УДК 519.63

ВАРЬИРУЕМОЕ КУСОЧНО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ИТЕРАЦИОННЫМ УТОЧНЕНИЕМ

Ромм Я.Е., Джанунц Г.А.

Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)», Таганрог,
e-mail: romm@list.ru, janunts@inbox.ru

Кусочно-интерполяционное приближение решения задачи Коши для уравнения переноса строится в каждом элементе разбиения прямоугольной области на подобласти. Интерполяционным полиномом Ньютона от двух переменных, представленным в форме алгебраического полинома с числовыми коэффициентами, приближается выражение частной производной по времени. Интеграл от полинома подставляется на место зависимой переменной. Процесс циклически повторяется при фиксированной степени полинома по аналогии с последовательными приближениями Пикара. Представлены доказательства сходимости кусочно-интерполяционного приближения и итерационного уточнения. Даны оценки скорости сходимости. Показано, что сконструированное приближение равномерно сходится к решению с ростом числа подобластей, при фиксированном количестве подобластей – с ростом числа пикаровских итераций. Приближение является равномерно-непрерывным в каждой подобласти. Программно реализован выбор степени полинома и числа итераций для наиболее точного приближения с наименьшей временной сложностью. Представлены результаты численных экспериментов. Согласно эксперименту в прямоугольнике единичной высоты абсолютная погрешность приближения в условиях гладкости решения составляет 10^{-19}–10^{-18}. Формальные аналоги метода строятся для некоторых разновидностей уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.

Ключевые слова: задача Коши для уравнения переноса, интерполяционный полином Ньютона от двух переменных, кусочно-интерполяционная аппроксимация функций, кусочно-интерполяционное решение задачи Коши, двухмерный аналог последовательных приближений Пикара

THE VARYING PIECEWISE INTERPOLATION SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE TRANSPORT EQUATION WITH ITERATIVE REFINEMENT

Romm Ya.E., Dzhanunts G.A.

Taganrog Branch of the Rostov State University of Economics, Taganrog,
e-mail: romm@list.ru, janunts@inbox.ru

The piecewise interpolation approximation of the solution of the Cauchy problem for the transport equation is constructed in each element of the division of a rectangular domain into subdomains. The Newton interpolation polynomial in two variables, transformed into the form of an algebraic polynomial with numerical coefficients, approximates the expression of the partial time derivative. The integral of the polynomial is substituted for the dependent variable. The process is cyclically repeated at a fixed degree of the polynomial by analogy with the Picard successive approximations. Evidence for the convergence of the piecewise interpolation approximation and iterative refinement is presented. Estimates of the convergence rate are given. It is shown that the constructed approximation uniformly converges to the solution with an increasing number of subdomains, for a fixed number of subdomains – with an increasing number of Picard iterations. The approximation is uniformly continuous in each subdomain. The results of numerical experiments are presented. The software implemented the choice of the polynomial degree and the number of iterations for the most accurate approximation with the least time complexity. According to the experiment, in a rectangle of unit height, the absolute error of approximation under the conditions of smoothness of the solution is 10^{-19}–10^{-18}. Formal analogues of the method are constructed for some varieties of partial differential equations, integro-differential and integral equations.

Keywords: the Cauchy problem for the transport equation, Newton's interpolation polynomial in two variables, piecewise polynomial approximation of functions, piecewise interpolation solution of the Cauchy problem, two-dimensional analogue of the Picard successive approximations

Для уравнений в частных производных снижение погрешности приближенного решения является актуальной задачей. В частности, для уравнения переноса эта проблема обсуждается в [1–3]. Глубокому исследованию проблемы посвящены работы [4], где отмечается принципиальное значение уравнения переноса для численного решения нестационарных задач механики сплошной среды и задач газовой динамики. Границы погрешности существующих методов в прямоугольной области небольшого размера, в условиях гладкости решения, как правило, находятся в диапазоне 10^{-11}–10^{-8}. Для снижения погрешности в статье предлагается кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса с итерационным уточнением. Прототипом является представленный в [5] метод для случая обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае уравнений в частных производных метод строится на основе интерполяционного полинома Ньютона от двух переменных, преобразуемого к виду алгебраического полинома с числовыми коэффициентами. Такая форма полинома позволяет естественным образом строить последовательные приближения для уточнения решения. В случае модельной одномерной задачи Коши для линейного уравнения переноса доказывается равномерная сходимость метода, оценивается скорость сходимости, для квазилинейного уравнения показана возможность аналогичных оценок. В [6] приведена программа и описан численный эксперимент, где рассматриваемая задача в прямоугольнике единичной высоты решается с погрешностью 10^{-19}–10^{-18}, ниже в статье приводятся результаты расширенного эксперимента. Схема построения метода формально допускает аналоги для разновидностей уравнений в частных производных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.

В работе ставится цель построить численный метод решения уравнения переноса, который имеет следующие отличия от известных аналогов.

1. От разностных методов разрабатываемый метод отличается построением на основе интерполяционного полинома Ньютона для двух переменных с равноотстоящими по направлению осей декартовых координат узлами. Полином варьируемой степени строится в каждой прямоугольной подобласти, на которые делится исходная прямоугольная область, метод является кусочно-интерполяционным.

2. От интерполяционных аналогов метод отличается тем, что полином имеет форму алгебраического полинома с числовыми коэффициентами. Коэффициенты конструктивно вычисляются на основе восстановления по корням полинома с помощью формул, отличных от формул Виета.

3. На основе алгебраической формы выполняется табличное восстановление первообразной от полинома, интерполирующего правую часть уравнения. Первообразная подставляется в правую часть на место искомой переменной. Такие подстановки итерируются, в результате достигается итерационное уточнение приближенного решения, выполняемое по аналогии с последовательными приближениями Пикара.

4. Отличия дают положительное преимущество относительно известных методов приближенного решения уравнения переноса, позволяющее достигать сравнительного повышения точности приближения на несколько десятичных порядков.

Цель работы включает математическое обоснование метода, выполнение его алгоритмизации, помимо того, требуется представить численный эксперимент, наглядно иллюстрирующий перечисленные свойства предложенного метода.

Кусочно-интерполяционное вычисление функций двух переменных

В декартовой системе координат *UXT* кусочно-интерполяционное приближение действительной функции $u = u(x, t)$ двух действительных переменных в прямоугольной области

$$G = \{ (x, t) \mid x \in [a, b], t \in [c, d] \} \quad (1)$$

строится следующим образом. Область (1) разбивается на прямоугольные подобласти G_{ij} с пересекающимися границами:

$$G = \bigcup_{j=0}^{P_t-1} \bigcup_{i=0}^{P_x-1} G_{ij}, \quad (2)$$

$$G_{ij} = \{ (x, t) \mid x \in [x_i, x_{i+1}],\ t \in [t_j, t_{j+1}] \},$$

$$P_x = 2^{k_x},\ P_t = 2^{k_t},\ k_x, k_t \in \{ 0, 1, \dots \}. \quad (3)$$

Интерполяционный полином Ньютона от двух переменных в подобласти (3) использует $(n+1)(n+2)/2$ узлов с треугольным расположением:

$$\begin{array}{lllll} (x_{i0}, t_{jn}) & & & & \\ (x_{i0}, t_{j(n-1)}) & (x_{i1}, t_{j(n-1)}) & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ (x_{i0}, t_{j0}) & (x_{i1}, t_{j0}) & \dots & (x_{i(n-1)}, t_{j0}) & (x_{in}, t_{j0}) \end{array} \quad (4)$$

При расположении узлов (4) функция интерполируется в нижней треугольной части G_{ij}, в верхней части фактически нужна экстраполяция, что учитывается в дальнейшем. Пусть произвольно задана граница ε абсолютной погрешности приближения функции $u(x, t)$. В G_{ij} интерполяционный полином Ньютона $\Psi_n^{ij}(z, w)$ строится с равноотстоящими на шаги h_x, h_t по направлениям координат узлами $x_{i\ell}$, t_{jm}, где

$$h_x = (x_{i+1} - x_i)/n,\ h_t = (t_{j+1} - t_j)/n,\ z = (x - x_i)/h_x,\ w = (t - t_j)/h_t,\ (x, t) \in G_{ij}, \quad (5)$$

$$x_{i\ell} = x_i + \ell h_x,\ t_{jm} = t_j + m h_t,\ \ell = \overline{0, n},\ m = \overline{0, n - \ell}. \quad (6)$$

Искомый полином примет вид [7]

$$\Psi_n^{ij}(z,w)=u(x_{i0},t_{j0})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{k}\frac{\Delta^k_{x^s t^{k-s}}u(x_{i0},t_{j0})}{s!\,(k-s)!}\prod_{\ell=0}^{s-1}(z-\ell)\prod_{m=0}^{k-s-1}(w-m), \qquad (7)$$

где $\Delta^k_{x^s t^{k-s}}u(x_{i0},t_{j0})$ – конечные разности k-го порядка. Степень полинома n выбирается одинаковой для всех G_{ij} и минимальной при условии

$$|u(x,t)-\Psi_n^{ij}(z,w)|\le\varepsilon\ \ \forall\ (x,t)\in G_{ij},\ i=\overline{0,P_x-1},\ j=\overline{0,P_t-1}. \qquad (8)$$

Проверка точности приближения (8) в каждой подобласти выполняется на множестве точек $x_{is}=x_i+sh_x/\gamma$, $t_{jr}=t_j+rh_t/\gamma$, $s,r\in\{0,1,\dots\}$, где $\gamma\ge 3$ – параметр. Минимальность n обеспечивается следующим образом. Построение и проверка точности начинаются с $n=1$ и $k_x=0$, $k_t=0$ во всех G_{ij} из (3). При нарушении неравенства (8) хоть в одной проверочной точке какой-либо подобласти значения k_x и k_t увеличиваются на единицу, и проверка начинается сначала. Процесс продолжается до нарушения априори заданных границ $k_x\le k_0$, $k_t\le k_0$. Если в результате заданная точность не достигнута, то полагается $k_x=0$, $k_t=0$, степень n увеличивается на единицу и проверка возобновляется сначала для этой степени в тех же границах k_x и k_t. Описанный процесс циклически воспроизводится до нарушения априори заданной границы $n\le N_0$. В качестве искомого фиксируется наименьшее n, при котором неравенство (8) выполняется одновременно во всех проверочных точках всех $2^{k_x+k_t}$ подобластей, в соответствии с этим фиксируются текущие значения k_x и k_t. Предполагается, что $N_0=\mathrm{const}$, но значения k_x и k_t абстрактно не ограничиваются. Полином (7) с видоизменением формул Виета [8] эквивалентно преобразуется к виду алгебраического полинома с числовыми коэффициентами

$$\Psi_n^{ij}(z,w)=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-\ell}a^{ij}_{\ell m}\,z^\ell w^m. \qquad (9)$$

Значение (9) вычисляется по аналогии со схемой Горнера:

$$\Psi_n^{ij}(z,w)=(\dots[\,(a^{ij}_{0n}w+a^{ij}_{1\,n-1}z+a^{ij}_{0\,n-1})\,w+(a^{ij}_{2n-2}z+a^{ij}_{1\,n-2})\,z+a^{ij}_{0\,n-2}\,]\,w+\dots)\,w+\dots+a^{ij}_{00}.$$

Для вычисления $u(x,t)$, $\forall(x,t)\in G$, дешифрируются индексы G_{ij}: $i=\mathrm{int}((x-a)/\rho_x)$, $j=\mathrm{int}((t-c)/\rho_t)$, int – целая часть числа, $\rho_x=x_{i+1}-x_i$, $\rho_t=t_{j+1}-t_j$, $x\in[x_i,x_{i+1})$, $t\in[t_j,t_{j+1})$. Индексы определяют адрес массива коэффициентов полинома (9) в памяти компьютера, программа вычисления приводится в [6]. С целью оценки погрешности полином (7) рассматривается в эквивалентной форме

$$\Psi_n^{ij}(x,t)=u(x_{i0},t_{j0})+\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m}\frac{\Delta^m_{x^k t^{m-k}}u(x_{i0},t_{j0})}{h_x^k h_t^{m-k}k!(m-k)!}\prod_{q=0}^{k-1}(x-x_{iq})\prod_{r=0}^{m-k-1}(t-t_{jr}), \qquad (10)$$

узлы интерполяции определяются из (5), (6). Сначала (10) рассматривается в области G, при этом не используются индексы подобласти. Остаточный член интерполяции в этом случае можно представить в виде [9]

$$R_G(x,t)=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{\partial^{n+1}u(\xi_i,\eta_i)}{\partial x^i\partial t^{n+1-i}}\frac{\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)}{i!}\frac{\prod_{k=0}^{n-i}(t-t_k)}{(n-i+1)!}, \qquad (11)$$

где (x_ℓ,t_k) – узлы интерполяции, $\ell=\overline{0,i-1}$, $k=\overline{0,n-i}$, (ξ_i,η_i) – некоторая точка внутри G. Если не оговорено иное, внутри области (подобласти) производные понимаются в обычном смысле, на границе – как односторонние производные по направлению изнутри к границе. Для дальнейшего предполагается существование, непрерывность, и, следовательно, ограниченность в замкнутой области G всех частных производных до порядка $2n+1$ включительно. Согласно (10) достаточно было бы ввести такое предположение относительно порядка $n+1$. Смысл формального завышения порядка гладкости заключается в следующем. Вследствие треугольности расположения узлов (4) остаточный член (11) фактически относится только к нижней треугольной части, а не ко всей прямоугольной области G.

Для оценки погрешности именно во всей области G преобразуется расположение узлов. Интерполяционный полином строится в описанном прямоугольном треугольнике, катеты которого продолжают нижнюю и левую стороны прямоугольника G, длина каждого катета вдвое больше продолжаемой стороны. Гипотенуза треугольника, охватывающего все узлы, пройдет через правую вершину G. В описанном треугольнике узлы (4) полностью охватят область G, остаточный член (11) будет распространяться на всю эту область. Аналогичное преобразование выполняется для каждой подобласти G_{ij}. Вследствие преобразования расстояния h_x, h_t между узлами в (5), при неизменности степени полинома n, окажутся вдвое больше первоначально предполагавшихся в (5) значений. Чтобы не возросла погрешность, расстояния будут сохранены такими, как они были даны в (5), тогда степень интерполирующего полинома станет равной $2n$. Это соответствует количеству $(2n+1)(2n+2)/2$ узлов в их преобразованном расположении. В дальнейших оценках и в соотношениях вида (7)–(11) n всегда будет заменяться на $2n$. С данными изменениями имеет место соотношение

$$|R_G(x,t)| \le C_0 \sum_{i=0}^{2n+1} \max_{0\le i_0\le i} h_x^{i_0} h_t^{2n-i_0+1},\ C_0 = \text{const}\ \forall\ (x,t)\in G,\ \forall n\le N_0\,. \tag{12}$$

Неравенство (12) получается следующим образом. Если для точки (x, t) из (11) в слагаемом под знаком Σ (с заменой n на $2n$) выполняется $x\in[x_j, x_{j+1}]$, $0\le j\le i-2$, $t\in[t_r, t_{r+1}]$, $0\le r\le 2n-i-1$, то

$$\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)=\prod_{\ell=0}^{j}(x-x_\ell)\prod_{\ell=j+1}^{i-1}(x-x_\ell)\,;\ \prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)=\prod_{k=0}^{r}(t-t_k)\prod_{k=r+1}^{2n-i}(t-t_k)\,.$$

Поэтому

$$\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|\le\prod_{\ell=0}^{j}|x_{j+1}-x_\ell|\prod_{\ell=j+1}^{i-1}|x_j-x_\ell|\,;\ \left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right|\le\prod_{k=0}^{r}|t_{r+1}-t_k|\prod_{k=r+1}^{2n-i}|t_r-t_k|\,.$$

Отсюда

$$\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|\le h_x^i\prod_{\ell=0}^{j}(j+1-\ell)\prod_{\ell=j+1}^{i-1}(\ell-j)\,,\ \left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right|\le h_t^{2n-i+1}\prod_{k=0}^{r}(r+1-k)\prod_{k=r+1}^{2n-i}(k-r)\,,$$

или,

$$\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|\le h_x^i(j+1)!\,(i-1-j)!\,,\ \left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right|\le h_t^{2n-i+1}(r+1)!\,(2n-i-r)!\,.$$

С учетом $(k+1)!\,(m-k)!\le(m+1)!\ \forall\ k,\ 0\le k\le m$, получится

$$\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|\le h_x^i i!\,,\ \left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right|\le h_t^{2n-i+1}(2n-i+1)!\,.$$

С другой стороны, если для (x, t) в рассматриваемом слагаемом с индексом i_0, $1\le i_0<i$, под знаком Σ выполняется $x\in[x_j, x_{j+1}]$, $j\le i-2$, но $j\ge i_0-1$, то $\left|\prod_{\ell=0}^{i_0-1}(x-x_\ell)\right|\le\prod_{\ell=0}^{i_0-1}|x_{j+1}-x_\ell|$. Поэтому $\left|\prod_{\ell=0}^{i_0-1}(x-x_\ell)\right|\le h_x^{i_0}\prod_{\ell=0}^{i_0-1}(j+1-\ell)$, следовательно, $\left|\prod_{\ell=0}^{i_0-1}(x-x_\ell)\right|\le h_x^{i_0}i!$. Если под знаком Σ в (11) с рассматриваемым видоизменением $t\in[t_r, t_{r+1}]$, $r\le 2n-i-1$, но для i_0, $1\le i_0<i$, выполняется $r\ge 2n-i_0$, то $\left|\prod_{\ell=0}^{2n-i_0}(t-t_\ell)\right|\le\prod_{\ell=0}^{2n-i_0}|t_{r+1}-t_\ell|$. Поэтому $\left|\prod_{\ell=0}^{2n-i_0}(t-t_\ell)\right|\le h_t^{2n-i_0+1}\prod_{\ell=0}^{2n-i_0}(r+1-\ell)$, следовательно, $\left|\prod_{\ell=0}^{2n-i_0}(t-t_\ell)\right|\le h_t^{2n-i_0+1}(2n-i+1)!$.
В результате

$$\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|\left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right|\le\max_{1\le i_0\le i}h_x^{i_0}h_t^{2n-i_0+1}i!(2n-i+1)!\ \forall i\in\overline{1,\,2n}\,.$$

Тем более,

$$\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|\left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right| \le \max_{0\le i_0\le i} h_x^{i_0} h_t^{2n-i_0+1} i!(2n-i+1)!\,. \tag{13}$$

Неравенство (13) сохраняется в случае $i = 0$ и выполняется $\forall i \in \overline{0, 2n}$. Из (11) (при замене n на $2n$)

$$\left|R_G(x,t)\right| \le \sum_{i=0}^{2n+1}\left|\frac{\partial^{2n+1}u(\xi_i,\eta_i)}{\partial x^i \partial t^{2n+1-i}}\right| \frac{\left|\prod_{\ell=0}^{i-1}(x-x_\ell)\right|}{i!}\frac{\left|\prod_{k=0}^{2n-i}(t-t_k)\right|}{(2n-i+1)!}. \tag{14}$$

В рассматриваемых предположениях

$$\max_G\left|\frac{\partial^{2n+1}u(x,t)}{\partial x^i \partial t^{2n+1-i}}\right| = C_0\,,\ C_0 = \mathrm{const}\ \ \forall i,\ 0\le i\le 2n+1,\ \forall n\le N_0\,. \tag{15}$$

Подстановка в (14) правых частей из (13) и C_0 из (15) влечет (12). Всюду ниже предполагается, что размеры G позволяют считать расстояния между узлами меньшими единицы при всех рассматриваемых n. Узлы являются равноотстоящими вдоль направлений осей, поэтому найдутся h, q, p, такие, что

$$h_x = qh,\ q = \mathrm{const},\ h_t = ph,\ p = \mathrm{const},\ h<1,\ q<1,\ p<1,\ p<q\,. \tag{16}$$

Из (12) и (16) $\left|R_G(x,t)\right| \le C_0\, h^{2n+1}\sum_{i=0}^{2n+1} q^{2n+1}$. Очевидно, $\sum_{i=0}^{2n+1} q^{2n+1} \le\ c_0\,,\ c_0 = \mathrm{const}$. В обозначении $C = C_0 c_0$,

$$\left|R_G(x,t)\right| \le C\,h^{2n+1},\ C = \mathrm{const}\,. \tag{17}$$

Пусть теперь по этой же схеме в каждой подобласти G_{ij} построен интерполяционный полином (10) с заменой показателя степени n на $2n$. Тогда расстояния между проекциями узлов на оси координат уменьшатся соответственно в обратной пропорции $P_x = 2^{k_x}$ и $P_t = 2^{k_t}$, где k_x, k_t из (3). В (12) тех же пропорциях соответственно уменьшатся h_x, h_t, поэтому $\left|R_{G_{ij}}(x,t)\right| \le C_0\sum_{r=0}^{2n+1}\max_{0\le i_0\le r}\frac{h_x^{i_0}}{2^{i_0 k_x}}\frac{h_t^{2n-i_0+1}}{2^{(2n-i_0+1)k_t}}$. Если выбрать $2^{k_x} = 2^{k_t} = 2^k$, то h в (17) обратно пропорционально 2^k, в результате

$$\left|R_{G_{ij}}(x,t)\right| \le C\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}\ \ \forall (x,t)\in G_{ij}\ \ \forall\, i,j;\ \ i = \mathrm{const},\, j = \mathrm{const}\,. \tag{18}$$

В (18) C, h из (17), $h < 1$, i, j из (2). Таким образом, имеет место

Лемма 1. Пусть функция $u(x, t)$ определена в G из (1), где у нее существуют и непрерывны все частные производные до порядка $2n + 1$ включительно. Тогда при условии разбиения G на 2^{2k} подобластей (2), (3) в случае $2^{k_x} = 2^{k_t} = 2^k$, кусочно-интерполяционное приближение данной функции в G с помощью полиномов вида (7), взятых в степени $2n$, может быть выполнено с абсолютной погрешностью (18), где шаги интерполяции h_x, h_t из (5) связаны с $h < 1$ из (17) соотношениями (16).

Рассматриваемое приближение инвариантно относительно i, j из (2), (3), поэтому в левой части (18) можно взять максимум по всем подобластям:

$$\max_{\forall (x,t)\in G_{ij},\ \forall i,\,j\in\overline{0,2^k-1}}\left|R_{G_{ij}}(x,t)\right| \le C\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}\ ,\ C = \mathrm{const}\,. \tag{19}$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. В условиях леммы 1 кусочно-интерполяционное приближение равномерно сходится к функции $u(x, t)$ в области G при $k \to \infty$ со скоростью сходимости (19).

В каждой подобласти полином (7) может быть преобразован к виду (9) со степенью $2n$ без изменения оценок (18), (19). В дальнейшем используются соотношения

$$u(x,t) \approx \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n-\ell} a_{\ell m} z^{\ell} w^{m}, \; z = (x - x_{i0}) h_x^{-1}, \; w = (t - t_{j0}) h_t^{-1}, \tag{20}$$

$$u_x \approx h_x^{-1} \sum_{\ell=1}^{2n} \sum_{m=0}^{2n-\ell} \ell a_{\ell m} z^{\ell-1} w^{m}, \; u_t \approx h_t^{-1} \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{m=1}^{2n-\ell} m a_{\ell m} z^{\ell} w^{m-1}, \tag{21}$$

$$\int u(x,t)\,dt \approx \tilde{c} + h_t \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n-\ell} a_{\ell m} z^{\ell} w^{m+1} / (m+1), \; \tilde{c} = \text{const}. \tag{22}$$

Значения констант и параметров определяются по ходу изложения, h_x, h_t в (20)–(22) пропорциональны h согласно (16).

Исходные предположения

Вначале рассматривается задача Коши для линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t), \;\; u(x,0) = \varphi(x), \tag{23}$$

где $a(x, t)$, $f(x, t)$ – заданные функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(x,t) \mid x \in R, t \ge 0\}$, $\varphi(x)$ – заданная функция $x \in R$ [4]. Для построения метода приближенного решения выбраны прямоугольная область задания этих функций и одна из ее границ, определяемые непосредственно ниже. Ввиду применения кусочной интерполяции с оценками (14), (19) для анализа сходимости используются следующие ограничения.

I. Приближенное решение задачи (23) строится в области G из (1), объединяющей подобласти G_{ij} из (2), (3) при $2^{k_x} = 2^{k_t} = 2^k$, областью определения $\varphi(x)$ служит основание G на оси OX. Значения a и b не конкретизируются, вместе с тем всюду ниже $c = 0$, $d = T$, $t \in [0, T]$. Предполагается, что $u(x, t)$ принадлежит области $\{ |u(x,t) - u(x,0)| \le \tilde{b};\ (x,t) \in G\}$, где $\tilde{b}$ – постоянная, значение которой может быть задано произвольно, при необходимости оно конкретно оговаривается.

II. Предполагается, что в области $G_\Delta = \{(x,t) \mid x \in [a-\Delta, b+\Delta],\ t \in [0, T]\}$, при $\forall\ \Delta\colon\ 0 < \Delta < 2^{-1}(b-a)$, $\Delta = \text{const}$, существуют и непрерывны все частные производные $u(x, t)$ до порядка $2n + 1$ включительно $\forall n \le N_0, N_0 = \text{const}$, с таким же порядком непрерывно дифференцируемы $a(x, t)$ и $f(x, t)$, функция $\varphi(x)$ определена и непрерывно дифференцируема $2n + 1$ раз на отрезке $x \in [a-\Delta, b+\Delta]$.

III. Предполагается, что в подобласти $G_{\Delta ij} = \{(x,t) \mid x \in [x_i - \Delta, x_{i+1} + \Delta],\ t \in [t_j, t_{j+1}]\}$ значение Δ может быть произвольным в границах $0 < \Delta < 2^{-k-1}(b-a)$, $\Delta = \text{const}$.

В предположениях I, II обусловлено существование и единственность, а также устойчивость решения задачи (23) относительно возмущения начальных данных [4].

В G_{ij} приближенное решение строится с помощью интерполяционного полинома с итерационным уточнением, последовательно по j выполняется переход от G_{ij} к $G_{i(j+1)}$. За начальные условия в $G_{i(j+1)}$ принимается приближение из G_{ij} на смежной с $G_{i(j+1)}$ границе. В G_{00} узловые значения интерполяции задает функция $\varphi(x)$. Конкретно интерполируется $f(x,t) - a(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, что дает приближение $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Интеграл по времени от интерполяционного полинома принимается за приближение решения, которое подставляется в выражение $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ из (23). Полученное приближение $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ снова интерполируется, и описанный процесс повторяется с использованием (20)–(22). На практике итерации выполняются до искомой точности приближения, абстрактно их количество предполагается неограниченным. Процесс воспроизводится в каждой подобласти до полного прохода области G.

Итерационное уточнение с учетом остаточных членов интерполяции. В G_{ij}

$$\int_{t_0}^{t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dt=\int_{t_0}^{t}\left(f(x,t)-a(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)dt,\quad (x,t)\in G_{ij},\ t_0=t_0(i,j),\ u(x,t_0)=\varphi_{ij}(x,t_0). \quad (24)$$

В дальнейшем обозначения корректируются с целью отличия от использованных при описании интерполяции функции. К нижним индексам полинома $\Psi^{ij}_{2n}(z,w)$ из (20) добавлен индекс $2k$ в соответствии с числом подобластей 2^{2k}, аналогичная индексация применяется к другим выражениям. Полином $\Psi^{ij}_{2k2n}(z,w)$ интерполирует не $u(x, t)$, а подынтегральную функцию правой части (24), что отмечается слитным индексом ∂u, остаточный член интерполяции c_{2k2n} оценивается из (19), –

$$\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n}(z,w)=f(x,t)-a(x,t)\frac{\partial\tilde{u}(x,t)}{\partial x}+c_{2k2n},\ \left|c_{2k2n}\right|\le C\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}, \quad (25)$$

где z, w из (20), $\tilde{u}(x,t)\approx u(x,t)$ – приближение решения на предыдущей итерации. Аналогично (20), $\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n}(z,w)$ преобразуется к виду (9). Решение на текущей итерации приближается интегралом от $\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n}(z,w)$, определяемым аналогично (22). Полученный полином обозначается ${}^{t}P_{u2k2n}(x,t)$ – по степени $2n$, числу подобластей 2^{2k} и приближению $u(x, t)$ путем интегрирования по t полинома $\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n}(z,w)$. Итерационный процесс примет вид

$$\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n(r-1)}(z,w)=f(x,t)-a(x,t)\frac{\partial\,{}^{t}P_{u2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}+c_{2k2n},$$

$${}^{t}P_{u2k2nr}(x,t)={}^{t}P_{u2k2nr}(x,t_0)+\int_{t_0}^{t}\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n(r-1)}(z,w)\ dt+{}^{t}c_{u2k2n},$$

где ${}^{t}P_{u2k2nr}(x,t_0)=\varphi_{ij}(x,t_0),\ r=1,2,\ldots,$ ${}^{t}c_{u2k2n}=\int_{t_0}^{t}c_{2k2n}\,dt$ – остаточный член от приближения $u(x, t)$ полиномом ${}^{t}P_{u2k2nr}(x,t)$ на отдельно взятой итерации. С учетом (25) $\left|\int_{t_0}^{t}c_{2k2n}\,dt\right|\le C\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}(t-t_0)$, согласно предположению II $\left|{}^{t}c_{u2k2n}\right|\le C\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}\times 2^{-k}T$. Без явного выражения $\Psi^{ij}_{\partial u\,2k2n(r-1)}(z,w)$ этот же процесс запишется в виде

$$\begin{aligned}{}^{t}P_{u2k2nr}(x,t)={}&{}^{t}P_{u2k2nr}(x,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(f(x,t)-a(x,t)\frac{\partial\,{}^{t}P_{u2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}\right)dt+\\&+{}^{t}c_{u2k2n},\ (x,t)\in G_{ij},\ t_0=t_0(i,j),\end{aligned} \quad (26)$$

где $r=1,2,\ldots,$ коэффициенты $\dfrac{\partial\,{}^{t}P_{u2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}$ связаны с коэффициентами ${}^{t}P_{u2k2n(r-1)}(x,t)$ согласно (21), остаточный член оценивается из соотношения

$$\left|{}^{t}c_{u2k2n}\right|\le\tilde{C}2^{-k(2n+2)}h^{2n+1},\ \tilde{C}=CT,\ \tilde{C}=\mathrm{const}\ \forall\ (x,t)\in G_{ij},\ \forall\ G_{ij}\in G. \quad (27)$$

Пусть прямоугольник G_{ij} произвольно фиксирован и уравнение (24) рассматривается в нем с теми же начальными условиями на границе, с которыми выполняются итерации (26). В этом случае решение не является точным, что отмечается чертой сверху, аналогично отмечается приближающий его полином, из (26) следует

$$ {}^{t}\overline{P}_{u2k2nr}(x,t) = {}^{t}\overline{P}_{u2k2nr}(x,t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(f(x,t) - a(x,t)\,\frac{\partial\, {}^{t}\overline{P}_{u2k2n(r-1)}(x,t))}{\partial x} + c_{2k2n}\right) dt,\ (x,t)\in G_{ij}, \quad (28) $$

где использовано ${}^{t}c_{u2k2n} = \int_{t_0}^{t} c_{2k2n}$, $\bar{u}(x,t) \approx u(x,t)$, $\bar{u}(x,t_0) = \varphi_{ij}(x,t_0)$, $\varphi_{ij}(x,t_0) = {}^{t}\overline{P}_{u2k2nr}(x,t_0)$, $r = 1, 2, \ldots$

В предположениях I, II $u(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$ \forall\, \varepsilon_0 > 0\ \exists\ \Delta > 0,\ \Delta = \Delta(\varepsilon_0),\ \Delta = \mathrm{const}: $$

$$ \forall\, \Delta x,\ 0 < |\Delta x| \le \Delta,\ \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} \right| \le \varepsilon_0\ \ \forall\ (x,t)\in G,\ (x+\Delta x,t)\in G_\Delta, \quad (29) $$

в частности (29) выполняется в случае $\Delta x = \Delta$. В самом деле, по теореме о среднем, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\xi}$, $\xi = x + \lambda\Delta x$, $|\lambda| < 1$. Повторное применение теоремы влечет $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\bar{\xi}} \times \overline{\Delta x}$, $\bar{\xi} = x + \bar{\lambda}\,\overline{\Delta x}$, $|\bar{\lambda}| < 1$, $|\overline{\Delta x}| < |\Delta x|$. Отсюда $\left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \frac{u(x+\Delta x,t)-u(x,t)}{\Delta x} \right| \le \max_G \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right| |\Delta x|$. Область G замкнута, поэтому $\max_G \left| \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right| \le c$, $c = \mathrm{const}$. Очевидно, $\forall\, \varepsilon_0 > 0$ достаточно взять любое $\Delta = \mathrm{const}$, $0 < \Delta \le c^{-1}\varepsilon_0$, чтобы выполнялось (29). Значение Δ в (29) можно произвольно уменьшить.

Для исследования сходимости (28) рассматривается вспомогательная задача

$$ \frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial t} + a(x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t) - u_\Delta(x,t)}{\Delta} = f_\Delta(x,u_\Delta,t),\ \ u_\Delta(x,0) = \varphi(x),\ (x,t)\in G,\ (x+\Delta,t)\in G_\Delta, \quad (30) $$

где $f_\Delta(x,u_\Delta,t) = f(x,t) - a(x,t)\left(\frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial x} - \frac{u_\Delta(x+\Delta,t) - u_\Delta(x,t)}{\Delta} \right)$, $f(x, t)$ из (23), Δ произвольно выбрано в соответствии с (29) и зафиксировано. Задача (30) является эквивалентным преобразованием (23), в области G решения задач совпадают и одновременно устойчивы к возмущению начальных данных. В предположениях I, II $f_\Delta(x,u_\Delta,t)$ удовлетворяет условию Липшица относительно u_Δ. В условиях (30) выполнено $u_\Delta(x,t) \equiv u(x,t)$, $\frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial x} \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$. В G_{ij} решение задачи (30) представимо в виде

$$ u_\Delta(x,t) = u_\Delta(x,t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x,u_\Delta,t) - a(x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t) - u_\Delta(x,t)}{\Delta} \right) dt,\ \ t_0 = t_0(i,j),\ u_\Delta(x,t_0) = \varphi_{ij}(x,t_0), \quad (31) $$

где $(x,t)\in G_{ij}$, $(x+\Delta,t)\in G_{\Delta ij}$. Приближающий $u_\Delta(x,t)$ полином будет обозначаться ${}^{t}P_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)$. Полином, приближающий $f_\Delta(x,u_\Delta,t) - a(x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t) - u_\Delta(x,t)}{\Delta}$, обозначается $\Psi^{ij}_{\Delta u\,2k2n}(z,w)$, где z и w из (20). Значения остаточных членов интерполяции изменятся, но их обозначения сохраняются, что не должно приводить к недоразумениям. В этих обозначениях решение (31) приближает последовательность

$$ {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) = {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t_0) + $$
$$ +\int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta\left(x, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),t\right) - a(x,t)\,\frac{{}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\Delta} + c_{2k2n}\right)dt, \qquad (32) $$

где $\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t_0) = \overline{u}_\Delta(x,t_0)$, $r = 0, 1, \ldots$, ввиду неточности начальных данных решение отмечается чертой. Соотношение (31) перейдет в соотношение

$$ \overline{u}_\Delta(x,t) = \overline{u}_\Delta(x,t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x,\overline{u}_\Delta,t) - a(x,t)\,\frac{\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t) - \overline{u}_\Delta(x,t)}{\Delta}\right)dt,\ \overline{u}_\Delta(x,t_0) = \varphi_{ij}(x,t_0), \quad (33) $$

где $(x,t)\in G_{ij}$, $(x+\Delta,\,t)\in G_{\Delta ij}$, $t_0 = t_0(i,j)$, $\varphi_{ij}(x,t_0) = \overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t_0)$.

Всюду ниже значение Δ в (30)–(33) рассматривается как параметр, выбор которого в границах условия (29) позволит оценить сходимость последовательности (28) на основе оценки сходимости последовательности (32).

Из (32), (33)

$$ \overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) = $$
$$ = \int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x,\overline{u}_\Delta,t) - f_\Delta\left(x, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),t\right) - a(x,t)\left(\frac{\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t)}{\Delta} - \frac{\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\Delta}\right) - c_{2k2n}\right)dt. $$

Замечание 1. С учетом постоянного числа подобластей 2^{2k}, $k = \text{const}$, не умаляя общности, можно считать, что к $f_\Delta(x,\overline{u}_\Delta,t)$ для всех $\overline{u}_\Delta$ из области $\tilde{R}:\{\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - \overline{u}_\Delta(x,t_0)\right| \le \tilde{b},\ t_0 = t_0(i,j),\ (x,\,t)\in G_{ij},\ (x+\Delta,\,t)\in G_{\Delta ij}\}$ применимо условие Липшица при некотором достаточно большом значении $\tilde{b} = \text{const}$. Последовательность ${}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)$ не выводит из $\tilde{R}$ при таком определении $\tilde{b}$ по следующим причинам. При $r = 1$ полином ${}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n0}(x,t)$ отличается от $\overline{u}_\Delta$ не более, чем на остаточный член однократного интерполирования ${}^t c_{u2k2n}$, под интегралом можно применить условие Липшица при этом r: $\left| f_\Delta(x,\overline{u}_\Delta(x,t),t) - f_\Delta\left(x, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),t\right)\right| \le \tilde{L}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right|$, $\tilde{L} = \text{const}$ $\forall (x,t)\in G_{ij}$, $(x+\Delta,\,t)\in G_{\Delta ij}$. Тогда $\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)\right| \le \tilde{b}$, $r = 1$, при некотором $\tilde{b} = \text{const}$, таком, что $\left|{}^t c_{u2k2n}\right| \le \tilde{b}$. Дальнейшие рассуждения строятся по индукции. Именно, с повторением данного приема для $r \ge 1$ ниже доказывается сходимость ${}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)$ к $\overline{u}_\Delta(x,t)$ при $r \to \infty$. В частности, полином данной последовательности не будет выводить из $\tilde{R}$ $\forall r \ge 1$, поэтому к $f_\Delta\left(x, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),t\right)$ применимо условие Липшица. В качестве константы Липшица $\tilde{L}$ в дальнейшем принят ее максимум по всем подобластям из (1)–(3).

Таким образом, можно предположить, что для некоторого $r \ge 1$ выполнено –

$$ \forall\,(x,t)\in G_{ij},\ (x+\Delta,t)\in G_{\Delta ij}:\quad \left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)\right| \le $$
$$ \le \int_{t_0}^{t}\left(\tilde{L}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| + 2M\Delta^{-1}\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| + \max_{G}\left|c_{2k2n}\right|\right)dt. \quad (34) $$

В (34) и ниже $M = \max_G\left|a(x,t)\right|$, $M = \text{const}$, $\tilde{L}$ – отмеченное значение константы. Отсюда $\forall\,(x,t)\in G_{ij}$, $(x+\Delta,t)\in G_{\Delta ij}$:

$$ \left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left((\tilde{L} + 2M\Delta^{-1})\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| + \max_{G}\left|c_{2k2n}\right|\right)dt, $$

и

$$ \max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left((\tilde{L} + 2M\Delta^{-1})\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| + \max_{G}\left|c_{2k2n}\right|\right)dt. \quad (35) $$

Сначала рассматривается случай, когда в (35) погрешность однократного интерполирования не превосходит погрешности $r - 1$ итераций с некоторым постоянным коэффициентом, точнее,

$$\exists Q > 0,\, Q = \text{const} : 0 < \max_{G} \left| c_{2k2n} \right| \le Q \max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n(r-1)}(x,t) \right|,\ r = 1,2,\ldots \quad (36)$$

В (36) значение Q можно произвольно увеличить, и для $\forall \varepsilon_0$ из (29) оно выбирается так, чтобы

$$Q^{-1} \max_{G} \left| c_{2k2n} \right| \le \varepsilon_0 . \quad (37)$$

В дальнейшем исследуется случай, когда (36) нарушается: для некоторого $r_0 > r$ окажется выполненным соотношение

$$\max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n(r_0-1)}(x,t) \right| < Q^{-1} \max_{G} \left| c_{2k2n} \right|,\ r_0 \ge r+1, \quad (38)$$

при этом в силу (38) и (37) нарушение (36) влечет $\max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n(r_0-1)}(x,t) \right| < \varepsilon_0$.

Пусть сначала (36) не нарушено, в этом случае согласно (35)

$$\max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2nr}(x,t) \right| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \left((\tilde{L} + 2M\Delta^{-1}) \max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n(r-1)}(x,t) \right| + Q \max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n(r-1)}(x,t) \right| \right) dt. \quad (39)$$

Не умаляя общности, можно считать $\Delta \le 1$, тогда

$$\max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2nr}(x,t) \right| \le N \int_{t_0}^{t} \max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n(r-1)}(x,t) \right| dt,\ N = (\tilde{L} + 2M + Q)\Delta^{-1}.$$

Если обозначить $\varepsilon_{k\ell} = \max_{G_{ij}} \left| \bar{u}_{\Delta}(x,t) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n\ell}(x,t) \right|$, то неравенство примет вид

$$\varepsilon_{k\ell} \le N \int_{t_0}^{t} \varepsilon_{k(\ell-1)} dt,\ \ell = 1,\, 2,\, \ldots \quad (40)$$

где $\varepsilon_{k0} = \max_{G_{ij}} \left| \varphi_{ij}(x,t_0) - {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n0}(x,t_0) \right| \le \max_{G_{ij}} \left| {}^{t}c_{u2k2n} \right|$, $\varphi_{ij}(x,t_0)$ – функция на смежной с G_{ij} границе $G_{i(j-1)}$, $\varphi_{ij}(x,t_0) = {}^{t}\bar{P}_{u_{\Delta}2k2n\bar{\ell}}(x,t)$, $\bar{\ell}$ – номер заключительной итерации, выполнявшейся в $G_{i(j-1)}$. Из (40) и (27) $\varepsilon_{k1} \le \tilde{C} 2^{-k(2n+2)} h^{2n+1} N \int_{t_0}^{t} dt$, или, $\varepsilon_{k1} \le \tilde{c}_{kh} N\,(t - t_0)$, здесь и ниже $\tilde{c}_{kh} = \tilde{C} 2^{-k(2n+2)} h^{2n+1}$. Тогда $\varepsilon_{k2} \le \tilde{c}_{kh} \dfrac{N^2 (t-t_0)^2}{2}$. По индукции $\varepsilon_{k\ell} \le \tilde{c}_{kh} \dfrac{N^{\ell} (t-t_0)^{\ell}}{\ell!}$, $\ell = 3,\, 4,\, \ldots$ Согласно предположению I, с учетом размеров G_{ij}, верно неравенство $t - t_0 \le 2^{-k} T$, в результате

$$N \int_{t_0}^{t} \varepsilon_{k(\ell-1)} dt \le \tilde{c}_{kh} \frac{(2^{-k} NT)^{\ell}}{\ell!}, \quad (41)$$

и

$$\varepsilon_{k\ell} \le \tilde{c}_{kh} \frac{(2^{-k} NT)^{\ell}}{\ell!},\ \ell = 1,\, 2,\, \ldots \quad (42)$$

В (42) $(2^{-k}NT)^{\ell}/\ell! \to 0,\ \ell \to \infty$, поэтому $\varepsilon_{k\ell} \to 0,\ \ell \to \infty$. Отсюда следует, что (36) необходимо окажется нарушенным, –

$$\exists L = L(i, j, k, Q, \Delta, \varepsilon_0):\ \tilde{c}_{kh}\frac{(2^{-k}NT)^{L}}{L!} < Q^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right|,\ \varepsilon_{kL} < Q^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right|,\ \varepsilon_{kL} < \varepsilon_0. \quad (43)$$

Пусть (43) и соответственно (38) впервые выполнились при $L = r_0 - 1 = r$. Для индекса r – 1 еще сохранялось (36), не выполнялось (38) и оставалось верным (39), поэтому при $\ell = 0$

$$\max_{G_{ij}}\left|\,\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell)}(x,t)\right| < Q^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right| \le \max_{G_{ij}}\left|\,\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right| \quad (44)$$

и

$$\max_{G_{ij}}\left|\,\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell)}(x,t)\right| < \max_{G_{ij}}\left|\,\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right|. \quad (45)$$

Если предположить, что (44), (45) выполняются для некоторого $\ell \ge 0$, то для оценки погрешности ($r + \ell + 1$)-й итерации можно воспользоваться соотношением (35) при соответственных индексах:

$$\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell+1)}(x,t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left((\tilde{L} + 2M\Delta^{-1})\max_{G_{ij}}\left|\,\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell)}(x,t)\right| + \max_G\left|c_{2k2n}\right|\right)dt.$$

С учетом (45) и (44)

$$\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell+1)}(x,t)\right| <$$

$$< \int_{t_0}^{t}\left((\tilde{L} + 2M\Delta^{-1})\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right| + Q\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right|\right)dt,$$

или, в прежнем обозначении,

$$\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell+1)}(x,t)\right| < N\int_{t_0}^{t}\left(\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right|\right)dt. \quad (46)$$

Согласно (41) правая часть (46) не превосходит $\tilde{c}_{kh}\dfrac{(2^{-k}NT)^{L}}{L!}$ при $L = r$. С учетом (43)

$$\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell+1)}(x,t)\right| < \tilde{c}_{kh}\frac{(2^{-k}NT)^{L}}{L!} < \max_G\left|c_{2k2n}\right|Q^{-1}.$$

Отсюда $\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell+1)}(x,t)\right| < Q^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right| \le \max_{G_{ij}}\left|\,\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right|$, и соотношения (44), (45) сохраняются при замене ℓ на $\ell + 1$. В силу индукции и согласно (37)

$$\exists\, r = r(i, j, k, Q, \Delta, \varepsilon_0):\ \max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell)}(x,t)\right| < \varepsilon_0\ \ \forall \ell = 0, 1, \ldots \quad (47)$$

Из изложенного вытекает

Лемма 2. Пусть в (1)–(3) зафиксировано 2^{2k} *подобластей и произвольно выбрана подобласть* G_{ij}. *При условии, что* $\overline{u}_\Delta(x,t)$ *из (33) рассматривается в* G_{ij}, $(x,t) \in G_{ij}$, $(x + \Delta, t) \in G_{\Delta ij}$, *с теми же начальными условиями на границе с* $G_{i(j-1)}$, *с которыми выполняются итерации (32),* $\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t_0) = \overline{u}_\Delta(x,t_0)$, $r = 0, 1, \ldots$, $t_0 = t_0(i, j)$, *последовательность (32) равномерно* $\forall\,(x,t) \in G_{ij}$ *сходится к* $\overline{u}_\Delta(x,t)$. *До тех пор, пока не нарушается соотношение (36), скорость сходимости оценивается из (42). В любом случае имеет место (47).*

Попутно показано, что последовательность ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)$ не выводит из области $\tilde{R}$, как и предполагалось в замечании 1.

Рассматриваемое приближение непрерывно, следовательно, равномерно непрерывно в замкнутой подобласти G_{ij}. Поскольку для (33) и для (32) в G_{ij} выполнено $\overline{u}_\Delta(x,t_0)\big|_{(x,t)\in G_{ij},\, t_0=t_0(i,j)} = {}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\overline{\ell}}(x,t)\Big|_{(x,t)\in G_{i(j-1)},\, t=t_0(i,j)}$, где $\overline{\ell}$ – номер заключительной итерации, выполнявшейся в $G_{i(j-1)}$, то непрерывность и равномерная непрерывность приближения (32) сохраняется при переходе от $G_{i(j-1)}$ к G_{ij} и, таким образом, во всем временном слое $\bigcup_{j=0}^{2^k-1} G_{ij}$ для каждого $i = \mathrm{const}$.

Отсюда вытекает

Следствие 1. Кусочно-интерполяционное приближение решения задачи (30) с итерационным уточнением в каждой подобласти G_{ij} при любом количестве итераций является равномерно-непрерывной функцией. В частности, при $k = 0$ приближение равномерно-непрерывно в G, при $k > 0$ оно кусочно-непрерывно в G и сохраняет равномерную непрерывность в слое подобластей $\bigcup_{j=0}^{2^k-1} G_{ij}$ для каждого $i = \mathrm{const}$.

Для $\forall\varepsilon > 0$ (47) сохранится, если взять $\varepsilon_0 \le 2^{-k-1}\varepsilon$, априори в (29) взять соответственное значение Δ и в (47) указать зависящее от них r:

$$\exists\Delta_1 = \mathrm{const}, \forall\Delta,\ 0<\Delta\le\Delta_1,\ \Delta=\mathrm{const},\ \exists\, r = r(i,j,k,Q,\Delta,\varepsilon):$$
$$\max_{G_{ij}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\ell)}(x,t)\right| < 2^{-k-1}\varepsilon\ \ \forall\ell = 0,1,\ldots \tag{48}$$

Из того, что на выходе из G_{ij} полином ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r+\overline{\ell})}(x,t)$ задает начальные условия $\overline{u}_\Delta(x,t_0) = \varphi_{i\,(j+1)}(x,t_0)$, $t_0 = t_0(i,j+1)$, в $G_{i(j+1)}$, и при этом выполняется (48), вытекает оценка изменения начальных условий при переходе от одной подобласти к другой.

Следствие 2. В условиях леммы 2 $\forall\varepsilon > 0$ найдется $\Delta_1 = \mathrm{const}$, такое что $\forall\Delta$ из (29), $0<\Delta\le\Delta_1$, максимальное отклонение последовательности (32) в G_{ij} от $\overline{u}_\Delta(x,t)$ оценивается из (48). Этого же значения не превысит максимальное отклонение начальных условий в $G_{i(j+1)}$ от тех начальных условий $\varphi_{i\,(j+1)}(x,t_0)$, которые задавались бы при переходе из G_{ij} в $G_{i(j+1)}$ точным решением, взятым с начальными условиями из G_{ij} в виде $\varphi_{ij}(x,t_0) = {}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\overline{\ell}}(x,t)\Big|_{(x,t)\in G_{i(j-1)},\, t=t_0(i,j)}$.

Устойчивость решения задачи (30) сохраняется в каждой подобласти и означает, что $\forall\varepsilon_0 > 0$ $\exists\,\delta > 0$, такое, что если $\left|\tilde{u}_\Delta(x,t_0) - \overline{u}_\Delta(x,t_0)\right| < \delta$, $t_0 = t_0(i,j)$, то $\left|\tilde{u}_\Delta(x,t) - \overline{u}_\Delta(x,t)\right| \le \varepsilon_0$ $\forall\,(x,t)\in G_{ij}$. В качестве невозмущенного решения в G_{ij} рассматривается $\overline{u}_\Delta(x,t)$. Его возмущение – точное (не получающееся вследствие приближения) решение в этой подобласти $\tilde{u}_\Delta(x,t)$, соответственное возмущенным начальным условиям $\tilde{u}_\Delta(x,t_0)$. По следствию 2 максимальное отклонение начальных данных при переходе от G_{ij} к $G_{i(j+1)}$ оценивается из (48). Аналогично, при переходе от $G_{i(j-1)}$ к G_{ij}, где это достигается за счет выбора Δ и r в $G_{i(j-1)}$. Отсюда для $\varepsilon_0 \le 2^{-k-1}\varepsilon$ найдется $\delta > 0$, и такие Δ, r для последовательности (32) в $G_{i(j-1)}$, что выполняются соотношения:

$$\exists\,\Delta_0 = \mathrm{const}, \forall\Delta,\ 0<\Delta\le\Delta_0,\ \Delta=\mathrm{const},\ \exists\,\tilde{r} = r(i,j-1,k,Q,\Delta,\delta):$$
$$\max_{G_{i(j-1)}}\left|\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)\right| \le \delta\ \ \forall r\ge\tilde{r}, \tag{49}$$

и

$$\max_{G_{ij}}\left|\tilde{u}_\Delta(x,t_0) - \overline{u}_\Delta(x,t_0)\right| \le \delta,\ t_0 = t_0(i,j),$$

поэтому, в силу устойчивости,

$$\max_{G_{ij}}\left|\tilde{u}_\Delta(x,t) - \overline{u}_\Delta(x,t)\right| \le 2^{-k-1}\varepsilon. \tag{50}$$

Пусть $\overline{r} = \max(r, \tilde{r})$, $\overline{\Delta} = \min(\Delta_1, \Delta_0)$, где r и Δ_1 из (48), $\tilde{r}$ и Δ_0 из (49). Из (48) и (50)

$$\max_{G_{ij}} \left| \tilde{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\, r}(x,t) \right| \le 2^{-k}\varepsilon \quad \forall r \ge \overline{r},\ \Delta = \text{const},\ 0 < \Delta \le \overline{\Delta}. \tag{51}$$

Поскольку число подобластей 2^{2k} зафиксировано, можно выбрать наименьшее по всем i, j значение $\overline{\Delta} = \Delta_{\min}$, и, при этом значении $\overline{\Delta}$, наибольший по всем i, j номер $r_{\max}$, которые обеспечат выполнение (48), следствия 2, соотношений (49), а также (50), (51) одновременно во всех подобластях G_{ij}:

$$\max_{\forall i,j:\, G_{ij}\in G} \left| \overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\, r}(x,t) \right| \le 2^{-k}\varepsilon \quad \forall r \ge r_{\max},\ \Delta = \text{const},\ 0 < \Delta \le \Delta_{\min}, \tag{52}$$

где $\Delta_{\min} = \Delta_{\min}(k)$, $\Delta_{\min} = \text{const}$, $r_{\max} = \max\limits_{\forall i,j:\, G_{ij}\in G} r(i,j,k,Q,\Delta,\varepsilon)$. Суммой отклонений во всех подобластях слоя $\bigcup\limits_{j=0}^{2^k-1} G_{ij}$, $i = \text{const}$, можно оценить максимальное отклонение кусочно-интерполяционного приближения с итерационным уточнением от точного невозмущенного решения задачи (30) во всем этом слое:

$$\max_{\bigcup\limits_{j=0}^{2^k-1} G_{ij},\ i\in\overline{0,2^k-1}} \left| u_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\, r}(x,t)\ \Big|_{(x,t)\in G_{ij}} \right| \le \sum_{k=0}^{2^k-1} 2^{-k}\varepsilon \quad \forall r \ge r_{\max},\ \Delta = \text{const},\ 0 < \Delta \le \Delta_{\min},$$

или

$$\max_{\bigcup\limits_{j=0}^{2^k-1} G_{ij},\ i\in\overline{0,2^k-1}} \left| u_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\, r}(x,t)\ \Big|_{(x,t)\in G_{ij}} \right| \le \varepsilon \quad \forall r \ge r_{\max},\ \Delta = \text{const},\ 0 < \Delta \le \Delta_{\min}.$$

Согласно выбору максимума в (52), использованному в этих оценках, они сохраняются для любого слоя $\bigcup\limits_{j=0}^{2^k-1} G_{ij}$ с постоянным $i \in \overline{0, 2^k - 1}$ из области G. Отсюда, а также из того, что по построению вспомогательной задачи (30) при любом Δ из (29) $u_\Delta(x,t) \equiv u(x,t)\ \ \forall\ (x,t) \in G_{ij}$, где $u(x, t)$ – решение уравнения (23), вытекает

Лемма 3. В условиях леммы 2 кусочно-интерполяционное приближение с итерационным уточнением (32) решения задачи (30) равномерно сходится в области G к решению u(x, t) задачи (23). При этом

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta_{\min} = \text{const}, \forall\,\Delta,\ 0 < \Delta \le \Delta_{\min},\ \Delta = \text{const},\ \exists\ r_{\max} = \max_{\forall i,j:\, G_{ij}\in G} r(i,j,k,Q,\Delta,\varepsilon):$$

$$\max_{\forall i,j:\, G_{ij}\in G} \left| u(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\, r}(x,t)\ \Big|_{(x,t)\in G_{ij}} \right| < \varepsilon \ \ \forall\, r \ge r_{\max}. \tag{53}$$

Относительно равномерной и кусочной непрерывности последовательных приближений без изменений повторяется утверждение следствия 1, с той оговоркой, что оно относится не только к решению задачи (30), но также и к решению задачи (23).

Замечание 2. Условия и утверждение леммы 3 сохранятся без существенных изменений, если кусочно-интерполяционное приближение решения задачи (30) с итерационным уточнением применить к решению задачи

$$\frac{\partial u_\Delta(x,t)}{\partial t} + a(x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t) - u_\Delta(x,t)}{\Delta} = f(x,t),\ \ u_\Delta(x,0) = \varphi(x), \tag{54}$$

в виде

$$\begin{gathered} {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) = {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t} \left(f(x,t) - a(x,t)\,\frac{{}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x+\Delta,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\Delta} \right) dt + {}^t c_{u2k2n}. \end{gathered} \tag{55}$$

Аналогично предыдущему, доказывается сходимость (55) к решению $u_\Delta(x, t)$ задачи (54), а также приближение этого решения с точностью до $2^{-1}\varepsilon$. Из того, что $\left|u_\Delta(x,t)-u(x,t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left|a(x,t)\right|\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{u(x+\Delta,t)-u(x,t)}{\Delta}\right|dt \;\; \forall\,(x,t)\in G_{ij},\,(x+\Delta,t)\in G_{\Delta ij}$, где $u(x, t)$ – решение задачи (23), с учетом (29), следует $\max\limits_{G}\left|u_\Delta(x,t)-u(x,t)\right| \le MT\varepsilon_0$. При выборе $\varepsilon_0 \le 2^{-1}(MT)^{-1}\varepsilon$ получится $\left|u_\Delta(x,t)-u(x,t)\right| \le 2^{-1}\varepsilon$. В результате (55) будет приближать $u(x, t)$ с точностью до ε.

Тем не менее сходимость (32) к решению задачи (30) означает сходимость непосредственно к решению задачи (23), что используется ниже.

Сходимость основной последовательности к решению линейного уравнения переноса

Для перехода от (32) к (28), в условиях леммы 3 и с учетом (53), предварительно оценивается разность

$$D_{r-1}=\frac{\partial\,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}-\frac{{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\Delta}. \qquad (56)$$

С применением теоремы о среднем,

$$\left|D_{r-1}\right|=\left|\frac{\partial\,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\tilde{\xi}}\right|,\;\; \tilde{\xi}=x+\tilde{\alpha}\Delta,\;\; 0<\left|\tilde{\alpha}\right|<1. \qquad (57)$$

Повторное применение теоремы влечет

$$\left|D_{r-1}\right|=\left|\frac{\partial^2\,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\overline{\gamma}}\right|\times\left|\overline{\Delta x}\right|,\; \left|\overline{\Delta x}\right|<\left|\tilde{\alpha}\right|\Delta,\;\; \overline{\gamma}=x+\overline{\beta}\,\overline{\Delta x},\;\; 0<\left|\overline{\beta}\right|<1. \qquad (58)$$

По построению, $\frac{\partial^2\,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\overline{\gamma}}=\frac{1}{h_x}\frac{\partial\overline{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n(r-1)}(z,w)}{\partial z}\Big|_{x=\overline{\gamma}}$, где z, w из (20), отсюда

$$\left|\frac{\partial^2\,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\overline{\gamma}}\right|\le\max_{G_{ij}}\frac{1}{h_x}\left|\frac{\partial\overline{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n(r-1)}(z,w)}{\partial z}\right|. \qquad (59)$$

Правая часть (59) ограничена в силу следующих причин. Последовательность (32) сходится к решению $u(x, t)$ задачи (23), и выполнено (53). Функция $u(x, t)$ ограничена в G (в G_Δ), в частности в G_{ij}, поэтому при $\forall\, r \ge r_{\max}+1$ значения ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)$ также ограничены в G_{ij}. Поскольку $r_{\max}=\mathrm{const}$, то и вся последовательность ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)$ ограничена в G_{ij} $\forall\; r=1, 2, \ldots$ В G, G_Δ и G_{ij} ограничена функция $f_\Delta(x,u_\Delta,t)$. Как следствие, при замене $u(x+\Delta,t)$, $u(x, t)$ в выражении $f_\Delta(x,u_\Delta,t)-a(x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t)-u_\Delta(x,t)}{\Delta}$ из (30) на полиномы ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t)$, ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)$ последовательность данных выражений останется ограниченной в G_{ij}. Элементы именно этой последовательности интерполируются полиномами $\overline{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n(r-1)}(z,w)$:

$$\overline{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n(r-1)}(z,w)\approx a(x,t)\,\frac{{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\Delta}-f_\Delta(x,{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),t).$$

В процессе итерационного уточнения полином $\overline{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n(r-1)}(z,w)$ не меняет степень и расстояние между узлами, при этом множество всех узловых значений оказывается ограниченным в продолжение всего итерационного процесса. Структура полинома аналогична (7), таким образом, ограничены его коэффициенты. В то же время коэффициенты стоят перед не меняющимися частями полинома, которые непрерывны в G_{ij}.

Отсюда полином $\bar{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n\,(r-1)}(z,w)$ ограничен в G_{ij}. Взятие производной от полинома с рассматриваемыми свойствами сохраняет ограниченность коэффициентов и непрерывность выражения полинома, представляющего производную. В результате $\max\limits_{G_{ij}} \dfrac{1}{h_x}\left|\dfrac{\partial \bar{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n\,(r-1)}(z,w)}{\partial z}\right| \le c_0$, $c_0 = \mathrm{const}$. С учетом $n \le N_0$, $N_0 = \mathrm{const}$, и $k = \mathrm{const}$, $\exists C_0 = \mathrm{const}$: $\max\limits_{G} \dfrac{1}{h_x}\left|\dfrac{\partial \bar{\Psi}^{ij}_{\Delta u\,2k2n\,(r-1)}(z,w)}{\partial z}\right| \le C_0$. Подстановка C_0 в (59), затем в (58), с учетом (57) влечет $|D_{r-1}| \le C_0 \times \Delta$. Отсюда $\forall \varepsilon > 0$ при априорном выборе $\Delta \le \varepsilon C_0^{-1}$ будет выполнено

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta_{\min} = \mathrm{const}, \forall \Delta,\ 0 < \Delta \le \min(\Delta_{\min}, \varepsilon C_0^{-1}),\ \Delta = \mathrm{const},\ \exists\, R_{\max} = \max_{\forall i,j:\, G_{ij} \in G} r(i,j,k,Q,\Delta,\varepsilon):$$

$$\max_G |D_{r-1}| \le \varepsilon \quad \forall r \ge R_{\max}. \qquad (60)$$

Пусть наряду с (32) рассматривается последовательность

$${}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t) = {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n}(x,t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) - a(x,t)\,\frac{\partial\, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\partial x} - c_{u2k2n}\right) dt,\ r = 1, 2, \ldots \qquad (61)$$

Из (33) и (61), при равенстве начальных условий в G_{ij},

$$\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x,\bar{u}_\Delta,t) - f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) - a(x,t)\left(\frac{\bar{u}_\Delta(x+\Delta,t) - \bar{u}_\Delta(x,t)}{\Delta} - \frac{\partial\, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\partial x}\right) - c_{2k2n}\right) dt. \qquad (62)$$

В обозначении $F_{r-1} = f_\Delta(x,\bar{u}_\Delta,t) - f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t)$ (62) эквивалентно

$$\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t) =$$
$$= \int_{t_0}^{t}(F_{r-1} - a(x,t)\Delta^{-1}(\bar{u}_\Delta(x+\Delta,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x+\Delta,t) - (\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t))) + a(x,t)D_{r-1} - c_{2k2n})\,dt,$$

D_{r-1} из (56). Применение условия Липшица к F_{r-1} влечет

$$\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)\right| \le$$
$$\le \int_{t_0}^{t}\left(\tilde{L}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right| + 2M\Delta^{-1}\max_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right| + \left|a(x,t)D_{r-1} - c_{2k2n}\right|\right) dt. \qquad (63)$$

Пусть $\bar{c}_{2k2n} = a(x,t)D_{r-1} - c_{2k2n}$. Согласно (60) $|a(x,t)D_{r-1}| \le M\varepsilon\ \ \forall r \ge R_{\max}$. Если априори выбрать $\forall \varepsilon > 0$ так, чтобы $M\varepsilon \le \max\limits_G |c_{2k2n}|$, то при Δ, $\Delta_{\min}, R_{\max}$ из (60), взятых для данного ε,

$$\max_G |\bar{c}_{2k2n}| \le 2\max_G |c_{2k2n}| \quad \forall r \ge R_{\max}. \qquad (64)$$

В предположении $\Delta \le 1$ из (63) следует $\forall\ (x,t)\in G_{ij}, (x+\Delta,t)\in G_{\Delta\, ij}$:

$$\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left((\tilde{L}+2M\Delta^{-1})\max_{G_{ij}}\left|\ \bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right| + \max_G\left|\bar{c}_{2k2n}\right|\right) dt\,,$$

и

$$\max_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)\right| \le \int_{t_0}^{t}\left((\tilde{L}+2M\Delta^{-1})\max_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)\right| + \max_G\left|\bar{c}_{2k2n}\right|\right) dt\,. \quad (65)$$

Для (65) с точностью до обозначений и постоянных множителей воспроизводятся все рассуждения, преобразования и соотношения от (35) до (53) включительно. С такой оговоркой рассматриваемые преобразования инвариантны относительно Δ, выбранного в (60) и, соответственно, в (64). В (64) предполагалось $\varepsilon \le M^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right|$, $\Delta \le \varepsilon C_0^{-1}$, или, $\Delta \le C_0^{-1}M^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right|$. С этим ограничением получится, –

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\Delta_{\min} = \text{const}, \forall\,\Delta,\ 0<\Delta\le\min\left(\Delta_{\min},\ C_0^{-1}M^{-1}\max_G\left|c_{2k2n}\right|\right),$$

$$\Delta = \text{const},\ \exists\ R_{\max} = \max_{\forall i,j:\,G_{ij}\in G} r(i,j,k,Q,\Delta,\varepsilon):$$

$$\max_{\forall i,j:\,G_{ij}\in G}\left|\ u_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)\ \Big|_{(x,t)\in G_{ij}}\ \right| \le \varepsilon\ \ \forall\, r\ge R_{\max}\,, \quad (66)$$

где ${}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)$ из (61), $u_\Delta(x,t)$ – решение задачи (30). Поскольку $u_\Delta(x,t)\equiv u(x,t)\ \ \forall\,(x,t)\in G$, последовательность (61) с оценкой (66) приближает решение задачи (23). По сравнению с (40)–(53) изменится коэффициент в аналоге (40). Именно, при выполнении оценки ε_{k0} с учетом (64) получится $\varepsilon_{k0} = \max_{G_{ij}}\left|\varphi_{ij}(x,t_0) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n0}(x,t_0)\right| \le 2\max_{G_{ij}}\left|{}^tc_{u2k2n}\right|$. Соответственно, $\tilde{C}$ потребуется заменить на $2\tilde{C}$. Если обозначить $\tilde{c}_{kh} = 2\tilde{C}2^{-k(2n+2)}h^{2n+1}$, то вид дальнейших оценок сохранится. Таким образом, имеет место

Лемма 4. В условиях леммы 2 кусочно-интерполяционное приближение с итерационным уточнением вида (61) решения задачи (30) равномерно сходится в области G к решению u(x, t) задачи (23). При этом $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется соотношение (66), где $u_\Delta(x,t)\equiv u(x,t)\ \ \forall\,(x,t)\in G$. Относительно равномерной и кусочной непрерывности последовательных приближений (61) без изменений повторяется утверждение леммы 3.

В (61), в силу леммы 4, для Δ из (66) $f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) \to f_\Delta(x,u(x,t),t)$, $r\to\infty$, и

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, r_\Delta:\ \left|\ f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) - f_\Delta(x,u(x,t),t)\right| \le 2^{-2}\varepsilon\ \ \forall\, r\ge r_\Delta\,. \quad (67)$$

С другой стороны, из (23), (30) и (29) следует

$$\exists\Delta_\varepsilon,\ \Delta_\varepsilon = \text{const},\ \forall\Delta,\ 0<\Delta\le\Delta_\varepsilon,\ \Delta = \text{const}: \left|\ f_\Delta(x,u,t) - f(x,t)\right| \le 2^{-2}\varepsilon\,. \quad (68)$$

Пусть рассматривается аналог последовательности (61), получаемый заменой в (61) $f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t)$ на $f(x,t) + f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) - f(x,t)$, при этом разность $f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) - f(x,t)$ присоединяется к остаточному члену $-c_{u2k2n}$ и в сумме образует новый остаточный член $-\tilde{c}_{u2k2n}$. Из (67), (68) $\left|\ f_\Delta(x, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),t) - f(x,t)\right| \le 2^{-1}\varepsilon$ при условии $\Delta\le\Delta_\varepsilon$ и $r\ge r_\Delta$. В предположении $2^{-1}\varepsilon \le \max_G\left|c_{2k2n}\right|$, получится $\max_G\left|\tilde{c}_{2k2n}\right| \le 2\max_G\left|c_{2k2n}\right|$. В результате,

$${}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t) = {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n}(x,t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(f(x,t) - a(x,t)\,\frac{\partial\, {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\partial x} - \tilde{c}_{u2k2n}\right) dt,\ r = 1, 2, \ldots, \quad (69)$$

где

$$\max_G\left|\tilde{c}_{2k2n}\right| \le 2\max_G\left|c_{2k2n}\right|,\ \Delta = \text{const},\ 0<\Delta\le\Delta_\varepsilon,\ r\ge r_\Delta\,. \quad (70)$$

Из (33) и (69), при условии равенства начальных условий в G_{ij},

$$\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(f_\Delta(x,\overline{u}_\Delta,t) - f(x,t) - a(x,t)\left(\frac{\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t) - \overline{u}_\Delta(x,t)}{\Delta} - \frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x} \right) - \tilde{c}_{2k2n} \right) dt,$$

или

$$\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) = \int_{t_0}^{t} \left(-a(x,t)\left(\frac{\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t) - \overline{u}_\Delta(x,t)}{\Delta} - \frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x} \right) - \tilde{c}^{(0)}_{2k2n} \right) dt, \quad (71)$$

где $\tilde{c}^{(0)}_{2k2n} = f_\Delta(x,\overline{u}_\Delta,t) - f(x,t) - \tilde{c}_{2k2n}$ – новый остаточный член. При этом согласно (70) и (68), с учетом предположения $2^{-1}\varepsilon \le \max_G \left| c_{2k2n} \right|$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \varepsilon \le 2\max_G \left| c_{2k2n} \right|,\ \exists \tilde{\Delta}_\varepsilon = \text{const}:\ \forall \Delta,\ 0 < \Delta \le \tilde{\Delta}_\varepsilon,\ \Delta = \text{const},\ \exists\, \tilde{r}_\Delta:$$

$$\max_G \left| \tilde{c}^{(0)}_{2k2n} \right| \le 2.5\max_G \left| c_{2k2n} \right| \ \ \forall r \ge \tilde{r}_\Delta. \quad (72)$$

Тождественное преобразование (71) с учетом (56) влечет

$$\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(-a(x,t)\left(\frac{\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t) - \overline{u}_\Delta(x,t)}{\Delta} - D_{r-1} - \frac{{}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\Delta} \right) - \tilde{c}^{(0)}_{2k2n} \right) dt$$

или

$$\overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} (-a(x,t)\Delta^{-1}(\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t) - \overline{u}_\Delta(x,t) - ({}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t))) + \overline{c}_{2k2n})\,dt,$$

где $\overline{c}_{2k2n} = a(x,t)D_{r-1} - \tilde{c}^{(0)}_{2k2n}$. Ввиду $\left| a(x,t)D_{r-1} \right| \le M\varepsilon \ \ \forall r \ge R_{\max}$, в предположении $M\varepsilon \le \left| \tilde{c}^{(0)}_{2k2n} \right|$, будет выполняться $\max_G \left| \overline{c}_{2k2n} \right| \le 3.5\max_G \left| c_{2k2n} \right|$. Аналогично предыдущему, предположение относительно ε повлечет изменение ограничений Δ и r. Именно, с учетом (72),

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \varepsilon \le M^{-1} \left| \tilde{c}^{(0)}_{2k2n} \right|,$$

$$\exists \overline{\Delta}_\varepsilon = \text{const},\ 0 < \overline{\Delta}_\varepsilon \le \min\left(\Delta_\varepsilon,\ \tilde{\Delta}_\varepsilon,\ \Delta_{\min},\ C_0^{-1}M^{-1}\max_G \left| c_{2k2n} \right| \right):\ \forall \Delta,\ 0 < \Delta \le \overline{\Delta}_\varepsilon,\ \Delta = \text{const},$$

$$\exists \overline{r}_\Delta,\ \overline{r}_\Delta \ge \max(r_\Delta, \tilde{r}_\Delta, R_{\max}),\ \text{такие, что}\ \forall r \ge \overline{r}_\Delta\ \text{выполняется}$$

$$\forall\,(x,t) \in G_{ij}, (x+\Delta,t) \in G_{\Delta ij}:\ \left| \overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) \right| \le 2M\Delta^{-1} \int_{t_0}^{t} \left(\max_{G_{ij}} \left| \overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t) \right| + \overline{c}_{2k2n} \right) dt,$$

и, в тех же условиях,

$$\max_{G_{ij}} \left| \overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t) \right| \le 2M\Delta^{-1} \int_{t_0}^{t} \left(\max_{G_{ij}} \left| \overline{u}_\Delta(x,t) - {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t) \right| + \overline{c}_{2k2n} \right) dt.$$

Остается повторить проделанные ранее рассуждения, чтобы с точностью до обозначений, значений констант и постоянных множителей вывести аналог соотношения (66), в котором $u_\Delta(x,t) \equiv u(x,t)\ \ \forall\,(x,t) \in G$ из (23), ${}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)$ из (69) с точностью до обозначения совпадает с ${}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)$ из (28). Отсюда рассуждения, проделанные с данными видоизменениями для ${}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)$ из (69) и $u_\Delta(x, t)$ из (30), сохраняются для ${}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)$ из (28) и $u(x, t)$ из (23). Сохраняются также описанные выше ограничения значений констант. Однако они дополнительно скорректируются при введении аналога соотношений (36), (37) путем выбора Q для нового остаточного члена $\overline{c}_{2k2n}$. Чтобы не усложнять обозначений, ниже данные ограничения неявно подразумеваются, но не детализируются. С этой оговоркой, в условиях леммы 2, выполняется соотношение

$$\forall\,\varepsilon>0\;\;\exists r_{\Delta\varepsilon}:\;\max_{\forall\,(x,t)\in G_{ij},\forall i,j:\,G_{ij}\in G}\left|\,u(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)\,\Big|_{(x,t)\in G_{ij}}\right|\le\varepsilon\;\;\forall r\ge r_{\Delta\varepsilon}, \tag{73}$$

где $u(x, t)$ – решение уравнения (23), ${}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)$ из (28); по построению $r_{\Delta\varepsilon}$ зависит от ε, Δ и $\Delta_{\varepsilon 0}=\text{const}$: $\forall\Delta,\,0<\Delta\le\Delta_{\varepsilon 0}$, $\Delta=\text{const}$, Δ из (29); $\Delta_{\varepsilon 0}$ существует в качестве параметра условий сходимости (69), на основе которых доказывается сходимость (28).

Имеет место

Теорема 2. Пусть в области G из (1)–(3) зафиксировано 2^{2k} подобластей. Пусть в каждой подобласти G_{ij} уравнение (24) рассматривается с теми же начальными условиями на границе с $G_{i(j-1)}$, с которыми выполняются итерации (28), при этом они сохраняются с изменением номера итерации: $\overline{u}(x,t_0)=\varphi_{ij}(x,t_0)$, ${}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t_0)=\varphi_{ij}(x,t_0)$, $r=0,1,\ldots,$ $t_0=t_0(i,j)$. *Тогда кусочно-интерполяционное приближение с итерационным уточнением (28) решения задачи (23) равномерно сходится в G к решению u(x, t) с оценкой (73). Относительно равномерной и кусочной непрерывности последовательных приближений (28) без принципиальных изменений формулируется аналог утверждения леммы 4, данного относительно приближений (61).*

Приближение частных производных

Пусть выполнены условия леммы 2 и теоремы 2. Тогда

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\,{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)}{\partial x}\right|\le a_1+a_2+a_3,$$

где

$$a_1=\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{u(x+\Delta,t)-u(x,t)}{\Delta}\right|,$$

$$a_2=\left|\frac{u(x+\Delta,t)-u(x,t)}{\Delta}-\frac{{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)}{\Delta}\right|,$$

$$a_3=\left|\frac{{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)}{\Delta}-\frac{\partial\,{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)}{\partial x}\right|.$$

Слагаемое a_1 оценивается из (29), для оценки a_3 можно повторить рассуждения, проделанные для (56)–(60). При этом $\Delta=\text{const}$ можно считать столь малым, что $a_1\le 3^{-1}\varepsilon_0$ и $a_3\le 3^{-1}\varepsilon_0$. Кроме того, $a_2\le 2\Delta^{-1}\max\limits_{\forall\,(x,t)\in G_{ij}}\left|u(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)\right|$. В (73) для такого Δ ничто не исключает $\varepsilon\le 6^{-1}\Delta\,\varepsilon_0$, при необходимости можно указать соответственные Δ_ε и $r_{\Delta\varepsilon}$. Тогда $a_2\le 3^{-1}\varepsilon_0$. В неравенствах можно перейти к максимуму по $\forall\,i,j:G_{ij}\in G$. В результате

$$\forall\,\varepsilon_0>0\;\;\exists\,\Delta_{\varepsilon_0}=\text{const},\;\exists r_{\Delta\varepsilon_0}:\;\max_{\forall\,(x,t)\in G_{ij},\forall i,j:\,G_{ij}\in G}\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-\frac{\partial\,{}^{t}\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)}{\partial x}\;\Big|_{(x,t)\in G_{ij}}\right|\le\varepsilon_0\;\;\forall r\ge r_{\Delta\varepsilon_0}. \tag{74}$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ приближается с оценкой, зависящей от размера подобласти. Из (23) и (69) $\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)}{\partial t}\right|\le M\left|\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)}{\partial x}\right|+c\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}$, $r=1,2,\dots$, где учитывается (70) и $c=2C$. С подстановкой (74), $\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)}{\partial t}\right|\le M\,\varepsilon_0+c\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1}\quad \forall r\ge r_{\Delta\varepsilon_0}$.

Здесь и в (74) вместо ε_0 можно взять $\min(\varepsilon_0, M^{-1}\varepsilon_0)$, соответственно скорректировав Δ_{ε_0} и $r_{\Delta\varepsilon_0}$. Тогда

$$\forall\varepsilon_0>0\ \exists\,\Delta_{\varepsilon_0}=\text{const}\,,\ \exists r_{\Delta\varepsilon_0}:\ \max_{\forall\,(x,t)\in G_{ij},\forall i,j:\,G_{ij}\in G}\left|\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)}{\partial t}\right|\le\varepsilon_0+c\,2^{-k(2n+1)}h^{2n+1},$$
$$c=\text{const},\ \forall r\ge r_{\Delta\varepsilon_0}.$$

Случай квазилинейного уравнения переноса

Пусть рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(u,x,t)\,\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,t),\ \ u(x,0)=\varphi(x)\,, \tag{75}$$

где принимается, что $f(x, t)$ – заданная функция в области $\{(x,t)\,|\,x\in R,\,t\ge 0\}$, $\varphi(x)$ – заданная функция $x\in R$, $a(u, x, t)$ – функция, заданная в области $\{\,|u(x,t)-u(x,0)|\le\tilde B;\,(x,t)\,|\,x\in R,\,t\ge 0\}$, $\tilde B$ – некоторая постоянная, выбор которой оговаривается аналогично условию I. Изложенный выше метод рассматривается в предположениях I–III, с тем изменением, что $a(u, x, t)$ задана в области $\tilde R_u=\{\,|u(x,t)-u(x,0)|\le\tilde B;\,(x,t)\in G\}$, и относительно (75) приняты все предположения, сделанные относительно (23). Из (75)

$$u(x,t)=u(x,t_0)+\int_{t_0}^{t} f(x,t)-a(u,x,t)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\,dt,\ \ u(x,0)=\varphi(x)\,.$$

Аналогично предыдущему, определяются последовательности

$$\overline{\Psi}^{\,ij}_{\partial u\ 2k2n\,(r-1)}(z,w)=f(x,t)-a({}^t\overline{P}_{u2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\,\frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\partial x}+c_{2k2n}\,,$$

$${}^t\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)={}^t\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t_0)+\int_{t_0}^{t}\overline{\Psi}^{\,ij}_{\partial u\ 2k2n\,(r-1)}(z,w)\ dt+{}^tc_{u2k2n}\,,$$

где z, w из (20). Отсюда,

$${}^t\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t)={}^t\overline{P}_{u2k2n\,r}(x,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(f(x,t)-a({}^t\overline{P}_{u2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\,\frac{\partial\, {}^t\overline{P}_{u2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\partial x}\right)dt+{}^tc_{u2k2n}\,.$$

Рассматривается вспомогательная задача

$$\frac{\partial u_\Delta}{\partial t}+a(u,x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t)-u_\Delta(x,t)}{\Delta}=f_\Delta(x,t),\ \ u_\Delta(x,0)=\varphi(x), \tag{76}$$

где

$$(x,t)\in G,\,(x+\Delta,t)\in G_\Delta,\,f_\Delta(x,t)=f(x,t)-a(u,x,t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{u(x+\Delta,t)-u(x,t)}{\Delta}\right),\,u_\Delta(x,t)\equiv u(x,t)$$

из (75) $\forall\,(x,t)\in G$, $\Delta=\text{const}$ произвольно выбрано в соответствии с (29). В G_{ij} при $t_0=t_0(i,j)$ (75) преобразуется к виду

$$u_\Delta(x,t)=u_\Delta(x,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x,t)-a(u,x,t)\,\frac{u_\Delta(x+\Delta,t)-u_\Delta(x,t)}{\Delta}\right)dt,\; u_\Delta(x,t_0)=\varphi_{ij}(x), \qquad (77)$$

где $(x,t)\in G_{ij}$, $(x+\Delta,t)\in G_{\Delta ij}$. Строится последовательность

$$^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)=$$
$$={}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(f_\Delta(x,t)-a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\frac{{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\Delta}\right)dt+{}^{t}c_{u2k2n}. \qquad (78)$$

Пусть в (77) и (78) начальные условия одинаковы: $\overline{u}_\Delta(x,t_0)={}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t_0)$, $r=0,1,\ldots$, $t_0=t_0(i,j)$, решение $\overline{u}_\Delta(x,t)$ отмечается чертой. Тогда

$$\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,r}(x,t)=$$
$$=\int_{t_0}^{t}\left(-a(\overline{u}_\Delta,x,t)\frac{\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t)-\overline{u}_\Delta(x,t)}{\Delta}+a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\frac{{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)}{\Delta}\right)dt+{}^{t}c_{u2k2n}. \qquad (79)$$

Выражение под знаком интеграла преобразуется в сумму A_1+A_2, где

$$A_1=\Delta^{-1}(a(\overline{u}_\Delta,x,t)\,\overline{u}_\Delta(x,t)-a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\;{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)),$$

$$A_2=\Delta^{-1}(-a(\overline{u}_\Delta,x,t)\,\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t)+a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),x,t)\;{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t)).$$

В A_1 можно добавить и вычесть $\Delta^{-1}a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\overline{u}_\Delta(x,t)$. Отсюда

$$|A_1|\le\Delta^{-1}(|\overline{u}_\Delta(x,t)|\,|a(\overline{u}_\Delta,x,t)-a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)|+$$
$$+|a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)|\,|\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)|).$$

Учитывая аналог замечания 1, можно применить условие Липшица к функции $a(\overline{u}_\Delta,x,t)$:

$$|A_1|\le\Delta^{-1}(\tilde{L}|\overline{u}_\Delta(x,t)|\,|\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)|+$$
$$+|a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)|\,|\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)|),$$
$$\tilde{L}=\text{const}.$$

В результате $|A_1|\le\Delta^{-1}(\overline{c}\,\tilde{L}|\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)|+\tilde{M}|\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)|)$, где $\overline{c}=\max_G|\overline{u}_\Delta(x,t)|$, $\overline{c}=\text{const}$, $\tilde{M}=\max_G|a(\overline{u},x,t)|$, $\tilde{M}=\text{const}$. Отсюда

$$|A_1|\le\tilde{c}\max_{G_{ij}}|\overline{u}_\Delta(x,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t)|,\ \tilde{c}=2\Delta^{-1}\max(\overline{c}\tilde{L},\tilde{M}),\ \tilde{c}=\text{const}.$$

В A_2 можно добавить и вычесть $\Delta^{-1}a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\,\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t)$. Тогда

$$|A_2|\le\Delta^{-1}(|-a(\overline{u}_\Delta,x,t)\,\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t)+a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)\,\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t)|+$$
$$+|a({}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x,t),x,t)|\,|\overline{u}_\Delta(x+\Delta,t)-{}^{t}\overline{P}_{u_\Delta 2k2n\,(r-1)}(x+\Delta,t)|).$$

С применением условия Липшица,

$$\left| A_2 \right| \le \Delta^{-1}(\tilde{L}\left|\bar{u}_\Delta(x+\Delta,t)\right|\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| +$$
$$+\left|a({}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),x,t)\right|\left|\bar{u}_\Delta(x+\Delta,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x+\Delta,t)\right|).$$

Как и выше, $\left| A_2 \right| \le \tilde{c} \times \max\limits_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right|$, $\tilde{c} = 2\Delta^{-1}\max(\bar{c}\,\tilde{L},\,\tilde{M})$, $\tilde{c} = \mathrm{const}$.

Отсюда и из (79) $\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)\right| \le \int\limits_{t_0}^{t}\left(2\tilde{c}\max\limits_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| + \left|c_{2k2n}\right|\right)dt$.
Ввиду произвольности $(x,t)\in G_{ij}$,

$$\max_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2nr}(x,t)\right| \le \int\limits_{t_0}^{t}\left(2\tilde{c}\max_{G_{ij}}\left|\bar{u}_\Delta(x,t) - {}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t)\right| + \left|c_{2k2n}\right|\right)dt. \quad (80)$$

На основе (80) можно рассматривать преобразования, аналогичные выполненным для линейного уравнения, включая (36), (40), а также переход от (30) к (23), в данном случае – от (76) к (75).

Если в (75) вместо $f(x, t)$ рассматривать $f(u, x, t)$, то в (79) в качестве слагаемого под знаком интеграла появится разность $f_\Delta(\bar{u},x,t) - f_\Delta({}^t\bar{P}_{u_\Delta 2k2n(r-1)}(x,t),x,t)$, модуль которой оценивается по условию Липшица. Это изменит значение константы в (80), но не исключает оценку сходимости метода.

Численный эксперимент

Изложенный метод реализован программно, код программы дан в [6]. Реализация содержит отклонения от исходного описания. Именно, не использован переход к описанному треугольнику области G. Интерполирование выполняется на основе (7) с переводом в форму (9) без удвоения степени полинома. Аналог (28) $\Psi^{ij}_{\partial u\,2kn(r-1)}(z,w) \approx f(x,t) - a(x,t)\dfrac{\partial\,{}^tP_{u2kn(r-1)}(x,t)}{\partial x}$,
${}^tP_{u2knr}(x,t) = {}^tP_{u2knr}(x,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t}\Psi^{ij}_{\partial u\,2kn(r-1)}(z,w)\;dt$, служит для итерационного уточнения, коэффициенты преобразуются с учетом (20)–(22). Интерполяция с итерационным уточнением выполняется в G, кроме того, в области, получающейся сдвигом G вдоль OX влево (G^{left}) на половину длины катета треугольника, образованного узлами интерполяции. Этот же процесс выполняется в области, полученной аналогичным сдвигом G вправо (G^{right}). Для приближения решения в G выбираются полиномы из третьей слева направо четверти области G^{left} (ниже они обозначаются ${}^tP^{left}_{un}(x,t)$) и первой слева направо четверти области G^{right} (ниже ${}^tP^{right}_{un}(x,t)$), а также из промежуточной между ними половины области G (ниже ${}^tP_{un}(x,t)$). Этим исключаются наименее точные приближения вдоль сторон треугольника, образованного узлами интерполяции. Полный процесс приближения со сдвигами вдоль оси OX циклически повторяется со сдвигом по вертикали вдоль оси OT. Окончательные полиномиальные приближения выбираются из десятой части, отсчитанной от нижнего основания вертикально сдвигаемой прямоугольной области («нижний прямоугольный слой»), что устойчиво повышает точность приближения. В процессе смещения вдоль OT полученные на верхней границе текущего нижнего прямоугольного слоя приближения решения принимаются за начальные условия для следующего за ним временного слоя. Контроль точности привязан к текущему нижнему прямоугольному слою. Степень полинома выбирается на основе минимизации аналога невязки (ниже просто невязки) специального вида. Невязка

$$S_n = \left| s_n - s_{n-1} \right|$$

определяется из соотношений

$$s_n = \int\limits_a^{x_1}dx\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP^{left}_{un}(x,t)\,dt + \int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP_{un}(x,t)\,dt + \int\limits_{x_2}^{b}dx\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP^{right}_{un}(x,t)\,dt\,,$$

$$s_{n-1}=\int_a^{x_1}dx\int_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP_{u(n-1)}^{left}(x,t)\,dt+\int_{x_1}^{x_2}dx\int_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP_{u(n-1)}(x,t)\,dt+\int_{x_2}^{b}dx\int_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP_{u(n-1)}^{right}(x,t)\,dt\ ,$$

и вычисляется в текущем (k-м) нижнем прямоугольном слое. Здесь x_i – соответственные границы сдвигов вдоль OX, t_k, t_{k+1} – временные границы k-го нижнего прямоугольного слоя. Геометрически невязка представляет разность объемов параллелепипедов, ограниченных криволинейными поверхностями, которые задаются кусочно-интерполяционными приближениями решения $u(x,\ t)$ посредством полиномов степени n и $n-1$ соответственно. Сходная форма невязки используется при выборе числа итераций r, для каждой разновидности полиномов ${}^tP_{un}^{left}(x,t)$, ${}^tP_{un}^{right}(x,t)$ и ${}^tP_{un}(x,t)$ это число выбирается отдельно. Для ${}^tP_{un}(x,t)$ вычисляется $I_r=\left|i_r-i_{r-1}\right|$, $r=\overline{r_{\min},r_{\max}}$, где $i_r=\int_a^b dx\int_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP_{u\,n\,r}(x,t)\,dt$, $i_{r-1}=\int_a^b dx\int_{t_k}^{t_{k+1}}{}^tP_{u\,n\,(r-1)}(x,t)\,dt$. Аналогичные вычисления выполняются для ${}^tP_{un}^{left}(x,t)$ и ${}^tP_{un}^{right}(x,t)$. Фиксируются значения n и r, при которых S_n и I_r принимают наименьшие значения.

Эксперимент составляют примеры задач, имеющих точные решения, сравнением с ними определяется погрешность приближенных решений.

Пример 1. Задача Коши

$$u'_t+u'_x=0,\ \ u(x,\,0)=\sin(x)\,, \tag{81}$$

точное решение $u(x,t)=\sin(x-t)$, рассматривается как модель для сравнения численных методов [10]. Ее приближенное решение ниже дано в $G=\{\,(x,\,t)\,|\,x\in[0,\,1],\,t\in[0,\,1]\,\}$. В табл. 1 приводятся значения абсолютной погрешности кусочно-интерполяционного решения с итерационным уточнением (здесь и ниже – реализация в Delphi, тип данных extended) в 10 равномерно распределенных точках на отрезке $x\in[0,\,1]$ при значениях t = 0,1 и t = 1,0 (степень интерполяционного полинома n = 13, число итераций – r = 50, область G не делится на подобласти). В первом столбце таблицы – время решения на персональном компьютере (для сравниваемых методов время на том же компьютере дано в табл. 3, 4).

Таблица 1

Абсолютная погрешность приближенного решения задачи (81)

11 s	$h_x\approx 0.08$	$h_t\approx 0.04$	t = 0.1	4.7×10^{-20}	2.7×10^{-20}	9.5×10^{-20}	…	2.2×10^{-19}	1.1×10^{-19}
			t = 1.0	1.6×10^{-19}	6.5×10^{-19}	7.6×10^{-19}	…	6.8×10^{-21}	3.0×10^{-19}

Пример 2. Задача Коши

$$u'_t+e^{-t}u'_x=e^tx,\ \ \ u(x,0)=x+1+\sin(x+1) \tag{82}$$

имеет решение $u(x,t)=e^tx+1-t+\sin(x+e^{-t})$. Приближенное решение построено в квадрате G из примера 1. Табл. 2 содержит абсолютную погрешность предложенного метода в точках, распределенных как в примере 1 (n = 13, r = 25,число подобластей G_{ij} равно 4).

Таблица 2

Абсолютная погрешность приближенного решения задачи (82)

23 s	$h_x\approx 0.04$	$h_t\approx 0.02$	t = 0.1	5.4×10^{-19}	0.0	2.2×10^{-19}	…	4.3×10^{-19}	0.0
			t = 1.0	1.8×10^{-18}	3.3×10^{-19}	9.8×10^{-19}	…	6.5×10^{-19}	5.6×10^{-18}

В системах компьютерной математики решение рассматриваемых уравнений опирается на граничные условия. Для единства условий сравнения ниже даны решения начально-краевых задач в системах MathCAD, Maple и предложенным методом без его принципиальных изменений. В табл. 3, 4 строка (1) соответствует предложенному методу, (2) – функции pdesolve программы MathCAD (выбор разностного метода отвечает наилучшему приближению), (3) – pdsolve программы Maple. Соотношение шагов удовлетворяет условию сходимости метода сеток для уравнений гиперболического типа.

Пример 3. Рассматривается начально-краевая задача

$$u'_t + u'_x = 3\cos(x+2t)\,,\ u(x,\,0) = \sin(x)\,,\ u(0,\,t) = \sin(2t)\,. \tag{83}$$

Погрешность ее решения в области из примера 1 сравнивается в 10 равномерно распределенных точках на отрезке $x \in [0,\,1]$ при значении $t = 1$. В предложенном методе $n = 13$, $r = 20$, область G не делится на подобласти.

Таблица 3

Абсолютная погрешность приближенного решения задачи (83)

(1)	4 *s*	$h_x \approx 8.0\times10^{-2}$	$h_t \approx 4.0\times10^{-2}$	1.1×10^{-19}	1.1×10^{-19}	5.4×10^{-19}	…	5.8×10^{-19}	4.1×10^{-20}
(2)	14 *s*	$h_x \approx 3.3\times10^{-4}$	$h_t \approx 1.7\times10^{-4}$	6.1×10^{-7}	4.0×10^{-8}	6.6×10^{-8}	…	1.3×10^{-8}	2.2×10^{-7}
(3)	4 min 27 *s*	$h_x = 8.0\times10^{-5}$	$h_t = 4.0\times10^{-5}$	1.2×10^{-10}	2.0×10^{-10}	2.6×10^{-10}	…	4.2×10^{-11}	1.5×10^{-10}

Пример 4. В [11] рассматривается нелинейная краевая задача

$$A_2\frac{\partial u}{\partial t} + A_1\frac{\partial u^{m+1}}{\partial x} = A_3 u^k + A_4 e^{A_5 u} + E(x,t)\,,\ u(x,0) = e^{x/b}\,,\ u(0,\,t) = e^t\,. \tag{84}$$

Если решение взято в виде e^{t+y}, $y = x/b$, то источник E принимает вид

$$E(x,t) = e^{t+y}(A_2 + A_1 b^{-1}(m+1)e^{m(t+y)}) - A_3 e^{k(t+y)} - A_4 e^{A_5 e^{t+y}}\,.$$

В качестве опорных согласно [11] взяты значения: $m = 0$, $A_1 = A_2 = 1$, $A_4 = A_5 = 0$ и $b = 1$. В табл. 4 приводится погрешность приближенного решения при различных значениях параметров k и A_3 (первая строка таблицы) в 10 равномерно распределенных точках из примера 3. Остальные обозначения соответствуют табл. 3. В предложенном методе $n = 13$, $r = 20$, $r = 35$, $r = 40$ соответственно параметрам данных задач, деление G на подобласти не выполнялось.

Таблица 4

Абсолютная погрешность приближенного решения задачи (84)

$k = 1, A_3 = 0$									
(1)	4 *s*	$h_x \approx 8.0\times10^{-2}$	$h_t \approx 4.0\times10^{-2}$	0.0	1.5×10^{-18}	8.7×10^{-19}	…	0.0	1.7×10^{-18}
(2)	24 *s*	$h_x = 2.5\times10^{-4}$	$h_t = 1.25\times10^{-4}$	3.7×10^{-7}	1.4×10^{-6}	1.8×10^{-7}	…	1.5×10^{-7}	3.3×10^{-7}
(3)	4 min 37 *s*	$h_x = 8.0\times10^{-5}$	$h_t = 4.0\times10^{-5}$	3.6×10^{-10}	7.3×10^{-10}	1.1×10^{-9}	…	3.7×10^{-9}	4.3×10^{-9}

$k = 1, A_3 = -1$									
(1)	10 *s*	$h_x \approx 8.0\times10^{-2}$	$h_t \approx 4.0\times10^{-2}$	1.5×10^{-18}	1.1×10^{-18}	8.7×10^{-19}	…	2.2×10^{-18}	0.0
(2)	25 *s*	$h_x = 2.5\times10^{-4}$	$h_t = 1.25\times10^{-4}$	1.1×10^{-6}	9.9×10^{-7}	1.8×10^{-7}	…	5.0×10^{-7}	4.8×10^{-7}
(3)	4 min 44 *s*	$h_x = 8.0\times10^{-5}$	$h_t = 4.0\times10^{-5}$	6.1×10^{-10}	1.2×10^{-9}	1.7×10^{-9}	…	4.9×10^{-9}	5.5×10^{-9}

$k = 2, A_3 = -1$									
(1)	16 *s*	$h_x \approx 8.0\times10^{-2}$	$h_t \approx 4.0\times10^{-2}$	6.5×10^{-19}	4.3×10^{-19}	8.7×10^{-19}	…	5.2×10^{-18}	3.5×10^{-18}
(2)	1 min 47 *s*	$h_x = 2.5\times10^{-4}$	$h_t = 1.25\times10^{-4}$	5.8×10^{-7}	8.6×10^{-7}	6.1×10^{-7}	…	9.9×10^{-7}	1.0×10^{-6}
(3)	51 min 14 *s*	$h_x = 8.0\times10^{-5}$	$h_t = 4.0\times10^{-5}$	1.4×10^{-9}	2.4×10^{-9}	3.0×10^{-9}	…	6.4×10^{-9}	7.1×10^{-9}

В [11] приводится относительная погрешность 2,21 % при $t = 1$. Предложенный метод в этом случае дает 2.02×10^{-16} %.

Пример 5. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,10)\cup(30,+\infty),\\ u_0(x), & x\in[10,30],\end{cases}$$

где $u_0(x)=2^{-1}-2^{-1}\cos(10^{-1}\pi(x-10))$. Точное решение имеет вид [2]:

$$u(x,t)=\begin{cases}0, & (x-t<10)\vee(x-t>30),\\ u_0(x-t), & 10\le x-t\le 30.\end{cases}$$

Область приближения

$$G=\{(x,t)\mid x\in[0,40],\, t\in[0,1]\}.$$

В точке с абсциссой $x=21$, соответствующей пику волны при $t=1$, абсолютная погрешность рекурсивной 5-точечной разностной схемы MathCAD составляет $1{,}37\times10^{-5}$, предложенный метод в этой точке даст $2{,}71\times10^{-19}$. Кусочная непрерывность приближения позволяет сравнительно адекватно отразить характер изменения решения в окрестности амплитуды. В начале и в конце волны погрешность можно снизить, окружив эти точки узкой областью с большим количеством подобластей. Так, в точке $x = 11{,}2$, соответствующей окрестности начала волны при $t = 1$, абсолютная погрешность составит $6{,}59\times10^{-14}$.

В аналогичных исследованиях точность данных численных экспериментов, как правило, не превосходят точность в строках 2, 3 табл. 3, 4. Так, в [12] строится решение гиперболического уравнения второго порядка с помощью полиномов Тейлора от двух переменных. Абсолютная погрешность этого метода в квадрате из примера 1 при $t = 0$ составляет $3{,}97\times10^{-21}$, но с ростом t растет до $7{,}61\times10^{-9}$. В [13] эта же задача решается на основе кубической тригонометрической сплайн-интерполяции. В $G=\{(x,t)\mid x\in[0,2\pi],\, t\in[0,3]\}$ абсолютная погрешность приближения не ниже $5{,}43\times10^{-7}$. В [14] строится кусочно-интерполяционное решение уравнения переноса с помощью кубической B-сплайн квазиинтерполяции, ее абсолютная погрешность в квадрате из примера 1 не ниже $3{,}01\times10^{-10}$ при $t = 1$.

Сравнительная точность предложенного метода достигается за счет итерационного уточнения (не применяемого в работах, с которыми проводилось сравнение). Его реализация опирается на аналитический вид первообразной и производной от интерполяционного полинома, преобразованного в форму алгебраического полинома с числовыми коэффициентами. Для снижения погрешности существенны также сдвиги области приближения по горизонтали и вертикали, с их помощью обходится зона погрешности экстраполяции за пределами треугольного расположения узлов интерполяционного полинома.

Замечание 3. В табл. 1–4 время решения задачи предложенным методом дано без использования программного выбора степени полинома и числа итераций. С программным выбором n и r время существенно возрастает, наиболее долго решается задача (82) – 2 min 41 s. В целом с таким выбором время решения занимает промежуточное значение между MathCAD и Maple в границах погрешности, приведенной в таблицах.

Алгоритм выбора параметров можно выполнить параллельно по всем сравниваемым значениям невязки S_n одновременно для всех степеней полиномов n (в силу взаимной независимости сравниваемых значений), аналогично, по всем I_r для всех значений r. По параллельно найденным значениям без труда определяются параметры минимизации погрешности при наименьшей временной сложности. Вместе с тем вычислительный алгоритм решения рассматриваемой задачи Коши является взаимно независимым по временным слоям подобластей $\bigcup_{j=0}^{2^k-1} G_{ij}$, i = const, поэтому решение распараллеливается по всем номерам слоев $i\in\overline{0,\,2^k-1}$, ускоряя последовательный алгоритм пропорционально 2^k. Распараллеливание допускает также алгоритм вычисления коэффициентов и значения интерполяционного полинома Ньютона. Для полинома от одной переменной временная сложность оценивается в [15], для полинома от двух переменных – в [6].

Об аналогах метода
для уравнений других видов

Интерполяционным полиномом (7), преобразованным к виду (9), приближаются частные производные решения уравнения гиперболического типа второго порядка и выше, итерационное уточнение в этом случае выполнимо с помощью первообразной соответственной кратности. Для линейного гиперболического уравнения второго порядка такой подход реализован в [6]. Формально рассмотренный метод переносится на уравнения порядка выше первого на основе их преобразования в систему уравнений первого порядка. Пусть, например, рассматривается задача Коши для уравнения гиперболического типа

$$a u_{xx} - b u_{tt} + c u_x + d u_t + g u = f \, ,$$

где a, b, c, d, g, f – заданные функции независимых переменных x и t, $ab > 0$. Пусть приближенное решение ищется в прямоугольнике G из (1)–(3) при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad a \le x \le b \, ,$$

где φ и ψ – заданные функции $x \in R$. Замена переменных влечет

$$u_x = y, u_t = z, a y_x - b z_t + c y + d\, z + g u = f \, ,$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; y\Big|_{t=0} = \varphi'(x), \;\; z\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad a \le x \le b \, .$$

В каждой подобласти значения y и z из первых двух уравнений можно интерполировать полиномами (7) с преобразованием к виду (9). Для решения $u = g^{-1}(f - a\ y_x + b z_t - c\, y - d\, z)$ в качестве приближений частных производных подставляются соответственные частные производные преобразованных полиномов. Кроме того, используются полиномиальные приближения y, z. Процесс можно циклически повторять до достижения искомой точности. Вопрос о сходимости при данном подходе требует отдельного исследования.

Аналогично итерационному уточнению можно строить последовательность приближений решения интегро-дифференциальных уравнений. Пусть, например, рассматривается задача Коши для линейного уравнения с интегральным оператором типа Вольтерры

$$y'_x = A(x)\, y(x) + \int_a^x K(x, s)\, y(s)\, ds + f(x), \;\; y(a) = y_0 \, . \tag{85}$$

Предполагается, что $A(x)$ и $f(x)$ непрерывны при $a \le x \le b$, $K(x,s)$ непрерывно при $a \le s \le x \le b$. В качестве нулевого приближения принимается $y_0(s) \equiv y_0$. С подстановкой $y_0(s)$ подынтегральную функцию можно интерполировать полиномом (7) с преобразованием к (9): $\Psi_{n0}(z, w) \approx K(x, s)\, y_0(s)$, где $z = h_x^{-1}(x - x_0)$, $w = h_s^{-1}(s - s_0)$ (здесь и ниже не индексируется подобласть и соответственные ей выражения). Тогда $y'_x \approx A(x)\, y_0 + \int_a^x \Psi_{n0}(z, w)\, ds + f(x)$.

Если $s_0 = x_0 = a$, то $\int_a^x \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-\ell} a_{\ell m} z^\ell w^m\, ds = h_s \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-\ell} \frac{a_{\ell m}}{m+1} \frac{(x-a)^{\ell+m+1}}{h_x^\ell\ h_s^{m+1}}$. Правую часть приближения y'_x можно интерполировать полиномом Ньютона от одной переменной с равноотстоящими узлами, преобразовав его согласно [5] к виду алгебраического полинома с числовыми коэффициентами, $p_{(n-1)0}(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell t^\ell$, $t = h^{-1}(x - a)$, h – шаг интерполяции. В результате $p_{(n-1)0}(t) \approx A(x)\, y_0 + h_s \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-\ell} \frac{a_{\ell m}}{m+1} \frac{(x-a)^{\ell+m+1}}{h_x^\ell\ h_s^{m+1}} + f(x)$. Первообразная от $p_{(n-1)0}(t)$ принимается за первое приближение: $y_1(x) = y_0 + \int_a^x p_{(n-1)0}(h^{-1}(x-a))\, dx$, или, $y_1(x) = y_0 + h \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{a_\ell}{\ell+1} (h^{-1}(x-a))^{\ell+1}$. Циклическое повторение описанного процесса с рекуррентными подстановками влечет $y_{r+1}(x) \approx y_0 + \int_a^x \left(A(x)\, y_r(x) + \int_a^x K(x, s)\, y_r(s)\, ds + f(x) \right) dx$, $r = 0, 1, \ldots$ (знак $\approx$ ставится, поскольку не учитываются остаточные члены интерполяции), отсюда $y(x) \approx y_{r+1}(x)$. Сходимость метода требует отдельного исследования.

Задача (85) сводится к интегральному уравнению Вольтерры второго рода

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\, y(s)\ ds + f(x) \, ,$$

где $K(x, s)$ и $f(x)$ – непрерывные функции при $a \le s \le x \le b$. Метод последовательных приближений для этого уравнения сходится к единственному непрерывному решению. Если в качестве нулевого приближения взять $y_0(s) \equiv 0$, то $y_1(x) = f(x)$. Подынтегральную функцию с подстановкой y_1 можно интерполировать полиномом (7) и преобразовать его к виду (9): $\Psi_{n1}(z,w) \approx K(x,s)\,y_1(s)$, $z = h_x^{-1}(x - x_0)$, $w = h_s^{-1}(s - s_0)$. Отсюда $y(x) \approx \lambda \int_a^x \Psi_{n1}(z,w)\,ds + f(x)$. Если $x_0 = s_0 = a$, то $\int_a^x \Psi_{n1}(z,w)\,ds = h_s \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{m=0}^{n-\ell} \frac{a_{\ell m}}{m+1} \frac{(x-a)^{\ell+m+1}}{h_x^{\ell}\,h_s^{m+1}}$. Правую часть приближения $y(x)$ можно интерполировать полиномом Ньютона от одной переменной, преобразовав его к виду $p_{n1}(t) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell t^\ell$. Тогда $p_{n1}(t) \approx \lambda\, h_s \sum_{\ell=0}^{2n} \sum_{m=0}^{2n-\ell} \frac{a_{\ell m}}{m+1} \frac{(x-a)^{\ell+m+1}}{h_x^{\ell}\,h_s^{m+1}} + f(x)$, $t = h^{-1}(x-a)$, и в качестве второго приближения принимается $y_2(x) = p_{n1}(t)$. В продолжение процесса, с рекуррентными подстановками, получится $y_{r+1}(x) \approx \lambda \int_a^x K(x,s)\,y_r(s)\,ds + f(x)$, $r = 1, 2, \ldots$, откуда $y(x) \approx y_{r+1}(x)$. Сходимость в данном случае можно анализировать, сопоставляя $y_r(x)$ со сходящейся последовательностью приближений, каждое из которых имеет точное аналитическое выражение.

Для неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,y(s)\,ds + f(x)$ метод последовательных приближений сходится лишь при условии $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$, где $M = \sup_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|$. Поэтому аналог рассмотренной схемы допустимо строить только при выполнении этого условия.

Заключение

Изложен метод кусочно-интерполяционного решения задачи Коши для уравнения переноса с итерационным уточнением. Решение и его частные производные интерполируются полиномами Ньютона от двух переменных, преобразуемыми к виду алгебраических полиномов с числовыми коэффициентами. На этой основе строится последовательное уточнение решения, которое сходно с двумерным аналогом последовательных приближений Пикара. В случае линейного уравнения переноса метод равномерно сходится к решению в прямоугольной области, строятся приближения частных производных. Приближение решения равномерно-непрерывно в данной области, кусочно-непрерывно – при ее делении на подобласти. Согласно эксперименту решение линейного и квазилинейного уравнений переноса в условиях гладкости приближается с абсолютной погрешностью 10^{-19}–10^{-18}. Метод отличается структурой и сравнительно малой погрешностью, что позволяет детализировать численное моделирование процесса переноса волны.

Список литературы

1. Жамбалова Д.Б., Черный С.Г. Метод интерполяционного профиля решения уравнений переноса // Вестник НГУ. Серия: Информ. техн. 2012. Т. 10. № 1. С. 33–54.

2. Попов И.В. Построение разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для нелинейного уравнения переноса с использованием адаптивной искусственной вязкости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 68. 21 с.

3. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 12. С. 65–78.

4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные схемы для уравнения переноса // Дифференц. ур-ния. 1998. Т. 34. № 12. С. 1675–1685.

5. Джанунц Г.А., Ромм Я.Е. Варьируемое кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с итерационным уточнением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 10. С. 1641–1660.

6. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Кусочно-интерполяционное решение задачи Коши для уравнения переноса. Таганрог, 2019. Деп. в ВИНИТИ 20.08.19, № 68. 40 с.

7. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. СПб.: Лань, 2016. 672 с.

8. Ромм Я.Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II // Кибернетика и системный анализ. 2007. № 2. С. 161–174.

9. Gasca M., Sauer T. On the history of multivariate polynomial interpolation. J. Comput. and Appl. Math. 2000. V. 122. P. 23–35.

10. Kurganov A., Tadmor E. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. J. Comput. Phys. 2000. V. 160. P. 241–282.

11. Якимов А.С. Аналитический метод решения краевых задач. 2-е изд., доп. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. 199 с.

12. Bülbül B., Sezer M. Taylor polynomial solution of hyperbolic type partial differential equations with constant coefficients. Int. J. Computer Math. 2011, V. 88. № 3. P. 533–544.

13. Nazir T, Abbas M., Yaseen M., Lai Sh. (Reviewing Editor) Numerical solution of second-order hyperbolic telegraph equation via new cubic trigonometric B-splines approach. Cogent Mathematics. 2017. V. 4. № 1.

14. Kumar R., Choudhary A., Baskar S. Modified cubic B-spline quasi-interpolation numerical scheme for hyperbolic conservation laws. Applicable Analysis. 2018.

15. Ромм Я.Е., Джанунц Г.А. Компьютерный метод варьируемой кусочно-полиномиальной аппроксимации функций и решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Кибернетика и системный анализ. 2013. № 3. С. 169–189.