УДК 51-74:656.11

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛОТНОГО ПЕШЕХОДНОГО ПОТОКА ПРИ СФОРМИРОВАВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ В ОПРЕДЕЛЕННОМ НАПРАВЛЕНИИ

Наумова Н.А.

ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», Краснодар, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Моделирование пешеходных потоков является актуальной темой для исследования, так как нашло большое количество приложений в различных областях науки в последние десятилетия. Особое значение понимание законов, которым подчиняется движение большой группы людей, имеет при моделировании эвакуационных сценариев, а также для организации движения по улично-дорожной сети. Актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей определять параметры плотных пешеходных потоков для управления ими в режиме реального времени. В работе пешеходный поток представляется как случайный поток Пальма. Распределение интервалов по времени в потоке аппроксимируется законом Эрланга шестого порядка. С помощью теории восстановления для случайных процессов разработан аналитический аппарат для прогнозирования количества пешеходов, прибывающих в фиксированную точку в течение заданного промежутка времени. При этом рассмотрен как случай отдельного пешеходного потока, так и слияние нескольких потоков в один. Приведен метод определения параметров потока по экспериментальным данным. Разработанный аналитический аппарат позволяет при минимальном числе исходных данных в режиме онлайн мгновенно предсказывать загруженность и выбирать оптимальный способ перенаправления пешеходных потоков при эвакуации.

Ключевые слова: пешеходный поток, математическая модель, случайный процесс, эвакуационный сценарий, организация движения

DETERMINATION OF THE PARAMETERS OF DENSE PEDESTRIAN FLOW WITH FORMED MOTION IN A CERTAIN DIRECTION

Naumova N.A.

Kuban State Technological University, Krasnodar, e-mail: Nataly_Naumova@mail.ru

Modeling of pedestrian flows is a relevant topic for research, as it has found a large number of applications in various fields of science in recent decades. Understanding the laws that govern the movement of a large group of people is of particular importance when modeling evacuation scenarios, as well as for organizing traffic along the road network. An urgent task is the development of a mathematical model that allows one to determine the parameters of dense pedestrian flows for their control in real time. In this paper, pedestrian flow is presented as a random stream of events. The distribution of time intervals in the flow is approximated by the sixth order Erlang law. Using the renewal theory for stochastic processes, an analytical apparatus has been developed for predicting the number of pedestrians arriving at a fixed point within a given period of time. In this case, both the case of a separate pedestrian stream and the merging of several streams into one are considered. A method for determining the flow parameters from experimental data is presented. The developed analytical apparatus allows, in on-line mode, with a minimum number of initial data, to instantly predict the workload and choose the optimal way to redirect pedestrian flows during evacuation.

Keywords: pedestrian flow, mathematical model, stochastic process, evacuation scenario, traffic organization

Моделирование пешеходных потоков является актуальной темой для исслледования, так как нашло большое количество приложений в различных областях науки в последние десятилетия. Особое значение понимание законов, которым подчиняется движение большой группы людей, имеет при моделировании эвакуационных сценариев, а также для организации движения по улично-дорожной сети.

Математические модели способны описывать динамику потока на различных уровнях: микроскопическом, мезоскопическом и макроскопическом. Микроскопические модели учитывают поведение в потоке каждого отдельного человека. Здесь можно выделить модель социальных сил и модель клеточных автоматов [1; 2]. На макроскопическом уровне предлагалось описывать потоки с помощью газодинамической и кинетической модели [3]. Существуют компьютерные программы, использующие оба типа моделей, позволяюшие решать локальные и глобальные задачи, обмениваясь результатами и данными внутри программы [2; 4; 5]. Проблема в том, что исходные данные для моделей разных уровней совершенно различны. Это вносит значительные трудности, так как сбор большого количества исходных данных сам по себе является трудной задачей.

Для отдельного класса задач требуется моделирование потока на некотором «среднем» уровне, когда отдельные участники движения учитываются с целью формирования параметров общего потока. Такие модели получили название мезоскопических.

Актуальной задачей является разработка математической модели, позволяющей определять параметры плотных пешеходных потоков для управления ими в режиме реального времени.

Целью данной работы является разработка мезоскопической модели плотного пешеходного потока, позволяющей при минимальном количестве исходных данных предсказывать параметры данного потока при эвакуационных сценариях.

Материал и методы исследования

При моделировании пешеходных потоков авторами зачастую за основу берутся аналогичные модели транспортных потоков. Не для всех типов решаемых задач это приемлемо, так как поток людей менее организован и подвержен влиянию большего количества случайных факторов. Согласно выводам, сделанным исследователями, существует эффект самоорганизации толпы, происходящий без внешнего воздействия по прошествии некоторого времени [2; 4]. В данной работе мы ставим цель описания сформировавшегося при эвакуации плотного потока, движущегося в определенном направлении к выходу. В этом случае мы можем взять за основу методы и приемы, использованные автором данной статьи при разработке модели транспортных потоков TIMeR_Mod [6].

Результаты исследования и их обсуждение

Гипотезу о нормальном распределении плотного пешеходного потока, движущегося в определенном направлении, доказывали экспериментально многие исследователи. Однако при описании потока пешеходов как случайного потока событий нормальный закон распределения применять затруднительно. Закон Эрланга при значениях параметра $k \geq 5$ близок к нормальному и соответствует плотным потокам событий [7]. Поэтому при эвакуации из мест массового скопления людей по узким коридорам поток пешеходов будем аппроксимировать законом Эрланга (как и транспортный).

Плотность распределения специального закона Эрланга (или просто *«закон Эрланга»*) имеет вид [7]:

$$f^{(k)}(t) = \lambda(\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} / (k-1), \quad (t > 0). \qquad (1)$$

Функция распределения Эрланга k-го порядка имеет вид:

$$F^{(k)}(t) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \left((\lambda t)^n e^{-\lambda t} \right) / n! =$$

$$= 1 - R(k-1, \lambda t), \quad (t > 0). \qquad (2)$$

Математическое ожидание $M(T)$ и дисперсия $D(T)$ в этом случае равны соответственно:

$$M(T) = \frac{k}{\lambda}; \ D(T) = \frac{k}{\lambda^2}. \qquad (3)$$

1. Представление пешеходного потока как потока Пальма

Будем использовать теорию восстановления при моделировании пешеходного потока как случайного потока событий – потока Пальма. Предполагаем, что поток уже сформировался и движется в определенном направлении. Случайным событием считаем прибытие пешехода в точку пространства с фиксированной координатой по оси направления движения. Интервал между случайными событиями – это интервал по времени между последовательными прибытиями к фиксированной точке пространства двух подряд идущих пешеходов в потоке. Рассмотрим функцию восстановления $H(t) = M(N_t)$ – математическое ожидание числа событий, произошедших за время t в случае (специального) распределения Эрланга. Изображение функции распределения временных интервалов в случае распределения Эрланга [8]:

$$f^*(s) = \frac{\lambda^k}{(\lambda + s)^k}. \qquad (4)$$

А преобразование Лапласа для этой функции имеет вид:

$$H^*(s) = \frac{\lambda^k}{s\left((\lambda + s)^k - \lambda^k \right)}. \qquad (5)$$

Функцию $H^*(s)$ можно разложить на простые дроби, содержащие члены:

1) от полюса $s = 0$;

2) от ненулевых полюсов в точках, являющихся корнями уравнения $f^*(s) = 1$.

Найдем корни этого уравнения:

$$\frac{\lambda^k}{(\lambda + s)^k} = 1; \ (\lambda + s)^k = \lambda^k. \qquad (6)$$

Ненулевые корни имеют вид (здесь i – мнимая единица):

$$s_p = \lambda \cdot \left(e^{2\pi p i / k} - 1 \right), \quad p = 1, 2, ..., k-1. \qquad (7)$$

Каждому простому ненулевому корню s_p в разложении $H^*(s)$ соответствует дробь:

$$\frac{-1}{s_p\cdot\left(f^*(s_p)\right)'\cdot\left(s-s_p\right)}=\frac{-1}{\left(s_p\left(-\frac{k\lambda^k}{\left(\lambda+s_p\right)^{k+1}}\right)\cdot\left(s-s_p\right)\right)}=\frac{\lambda+s_p}{k\cdot s_p\cdot\left(s-s_p\right)}. \qquad (8)$$

То есть

$$H^*(s)=\frac{\lambda}{ks^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{1-k}{2k}-\sum_{p=1}^{k-1}\frac{1}{s_p\left(f^*\left(s_p\right)\right)'\left(s-s_p\right)}=\frac{\lambda}{ks^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{1-k}{2k}+\sum_{p=1}^{k-1}\frac{\lambda+s_p}{k\cdot s_p\cdot\left(s-s_p\right)}. \qquad (9)$$

Отсюда по таблицам находим оригинал, т.е. функцию восстановления $H(t)$ – число событий, произошедших в течение интервала времени $(0;\, t)$. Известно из теории операционного исчисления, что каждой дроби $\frac{1}{s-s_p}$ соответствует оригинал $e^{s_p t}$.

В случае плотных пешеходных потоков, согласно исследованиям, закон распределения близок к нормальному, и его можно аппроксимировать (специальным) законом Эрланга порядка не ниже пятого.

Для получения точного аналитического задания функции восстановления рассмотрим $k = 6$.

Корни уравнения $\left(\lambda+s\right)^6=\lambda^6$ в этом случае следующие:

$$s_p=\lambda\cdot\left(e^{\frac{2\pi p}{6}i}-1\right)=\lambda\cdot\left(e^{\frac{\pi p}{3}i}-1\right),\quad p=1,\,2,\,...,\,k-1, \qquad (10)$$

$$s_1=\lambda\cdot\left(e^{\frac{\pi}{3}i}-1\right)=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$s_2=\lambda\cdot\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}-1\right)=\lambda\cdot\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$s_3=\lambda\cdot\left(e^{\frac{3\pi}{3}i}-1\right)=\lambda\cdot\left(-2\right),$$

$$s_4=\lambda\cdot\left(e^{\frac{4\pi}{3}i}-1\right)=\lambda\cdot\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$s_5=\lambda\cdot\left(e^{\frac{5\pi}{3}i}-1\right)=\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Изображение функции восстановления при $k = 6$ имеет вид:

$$H^*(s)=\frac{\lambda}{6s^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{-5}{12}-\sum_{p=1}^{5}\frac{1}{s_p\left(f^*\left(s_p\right)\right)'\left(s-s_p\right)}=$$

$$=\frac{\lambda}{6s^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{-5}{12}+\sum_{p=1}^{5}\frac{\lambda+s_p}{6\cdot s_p\cdot\left(s-s_p\right)}=\frac{\lambda}{6s^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{-5}{12}+R^*(s). \qquad (11)$$

Выразим $R^{*}(s)$:

$$R^{*}(s)=\frac{\lambda+\lambda\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{6\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\lambda\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}+$$

$$+\frac{\lambda+\lambda\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{6\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\lambda\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}+\frac{\lambda+\lambda(-2)}{6\lambda\cdot(-2)\left(s-\lambda(-2)\right)}+$$

$$+\frac{\lambda+\lambda\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{6\lambda\cdot\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\lambda\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}+\frac{\lambda+\lambda\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{6\lambda\cdot\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s-\lambda\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}. \quad (12)$$

После упрощения выражения и приведения его к виду, удобному для определения оригинала, получим следующее:

$$R^{*}(s)=\frac{1}{6}\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}\frac{1}{\left(s-\lambda\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}+\frac{1}{6}\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}\frac{1}{\left(s-\lambda\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{\left(s-\lambda(-2)\right)}+\frac{1}{6}\frac{-1+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}\frac{1}{\left(s-\lambda\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}+\frac{1}{6}\frac{-1-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}\frac{1}{\left(s-\lambda\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)}. \quad (13)$$

Найдем оригинал по его изображению:

$$R(t)=\frac{1}{6}\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}e^{\lambda\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+\frac{1}{6}\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}e^{\lambda\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+\frac{1}{6}\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{-1+i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}}e^{\lambda\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}+\frac{1}{6}\frac{-1-i\sqrt{3}}{-3-i\sqrt{3}}e^{\lambda\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t}. \quad (14)$$

Тогда получим:

$$R(t)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{-4}e^{\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)t}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)+i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right)+\left(1-i\sqrt{3}\right)^{2}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)-i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}e^{\lambda\left(-\frac{3}{2}\right)t}\left(\left(6-i\cdot 2\sqrt{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)t+i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right)+\left(6+i\cdot 2\sqrt{3}\right)\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)-i\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right)\right).$$

После упрощения выражения и приведения подобных слагаемых $R(t)$ приобретает следующий вид:

$$R(t) == \frac{1}{12}e^{-2\lambda t} - \frac{1}{24}e^{\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)t}\cdot\left[-4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right) - 4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}e^{\lambda\left(-\frac{3}{2}\right)t}\cdot\left[12\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)+4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]. \quad (15)$$

Тогда функция восстановления при $k = 6$ следующая:

$$H(t) = \frac{\lambda}{6}t - \frac{5}{12} + \frac{1}{12}e^{-2\lambda t} + \frac{1}{6}e^{\lambda\left(-\frac{1}{2}\right)t}\cdot\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{18}e^{\lambda\left(-\frac{3}{2}\right)t}\cdot\left[3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda t\right)\right]. \quad (16)$$

Формула (16) задает функцию $H(t)$, равную количеству пешеходов потока, прибывших к фиксированной точке за время t секунд. При эвакуационных сценариях $H(t)$ численно равна количеству людей, подошедщих к перекрытому эвакуационному выходу за t секунд. При моделировании улично-дорожного движения $H(t)$ определяет количество пешеходов, подошедших к пешеходному переходу за время горения запрещающего сигнала светофора [9].

2. Слияние нескольких пешеходных потоков перед перекрытым выходом

Рассмотрим теперь случай, когда перед эвакуационным выходом сливаются s пешеходных потоков. Согласно теории восстановления [7] для среднего числа восстановлений в интервале $(0; t)$ в объединенном процессе справедливо соотношение:

$$H(t) = \sum_{i=1}^{s} H_i(t), \quad (17)$$

где s – количество объединяемых процессов, $H_i(t)$ – функция восстановления каждого из них.

То есть если в некоторой точке плоскости сливаются s пешеходных потоков, то количество пешеходов, пересекающих эту точку в промежуток $(0; t)$ рассчитывается следующим образом:

$$H(t) = \sum_{i=1}^{s} H_i(t) = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\lambda_i}{6}t - \frac{5}{12} + \frac{1}{12}e^{-2\lambda_i t} + \frac{1}{6}e^{\lambda_i\left(-\frac{1}{2}\right)t}\cdot\left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i t\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{18}e^{\lambda_i\left(-\frac{3}{2}\right)t}\cdot\left[3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i t\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_i t\right)\right]\right). \quad (18)$$

Здесь λ_i – параметр Эрланга для i-го объединяемого потока.

3. Определение параметров распределения Эрланга по экспериментальным данным

С помощью видеодетекторов фиксируем величины интервалов T_i по времени (в секундах) между двумя последовательными прохождениями пешеходов в потоке точки с фиксированной координатой. Рассчитываем выборочную среднюю случайной величины T:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{i=1}^{m} T_i}{m}. \quad (19)$$

Значение параметра $k = 6$, тогда параметр λ распределения Эрланга следующий:

$$\lambda = \frac{k}{\overline{T}}. \qquad (20)$$

Заключение

При планировании эвакуационных сценариев либо при управлении потоками пешеходов при чрезвычайном происшествии в режиме реального времени необходимо определять загруженность эвакуационных выходов. Имитационное моделирование с помощью макромоделей в данном случае неприменимо, так как требует больших затрат по времени и огромного количества исходных данных. Предлагаемый в работе аналитический метод позволяет при минимальном числе исходных данных в режиме онлайн мгновенно предсказывать загруженность, а следовательно, выбирать оптимальный способ перенаправления пешеходных потоков при эвакуации.

Список литературы

1. Helbing D., Molnar P. Social force model for pedestrian dynamics. «Physical Review E». 1995. No. 51(5). P. 4282–4286.

2. Johansson F. Microscopic Modelling and Simulation of Pedestrian Traffic. Lincoping University Department of Scince and Technology. Lincoping, Sweden. 2013. P. 119. 23 p.

3. Carrillo J.A., Martin S., Wolfram M.-T. An improved version of the Hughes model for pedestrian flow. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2016. No. 26(04). P. 671–697.

4. Burger M., Hittmeir S., Ranetbauer H., Wolfram M.-T. Lane formation by side-stepping. SIAM Journal on Mathematical Analysis. 2016. No. 48(2). P. 981–1005.

5. Emiliano Cristiani, Benedetto Piccoli, and Andrea Tosin. Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics. Multiscale Modeling & Simulation. 2011. No. 9(1). P. 155–182.

6. Naumova N.A., Naumov R.A. Method of Solving Some Optimization Problems for Dynamic Traffic Flow Distribution . «International Review on Modelling and Simulations», Italy. 2018. Vol 11. No 4. DOI: 10.15866/iremos.v11i4.13701.

7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк., 2000. 480 с.

8. Cox D.R. Renewal theory. London: Methuen. 1962. P. 150.

9. Naumova N.A. Advanced optimization of road network: Pedestrian crossings with calling devices. International Journal of Emerging Trends in Engineering Research. 2020. No. 8 (1). P. 130–137.