

СТАТЬИ

УДК 004.428

**РАСШИРЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ БИБЛИОТЕКИ MATHPHP
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Богомолова О.И.

*Казанский национальный исследовательский технологический университет,
Казань, e-mail: boikfti@yandex.ru*

В работе рассмотрена реализация расширения математической библиотеки классов MathPHP. Основное назначение разработанного расширения – решение задач стохастического моделирования, в которых используется функция ошибок erf. Библиотека классов MathPHP разработана и поддерживается сотрудниками Мас-сачусетского технологического университета. В качестве языка разработки данной библиотеки был выбран язык php, интенсивно применяемый в разработке веб-приложений. Исходный код библиотеки доступен всем желающим и может быть скачан из репозитория github. Библиотека классов MathPHP может быть использована для решения задач алгебры, геометрии, статистики, математического моделирования. В библиотеке классов MathPHP реализован класс специальных функций. В данной работе рассматривается возможность расширения данного класса для реализации функции ошибок и функции, обратной к функции ошибок. Функция ошибок, реализованная в данном классе, предполагает использование экспоненты, являющейся трансцендентной функцией. Для задач стохастического моделирования, требующих генерации огромного количества данных, является предпочтительным использование алгебраических функций. В статье предложено расширение класса специальных функций, содержащее реализацию функций ошибок erf и функции, обратной к erf. Функции представлены рациональной дробью с полиномами в числителе и знаменателе различной степени.

Ключевые слова: библиотека классов, методы класса, стохастическое моделирование, обратная функция, аппроксимация функции ошибок, разложение функции в ряд, относительная погрешность, абсолютная погрешность, параметрическое распределение

**EXTENSION OF THE MATHPHP LIBRARY FOR SOLVING
STOCHASTIC MODELING PROBLEMS**

Bogomolova O.I.

Kazan National Research Technological University, Kazan, e-mail: boikfti@yandex.ru

The paper considers the implementation of the mathphp class library extension. The main purpose of the developed extension is to solve stochastic modeling problems that use the erf error function. The MathPHP class library is developed and maintained by employees of the Massachusetts Institute of technology. Php was chosen as the development language for this library, which is widely used in the development of web applications. The source code of the library is available to everyone and can be downloaded from the github repository. The MathPHP class library can be used for solving problems in algebra, geometry, statistics, and mathematical modeling. The MathPHP class library implements a class of special functions. In this paper, we consider the possibility of extending this class to implement the error function and the inverse function of the error function. The error function implemented in this class uses an exponent that is a transcendental function. For stochastic modeling problems that require generating a huge amount of data, the use of algebraic functions is preferred. The article proposes an extension of the class of special functions that contains the implementation of ERF error functions and the inverse function of erf. Functions are represented by a rational fraction with polynomials in the numerator and denominator of various degrees.

Keywords: class library, class methods, stochastic modeling, inverse function, error function approximation, function series expansion, relative error, absolute error, parametric distribution

В настоящее время широкое применение получили стохастические методы моделирования. Эти методы основаны на предпосылке, что система изначально содержит по меньшей мере один источник неопределенности. Стохастическое моделирование базируется на методах теории вероятностей и математической статистики [1–3]. Универсальным способом описания всякой случайной величины является функция распределения. Наиболее частыми распределениями, используемыми в моделировании, являются нормальное, логнормальное, экспоненциальное, равномерное, бета- и гамма-распределения. В стохастическом моделировании часто возникает за-

дача нахождения обратной функции, например, для получения обратной зависимости переменных. В задачах стохастического моделирования функция, обратная к вероятностной функции распределения, может быть использована для получения ряда случайных чисел, соответствующих заданному закону распределения. В работах [4–5] показан метод и алгоритм получения аппроксимации обратной вероятностной функции, записываемой через ряд Тейлора.

В рамках данного исследования предполагается выполнить анализ возможности расширения математической библиотеки классов Mathphp. Данное расширение может быть использовано в задачах стохастического

ческого моделирования. При разработке вычислительных программ для решения задач стохастического моделирования могут использоваться как процедурная, так и объектно-ориентированная парадигмы [6, 7]. Объектно-ориентированный подход имеет неоспоримые преимущества и позволяет использовать готовые библиотеки классов. В данной работе показана разработка расширения математического класса, написанного на языке программирования php. Язык php создан для разработки онлайн-приложений. В качестве математической библиотеки выбрана библиотека MathPHP.

Материалы и методы исследования

MathPHP – мощная современная математическая библиотека, имеющая лицензию Массачусетского технологического университета MIT (официальный сайт <https://github.com/markrogoyski/math-php>). Библиотека MathPHP представлена различными разделами математики, в частности

алгеброй, тригонометрией, численным анализом, матричной алгеброй, комплексными числами, полиномами, статистикой. В классе статистика реализованы различные вероятностные распределения. Класс функции наследует несколько классов. Один из них – класс Special. Класс Special описывает специальные функции, к которым относятся функция ошибок, бета, гамма, логистическая функция. Методы данного класса, как и других, имеют многострочный комментарий, описывающий вид функции, максимальную относительную погрешность представленной аппроксимации. Ниже показан путь к классу, представляющему функцию ошибок, используемую в задачах, решение которых связано с нормальным распределением:

math-php/src/Functions/Special.php

Метод, описывающий функцию erf, показан ниже:

```
public static function errorFunction(float $x): float
{
    if ($x == 0) {
        return 0;
    }
    $p = 0.3275911;
    $t = 1 / (1 + $p * abs($x));
    $a1 = 0.254829592;
    $a2 = -0.284496736;
    $a3 = 1.421413741;
    $a4 = -1.453152027;
    $a5 = 1.061405429;
    $error = 1 - ($a1 * $t + $a2 * $t ** 2 + $a3 * $t ** 3
    + $a4 * $t ** 4 + $a5 * $t ** 5) * exp(-abs($x) ** 2);
    return ($x > 0) ? $error : -$error;
}
```

Предложенная выше аппроксимация использует экспоненциальную функцию, являющуюся трансцендентной. Для решения задач, требующих высокой производительности, предпочтительным является использование алгебраических функций. Покажем реализацию метода erf_2_2 класса Special Functions, который представляет функцию erf в виде рациональной дроби в числителе и знаменателе которой стоят многочлены 2 степени.

На рис. 1 представлена блок-схема получения аппроксимации рациональной дроби [8]. Первый этап – получение разложения в ряд Тейлора. Для функции ошибок erf ряд Тейлора представляется следующим образом:

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^9}{216} - \dots \right). \quad (1)$$

Используя алгоритм и программу, описанную в работе [8], получим аппроксимацию рациональной дроби с многочленом второй степени в числителе и знаменателе:

$$erf(x) = \frac{6x}{\sqrt{\pi}(3+x^2)}. \quad (2)$$

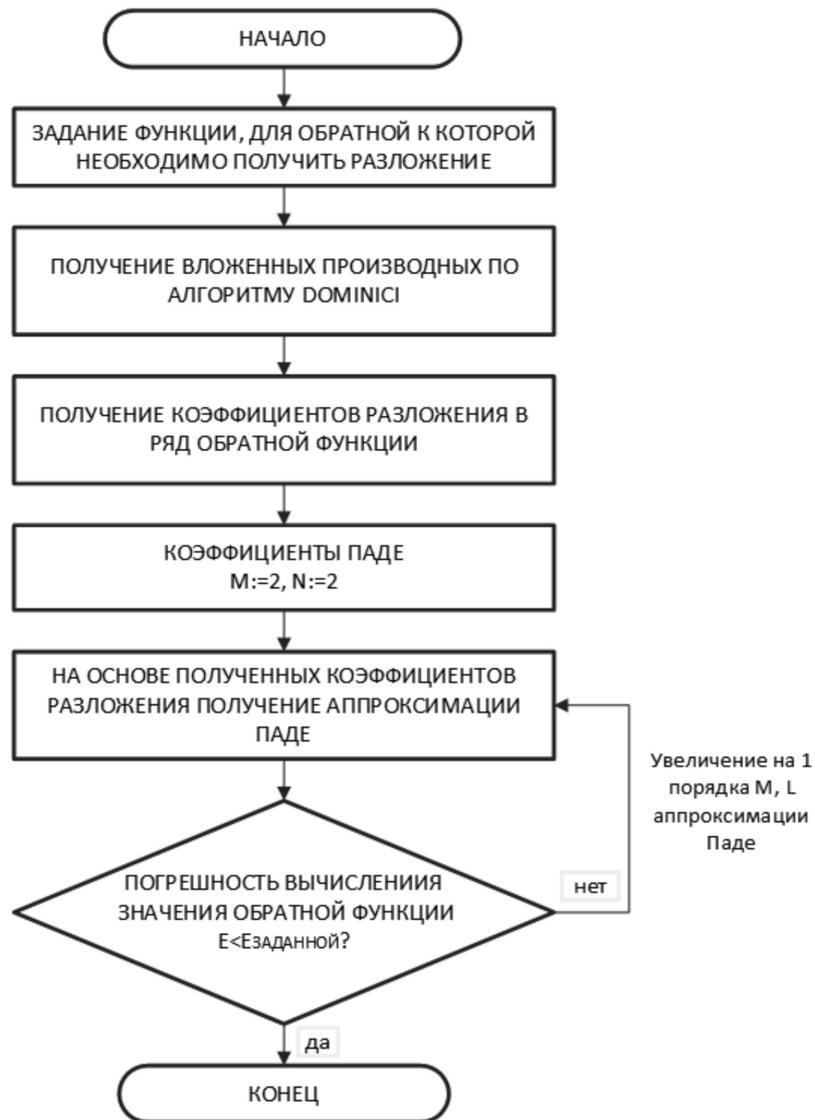


Рис. 1. Блок-схема получения коэффициентов аппроксимации Паде для функции обратной функции распределения

Расширим библиотеку добавив методы, описывающие функцию ошибок рациональной дробью. Для удобства использования методов класса продумаем нотацию методов. В названии метода к названию функции добавляются степени числителя и знаменателя. То есть для нашего примера рациональной дроби с многочленом 2 степени в числителе и знаменателе название запишется таким образом:

```
public static function erf_2_2(float $x): float
```

Ниже записан код метода erf_2_2:

```
public static function erf_2_2(float $x): float
{
    if ($x == 0) {
        return 0;
    }
    $error = 6*$t/(1.77245*(3+$t*$t));
    return ( $x > 0 ) ? $error : -$error;
}
```

Для решения некоторых задач стохастического моделирования требуется генерация ряда значений, подчиняющихся заданному закону распределения. На рис. 2 показана схема метода, использующего генерацию ряда чисел, подчиняющихся нормальному распределению. Данный метод предназначен для оценки запаса углеводородов в пласте. Метод требует генерации большого количества случайных чисел, соответствующих нормальному распределению. В этом случае предпочтительными являются аппроксимации с использованием алгебраических функций.

Расширим данный класс, добавив методы, определяющие функцию, обратную к функции ошибок. Первым этапом необходимо получить разложение этой функции в ряд Тейлора. Ниже показано разложение функции $erf^{-1}(x)$, полученное в работе [5]:

$$erf^{-1}(x) = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi x^3}{24} + \frac{\pi^2 x^5}{960} + \frac{127\pi^3 x^7}{80640} + \dots \right). \quad (3)$$

Следующий шаг алгоритма – получение рациональной дроби, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены. Полученная аппроксимация представляет собой дробь с числителем и знаменателем 2 степени и имеет вид

$$erf^{-1}(x) = \frac{(-0.0400305 + x(-12.5834 + 8.01608x))}{(-14.6195 + x(10.5912 + x))}. \quad (4)$$

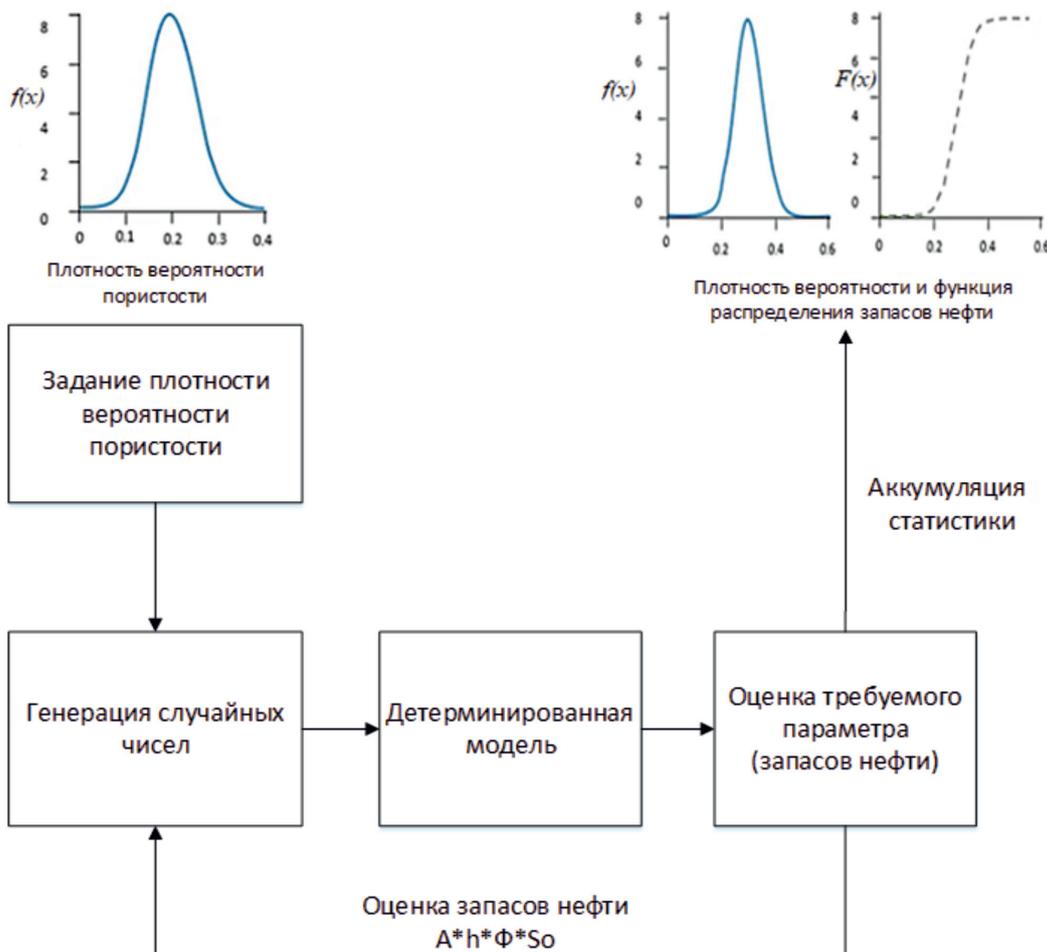


Рис. 2. Схема стохастического подхода при оценке запасов нефти в пласте

Запишем полученное выражение как метод класса MathPHP. В название метода добавим приставку `inv_` и два числа в конце, разделенных нижним подчеркиванием, первое из которых степень числителя, а второе соответственно знаменателя. Ниже покажем код для аппроксимации функции, обратной к `erf` со степенью 2 в числителе и знаменателе дробки:

```
public static function inv_erf_2_2(float $x): float
{
    $inv_error = (-0.0400305 + $x*(-12.5834 + 8.01608*$x))/(-14.6195 + $x*(10.5912 + $x));
    return ( $x > 0 ) ? $error : -$error;
}
```

Для аппроксимации дробью со степенью 2 в числителе и 3 в знаменателе метод класса запишется следующим образом:

```
public static function inv_erf_2_3(float $x): float
{
    $inv_error = (-0.0000699326 + (5.52147 - 4.53088*$x)*$x)/(6.23226 + $x*(-5.1401 + $x*(-1.49546 + $x)));
    return ( $x > 0 ) ? $error : -$error;
}
```

Для использования описываемых методов в технических приложениях необходимо знать погрешность аппроксимации. Посчитаем максимальную относительную погрешность для метода `inv_erf_2_2` и добавим в многострочный комментарий к методу:

```
* Inverse Error function
* 2/2
* This is an approximation of the inverse error function
* (maximum relative error 0.7*10^-2)

* (-0.0400305 + x(-12.5834 + 8.01608x))
* erf^-1(x) ≈ -----
* (-14.6195 + x(10.5912 + x))
*
* @param float $x
*
* @return float
*/
```

Результаты исследования и их обсуждение

Разработанные в статье методы класса MathPHP представляют собой различные аппроксимации функции ошибок `erf` и обратной к ней функции `erf_inv`. Эта задача была решена с использованием алгебраических функций. Использование алгебраических функций является предпочтительным для решения задач стохастического моделирования, особенно требующих генерации огромного количества данных. Функции представлены рациональной дробью с полиномами в числителе и знаменателе различной степени. Алгоритм получения аппроксимаций рациональной дробью представлен на рис. 1. Для каждой реализации

получены максимальные относительные погрешности. В зависимости от решаемой задачи и требуемой точности аппроксимации пользователь может выбрать необходимый метод библиотеки классов. Комментарии к коду методов содержат запись аппроксимации в привычной математической записи и информацию о максимальной относительной погрешности.

Заключение

Методы, дополняющие класс MathPHP, могут быть использованы для различных задач стохастического моделирования. Эти методы позволяют подобрать представление функций `erf` и `erf_inv` с допустимой для решения данной задачи относительной погрешностью.

Список литературы

1. Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод: учебное пособие / Пер. 2-го англ. изд. 4-е изд., электрон. М.: Лаборатория знаний, 2020. 323 с.
2. Ермаков С.М., Сипин А.С. Метод Монте-Карло и параметрическая разделимость алгоритмов. СПб.: Изд. СПбГУ, 2014. 247 с.
3. Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А. Численные методы для инженеров и экономистов. М.: Факториал Пресс, 2017. 416 с.
4. Dominici D. The inverse of the cumulative standard normal probability function. *Integral Transforms and Special Functions*. 2003. № 4. P. 281–292.
5. Dominici D. Nested derivatives: a simple method for computing series expansions of inverse functions. *International journal of mathematics and mathematical sciences*. 2003. № 3. P. 3699–3715.
6. Шакин В.Н., Загвоздкина А.В., Сосновиков Г.К. Объектно-ориентированное программирование на Visual Basic в среде Visual Studio.NET: учебное пособие. М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2019. 398 с.
7. Дудецкий В.Н. Объектно-ориентированные языки программирования: учеб. пособие: в 3 ч. Ч. I. 2-е изд., стер. М.: ФЛИНТА, 2016. 48 с.
8. Богомолова О.И. Алгоритм и программная реализация получения аппроксимации Паде для функций, обратных к функциям распределения // *Вестник технологического университета*. 2018. № 11. С. 127–130.