилиндрических каналах // Тр. ЦАГИ. 1967. Вып. № 1062. С. 3–8.