

УДК 004:519.711.2

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРЕДИКТИВНОГО КОДИРОВАНИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ, ОСНОВАННАЯ НА АЛГОРИТМЕ ИЗМЕНЯЮЩЕГОСЯ ШАГА КОДИРОВАНИЯ

<sup>1</sup>Андреев К.В., <sup>2</sup>Быков А.А., <sup>3</sup>Киселева О.М.

<sup>1</sup>Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных сил РФ им. маршала Советского Союза А.М. Василевского, Смоленск, e-mail: kirill.andreev.1980@mail.ru;

<sup>2</sup>Филиал ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»»,  
Смоленск, e-mail: alex1by@mail.ru;

<sup>3</sup>ФГБОУ ВО Смоленский государственный университет, Смоленск, e-mail: foxy03@yandex.ru

В работе представлена математическая модель предиктивного кодирования радиотехнических сигналов на основе адаптивного выбора шага кодирования, позволяющая существенно уменьшить занимаемый информационный объем при сохранении качества воспроизведения информации в исследуемом сигнале. Предложены формулы математической модели модификации метода предиктивного кодирования информации, основанной на алгоритме изменяющегося шага описания сигнала по интегральной мере накапливаемой ошибки для одношагового предиктивного кодирования отсчетов дискретного сигнала. Разработаны основные алгоритмы адаптации шага по критерию накапливаемой ошибки, определения зависимости накапливаемой ошибки от случайного наложения шума, нахождения зависимости накапливаемой ошибки от значения шага предсказания. Рассмотрена функциональная зависимость накапливаемой ошибки от уровня шага сжатия. Изучение характера подобных зависимостей дает возможность подбирать величину шага предсказания. Показано, что при добавлении к детерминированному сигналу шума накопленная ошибка предсказания при тех же параметрах экстраполяции (шаге и числе отсчетов) заметно возрастает и сильно зависит от дисперсии шума. Для зашумленного сигнала при уменьшении шага предсказания накопленная ошибка снижается в существенно меньшей степени, чем для детерминированного сигнала. Продемонстрировано, что при увеличении числа отсчетов для всех рассмотренных сигналов накопленная ошибка уменьшается, стремясь к некоторому стационарному значению, которое может рассматриваться как интегральная мера предсказуемости сигнала. Наглядно продемонстрирована эффективность модифицированного алгоритма предиктивного кодирования сигналов в сравнении с существующим методом.

**Ключевые слова:** математическая модель, предиктивное кодирование, рекурсивная экстраполяция сигнала, детерминированный сигнал, алгоритм адаптации

## MATHEMATICAL MODEL FOR PREDICTIVE CODING OF RADIO ENGINEERING SIGNALS BASED ON THE ALGORITHM OF VARIABLE CODING STEP

<sup>1</sup>Andreev K.V., <sup>2</sup>Bykov A.A., <sup>3</sup>Kiseleva O.M.

<sup>1</sup>Military Academy of Military Air Defense of the Armed Forces of the Russian Federation  
Marshal of the Soviet Union A.M. Vasilevsky, Smolensk, e-mail: kirill.andreev.1980@mail.ru;

<sup>2</sup>Branch of the National Research University Moscow Power Engineering Institute,  
Smolensk, e-mail: alex1by@mail.ru;

<sup>3</sup>Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education  
«Smolensk State University», Smolensk, e-mail: foxy03@yandex.ru

The paper presents a mathematical model for predictive coding of radio engineering signals based on the adaptive selection of the coding step, which makes it possible to significantly reduce the occupied information volume while maintaining the quality of information reproduction in the signal under study. Formulas of the mathematical model of modification of the method of predictive coding of information based on the algorithm of the changing step of the signal description by the integral measure of the accumulated error for one-step predictive coding of discrete signal samples are proposed. The main algorithms for adapting the step by the criterion of the accumulated error, determining the dependence of the accumulated error on the random superposition of noise, finding the dependence of the accumulated error on the value of the prediction step have been developed. The functional dependence of the accumulated error on the compression step level is considered. Studying the nature of such dependences makes it possible to select the size of the prediction step. It is shown that when noise is added to the deterministic signal, the accumulated prediction error for the same extrapolation parameters (step and number of counts) significantly increases and strongly depends on the noise variance. For a noisy signal, with a decrease in the prediction step, the accumulated error decreases to a much lesser extent than for a deterministic signal. It is demonstrated that with an increase in the number of samples for all considered signals, the accumulated error decreases, tending to a certain stationary value, which can be considered as an integral measure of signal predictability. The effectiveness of the modified predictive signal coding algorithm is clearly demonstrated in comparison with the existing method.

**Keywords:** mathematical model, predictive coding, recursive signal extrapolation, deterministic signal, adaptation algorithm

В настоящее время, несмотря на бурное развитие сети Интернет и рост скорости передачи данных, остается нерешенной проблема сжатия и очистки информационных сигналов с обеспечением допустимого для пользователя качества передаваемой

информации. Особенно это касается виде-информации, для которой характерен рост занимаемого объема при улучшении качества воспроизведения. В современной науке представлены разнообразные способы обработки информационных сигналов, опирающиеся на существующие математические теории [1]. Методы обработки сигналов до сих пор являются объектом научных исследований. Наиболее оптимальным объектом теоретических и практических исследований информационные сигналы могут быть только тогда, когда представлена математическая модель исследуемого сигнала. Математическая модель дает возможность проводить исследование независимо от физической природы сигнала и особенностей конфигурации его носителя, осуществлять их сравнение, определять степень тождества, проводить классификацию сигналов, разрабатывать системы обработки сигналов.

Математические функции, используемые для моделирования сигналов, могут иметь как вещественную, так и комплексную основу. Использование того или иного математического аппарата определяется простотой и удобством его применения при анализе и обработке сигналов, а также особенностями постановки конкретной задачи. Методы рекурсивного описания сигналов связаны с алгоритмами сжатия информации. Например, к рекурсивному заданию сигналов можно отнести класс алгоритмов сжатия, использующих предиктивные методы. Данные методы применяют экстраполяцию значений амплитуд отсчетов, и, если выполняется условие  $(A_n - A_p) > d$ , где  $d$  – максимально разрешенная погрешность представления амплитуд, а  $A_n$  и  $A_p$  – амплитуды исследуемого и предсказанного отсчетов, то отсчет передается, в противном случае он считается избыточным [2].

Предиктивное кодирование широко применяется в алгоритмах MPEG, обеспечивающих сжатие информации в несколько десятков раз [3]. При этом модификация математической модели предиктивного кодирования позволит существенно повысить пороги сжатия информации при сохранении ее качества.

Целью исследования является рассмотрение модификации алгоритма предиктивного сжатия информационных сигналов, основанной на адаптивном алгоритме подбора величины шага рекурсивной экстраполяции по интегральной зависимости накапливаемой ошибки для линейного предсказания различных типов сигнала (гармонического сигнала, суперпозиции гармоник, амплитудно-модулированного сигнала, меандра, сигнала с шумом).

## Материалы и методы исследования

Предиктивное кодирование сигналов связано с задачей рекурсивного представления дискретных сигналов. Принцип такой связи достаточно очевиден и заключается в применении предыдущих отсчетов сигнала для перехода к следующим отсчетам.

В соответствии с общим математическим определением, рекуррентными соотношениями называют выражения вида

$$a_{n+p} = F(n, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p-1}), \quad (1)$$

позволяющие вычислять все члены некоторой последовательности  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , если заданы ее первые  $p$  членов. Когда рекуррентное соотношение линейно, задача описания множества всех последовательностей имеет аналогию с решением обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) с постоянными коэффициентами [4]. Простейшая и наиболее употребительная рекурсивная схема называется примитивной рекурсией. Обобщением примитивной рекурсии является возвратная рекурсия.

При использовании терминов «рекуррентное соотношение» и «рекурсия» и соответствующих этим терминам понятий применительно к задачам представления дискретных сигналов мы исходим из того, что в практических приложениях смысловые поля этих терминов, по существу, перекрываются, причем «рекурсия» представляется более общим понятием. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся применением только термина «рекурсия», с учетом того обстоятельства, что именно такой термин используется в анализе и синтезе цифровых фильтров.

Рассмотрим вариант алгоритма пошагового рекурсивного кодирования радиотехнических сигналов. Допустим, задан исследуемый сигнал на основе дискретного отсчета времени. Для простоты реализации модели определим шаг предсказания кратным шагом дискретизации.

Каждый последующий отсчет кодировки сигнала будем задавать линейным оператором-предиктором, аргументами которого являются два предшествующих значения амплитуд исследуемого сигнала  $x_{i-2}, x_{i-1}$ , а описывающей функцией – рекурсивное значение сигнала  $x_i$ :

$$\text{Pred}(x_i) : (i-2, i-1) \rightarrow (i). \quad (2)$$

Очевидный вид оператора-предиктора можно задать следующим выражением:

$$\text{Pred}(x_{i-2}, x_{i-1}) = x_{i-1} + \Delta_{i-2, i-1}, \quad (3)$$

где используется приращение сигнала на основе двух предыдущих отсчетов

$$\Delta_{i-2, i-1} = x_{i-1} - x_{i-2}. \quad (4)$$

В результате смоделированный отсчет сигнала  $x_i = Pred(x_{i-2}, x_{i-1})$  отличается от реального на величину:

$$e_i = Pred(x_{i-2}, x_{i-1}) - x_i \quad (5)$$

или с условием (3):

$$e_i = \Delta_{i-2,i-1} - \Delta_{i-1,i} \quad (6)$$

При рассмотрении исследуемого варианта модели пошаговой рекурсии сигнала для разных видов сигналов (гармонического сигнала, суперпозиции гармоник, амплитудно-модулированного сигнала, меандра, сигнала с шумом) анализу подвергалась зависимость накапливаемой ошибки от количества отсчетов.

Использование гармонического сигнала и суперпозиции гармоник как тестовых сигналов обусловлено, во-первых, тем, что семейство базисных функций  $a_n \sin(\omega_n t)$  составляет ядро преобразования Фурье, а сами функции вида  $a_n \sin(\omega_n t)$  имеют предельную локализацию в частотной области. Здесь учитывается то обстоятельство, что «переложение» подходов к практической реализации вейвлет-преобразования на хорошо понима-

емый практиками и привычный (что немало важно) частотный язык основано на Фурье-преобразовании сигналов. Кроме того, квантование по времени синусоидальных сигналов очень просто представляется аналитически [5]. Напомним также, что в пакете Matlab в ряде типовых примеров используется модельный сигнал `sumsin` – сумма синусов с разной частотой и амплитудой. Использование суперпозиции гармоник с различными частотами как базового тестового сигнала позволяет рассмотреть различные временные масштабы (медленный, средний и быстрый). Последнее обстоятельство относится как к моделированию пошаговой рекурсии сигнала, так и к вейвлет-анализу на различных уровнях декомпозиции сигнала.

Использование модулированного по амплитуде сигнала как одного из тестовых определяется его частым применением в различных системах связи, в алгоритмах сжатия звуковых и видеосигналов, а также в системах распознавания голоса. Анализ модулированного сигнала позволяет оценить вклад нелинейности в критерии разрабатываемых методов.

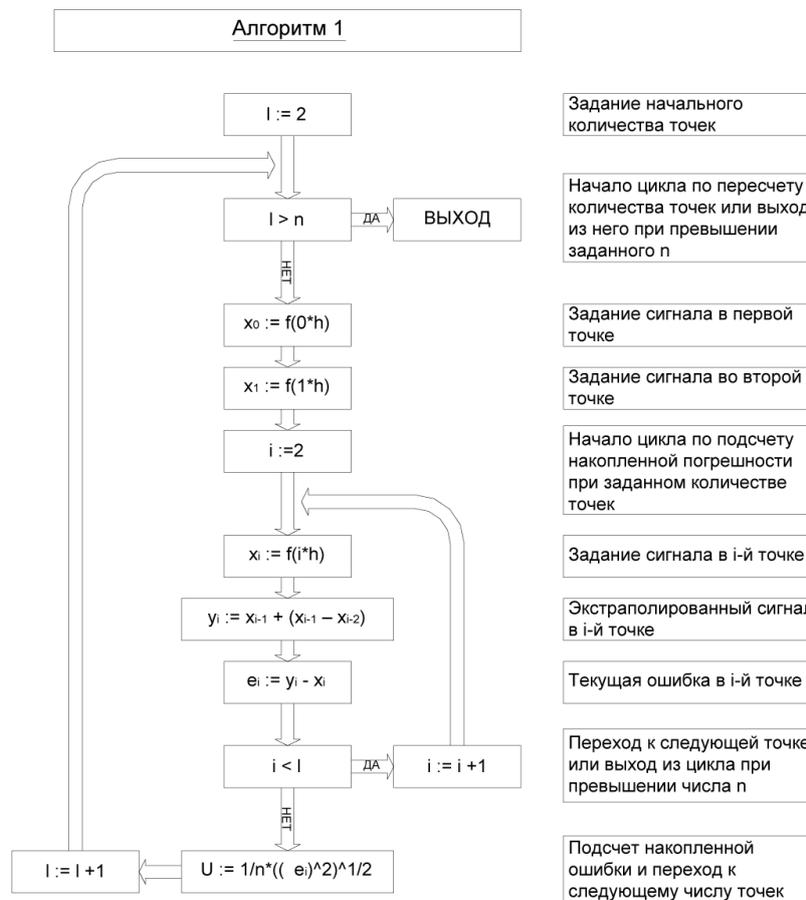


Рис. 1. Алгоритм определения зависимости накапливаемой ошибки от номера отсчета

Меандр является очень удобной моделью импульсного сигнала с кратковременными отсчетами. Такие сигналы отличаются дискретными или интервальными значениями и активно используются в разнообразных устройствах, например в механизмах частотной модуляции и демодуляции, фильтрации радиотехнических сигналов, множителях и преобразователях частот, получателях базового колебания когерентного преобразования информационных сигналов и др. [6].

Сигналы с добавлением шума (все вышеперечисленные типы сигналов с добавлением стационарного случайного процесса) являются базовой моделью, дающей возможность оценки влияния шумов на результативность разрабатываемых методов преобразования сигнала. Использование зашумленных тестовых сигналов предоставляет возможность программно имитировать возможности различных технологий очистки сигнала, в том числе и с применением вейвлет-анализа.

Проверку точности линейной экстраполяции исследуемого сигнала будем реали-

зовывать по нормированной накопленной ошибке  $n$ -ого отсчета:

$$U_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=k}^n e_i^2 \right)^{1/2}, \quad (7)$$

которую в дальнейшем будем именовать *накопленной ошибкой*, т.е. суммой ошибок во всех точках.

Отметим, что для оптимальности записи нормирование в формуле (7) осуществляется на базе текущего отсчета  $n$ , а не на суммарном числе отсчетов. Кроме того, необходимо учитывать, что в отдельных случаях в основе предела точности экстраполяции сигнала целесообразнее применять величину суммарной ошибки, накопленной к данному  $n$ -отсчету, без нормирования на номер рассматриваемого отсчета:

$$U'_n = \left( \sum_{i=k}^n e_i^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Для определения данных зависимостей разработаны алгоритмы, блок-схемы которых представлены на рис. 1 и 2.

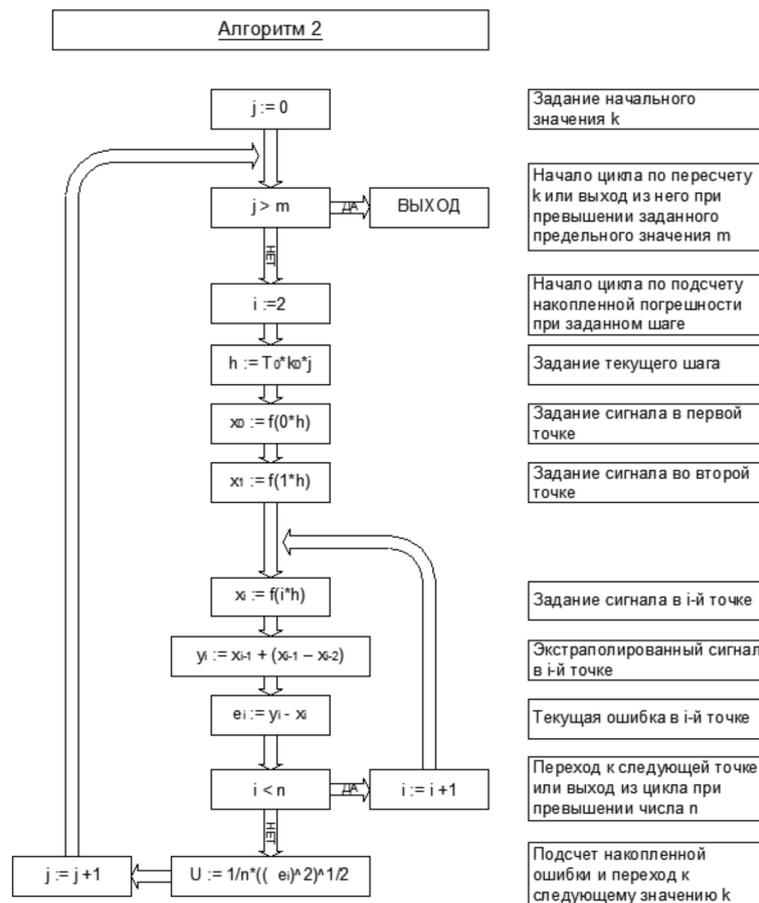


Рис. 2. Алгоритм определения зависимости накапливаемой ошибки от значения шага предсказания

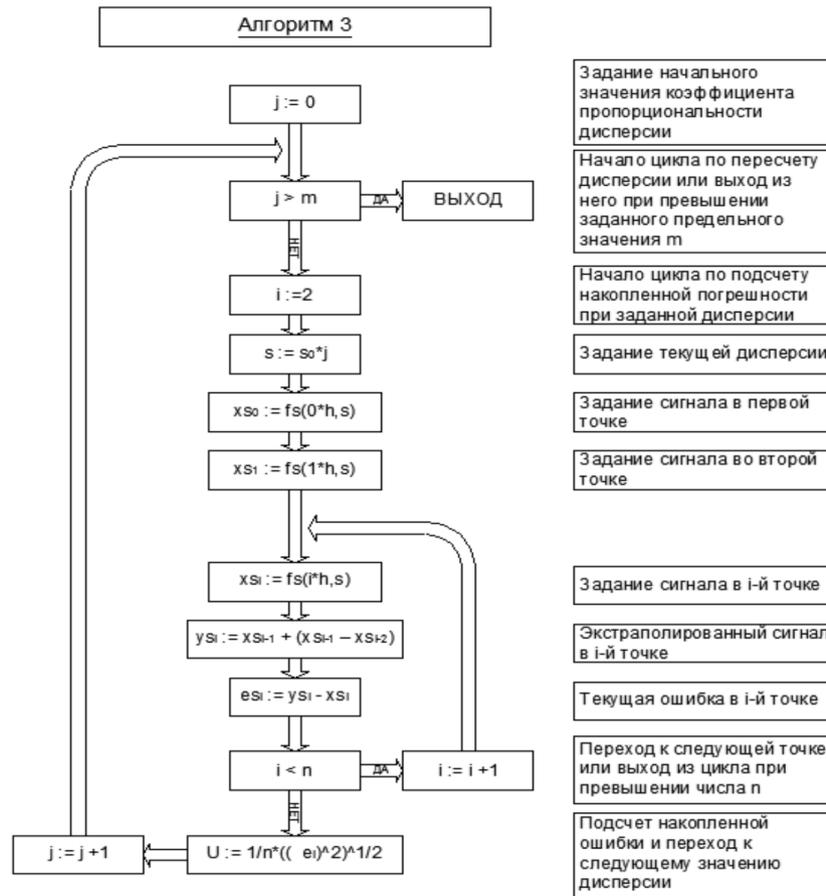


Рис. 3. Алгоритм для определения зависимости накапливаемой ошибки от случайной величины шума

### Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим модель предиктивного кодирования сигнала с наложением аддитивной помехи, являющуюся гауссовским случайным процессом с определенными параметрами. Реализация модели осуществляется по заданной ниже схеме:

1) на основе аналогового шаблона  $S(t)$  создается тестовый базисный сигнал  $x_{s_i}$ ;

2) задается случайный сигнал-помеха, являющийся гауссовским случайным процессом.

$xr_i = m - (\sigma \cdot \sqrt{3}) + rnd(2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{3})$ , где  $rnd$  играет роль датчика случайных чисел;

3) реализуется аддитивное наложение шума на базисный тестовый сигнал  $x_i = x_{s_i} + xr_i$ ;

4) осуществляется предиктивное кодирование при постоянном шаге предсказания.

Пример реализации предложенной схемы представлен программным модулем:

$$m = 0$$

$$\sigma = 0.2$$

$f_s(x, \sigma) = f(x) + m - \sigma \cdot \sqrt{3} + rnd(2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sigma)$  – тестовый сигнал с шумом;

$x_i = fs(i \cdot h, \sigma)$  – дискретизация сигнала с аддитивным шумом;

$y_i = x_i - 1 + (x_i - 1 - x_{i-2})$  – функция экстраполяции сигнала;

$e_i = y_i - x_i$  – задание функции текущей ошибки.

Для определения зависимости ошибки предсказания от случайной величины наложения шума также был разработан алгоритм, блок-схема которого представлена на рис. 3.

Рассмотрим алгоритм предсказания сигнала при постоянном шаге, пример которого показан на рис. 4. В качестве примера взят сигнал  $S(t) = \sin(t) + 0.5 \sin(3t)$ .

Как видно, метод предиктивного кодирования при постоянном шаге не всегда хорошо описывает исследуемые сигналы. Кроме того, погрешность одношагового предсказания существенно увеличивается, если сигнал включает шум.

Принцип разработанного алгоритма заключается в следующем. С определенной частотой осуществляется сопоставление текущей накапливаемой ошибки  $U_n$  с установленным допустимым уровнем  $U^*$ .

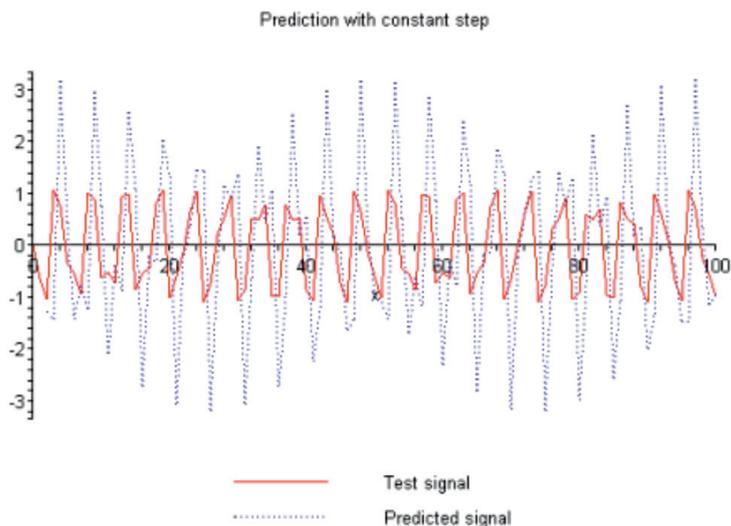


Рис. 4. Предсказание при постоянном шаге сигнала

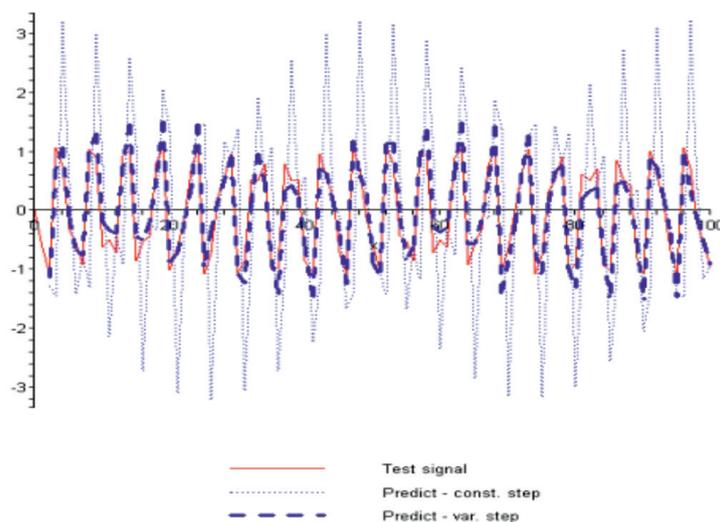


Рис. 5. Вывод результатов обработки сигнала двумя методами

Если накапливаемая ошибка не превосходит определенного разрешенного уровня  $U_n < U^*$ , то шаг кодирования  $h$  увеличивают в два раза по сравнению с начальным шагом  $h = 2h_0$ . В противном случае шаг кодирования  $h$  уменьшают вдвое  $h = h_0/2$ .

На основе разработанного алгоритма была осуществлена обработка того же сигнала. Для более наглядного сравнения эффективности алгоритма с адаптацией шага произведен одновременный вывод результатов обработки тестового сигнала двумя методами, представленный на рис. 5.

Из последнего графика видно, что предсказание с адаптацией шага дает намного более близкий к реальности результат, чем предсказание с постоянным шагом (особен-

но в случае больших шагов дискретизации и предсказания).

### Выводы

1. Исследован существующий алгоритм пошагового рекурсивного предсказания для разных типов сигнала (гармонического сигнала, суперпозиции гармоник, амплитудно-модулированного сигнала, меандра, сигнала с шумом), при этом анализу подвергнута зависимость накапливаемой ошибки от количества отсчетов.

2. Показано, что при увеличении числа отсчетов для всех рассмотренных тест-сигналов накопленная ошибка уменьшается, стремясь к некоторому стационарному значению, которое может рассматривать-

ся как интегральная мера предсказуемости сигнала.

3. При анализе зависимости накопленной ошибки от значения шага экстраполяции установлено, что такие зависимости позволяют подбирать значение шага экстраполяции.

4. При добавлении к детерминированному сигналу шума накопленная ошибка предсказания при тех же параметрах экстраполяции (шага и число отсчетов) заметно возрастает и сильно зависит от дисперсии шума. Для зашумленного сигнала при уменьшении шага предсказания накопленная ошибка снижается в существенно меньшей степени, чем для детерминированного сигнала. Влияние величины дисперсии шума оказывается значительно более сильным. Разработаны алгоритмы адаптации шага. Наглядно продемонстрирована эффективность модифицированного алгоритма одношагового линейного предска-

зания сигнала по сравнению с существующим способом.

#### Список литературы

1. Киселева О.М., Тимофеева Н.М., Быков А.А. Особенности формирования технической культуры у учителей различных педагогических специальностей // Концепт. 2013. № 8. С. 11–15. [Электронный ресурс]. URL: <http://e-koncept.ru/2013/13157.htm> (дата обращения: 15.10.2020).
2. Дмитриев В.Т., Янак А.Ф. Исследование воздействия акустических шумов на первичные кодеки речевых сигналов // Вестник РГРТУ. 2016. № 56. С. 38–44.
3. Квашенников В.В. Методы адаптивной коррекции параметров помехоустойчивого кода и их применение в перспективных системах радиосвязи: автореф. дис. ... докт. тех. наук: 05.12.13. Владимир, 2010. 290 с.
4. Кириллов С.Н., Дмитриев В.Т., Картавенко Я.О. Алгоритм объективной оценки качества декодированного речевого сигнала на основе изменения спектральной динамики критических полос спектра // Вестник РГРТУ. 2011. № 3 (37). С. 3–7.
5. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2003. 608 с.
6. Коберниченко В.Г. Основы цифровой обработки сигналов: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. 150 с.