УДК 378:372.8

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ В КУРСЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В КОМПОНЕНТАХ ПРИРОДЫ»

[1]Сафронова Т.И., [1]Дегтярева О.Г., [2]Степанов В.И.

[1]Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, e-mail: mail@kubsau.ru;
[2]Алтайский экономико-юридический институт, Барнаул, e-mail: institut@aeli.altai.ru

В Кубанском государственном аграрном университете на факультете гидромелиорации работает магистратура по направлению подготовки «природообустройство и водопользование». Для оценки мелиоративного состояния орошаемых земель и эффективности проводимых мелиоративных мероприятий необходимо ведение непрерывного ирригационно-мелиоративного почвенного мониторинга (наземного и спутникового) и анализ мероприятий, способствующих сохранению и повышению плодородия почвы. Авторы рассматривают параметры, характеризующие мелиоративную систему и ее режимы, случайными величинами. Такой подход позволит рассмотреть мелиоративную систему, функционирующую в условиях неопределенности, и оценить ее параметры в терминах вероятностных распределений, а также учесть стохастический характер воздействия природно-климатических факторов. Исследователь получает возможность на основе вводимой информации оценивать состояние системы и разрабатывать эффективные технологии сельскохозяйственного производства. Математическая модель на основе анализа статистических данных отражает в виде количественных отношений изучаемые процессы или явления или же, исследуя сформированные модели процессов, рассчитывает обобщающие числовые показатели текущего состояния и предоставляет возможность аргументации для прогнозов. В статье авторы приводят два примера из мелиоративной практики. В первом примере рассматривают намечаемые мелиоративные мероприятия пуассоновским потоком определенной интенсивности и для случайной величины (стоимости мероприятий) определяют основные вероятностные характеристики – математическое ожидание и дисперсию. Во втором примере находят доверительный интервал для средней величины органических добавок в почву.

Ключевые слова: математическое моделирование, статистические методы, доверительные интервалы

ELEMENTS OF MATHEMATICAL STATISTICS IN THE COURSE «MODELING OF PROCESSES IN THE COMPONENTS OF NATURE»

[1]Safronova T.I., [1]Degtyareva O.G., [2]Stepanov V.I.

[1]Kuban State Agrarian University, Krasnodar, e-mail: mail@kubsau.ru;
[2]Altai Institute of Economics and Law, Barnaul, e-mail: institut@aeli.altai.ru

In the Kuban state agrarian University at the faculty of irrigation works master in the direction of training «environmental engineering and water use». To assess the reclamation state of irrigated lands and the effectiveness of reclamation activities, it is necessary to conduct continuous irrigation and reclamation soil monitoring (ground and satellite) and analysis of measures that contribute to the preservation and improvement of soil fertility. The authors consider the parameters characterizing the reclamation system and its regimes by random variables. This approach will allow to consider the meliorative system functioning in conditions of uncertainty and to estimate its parameters in terms of probability distributions, and also to take into account the stochastic nature of the impact of climatic factors. The researcher is able to assess the state of the system and develop effective technologies of agricultural production on the basis of input information. Mathematical model based on the analysis of statistical data reflects in the form of quantitative relations of the studied processes or phenomena, or exploring the generated models of processes, calculates the generalizing numerical indicators of the current state and provides the possibility of argumentation for forecasts. In the article the authors give two examples from reclamation practice. In the first example, the planned reclamation measures are considered by the Poisson flow of a certain intensity and for a random value (cost of measures) the main probabilistic characteristics are determined – the mathematical expectation and variance. In the second example the confidence interval for the average value of organic additives in the soil is found.

Keywords: mathematical modeling, statistical methods, confidence intervals

Сельскохозяйственная мелиорация – это изменение природной среды с целью ее улучшения для ведения сельского хозяйства (Н.Ф. Реймерс, 1990). Объектами мелиорации являются неблагоприятные гидрологические, почвенные и климатические условия. Организационно-хозяйственные мероприятия при осуществлении мелиоративных работ предполагают внедрение высоких технологий [1, 2]. При этом необходимо учитывать следующие критерии экологической оценки состояния почв – не допускать увеличения плотности почвы, превышения уровня грунтовых вод, превышения предельно допустимой концентрации загрязняющего вещества.

При составлении мелиоративного проекта необходимо провести анализ подходов к улучшению состояния мелиорируемых земель и на этой основе осуществить эколого-экономическую оценку их применения.

В последние годы явления деградации почв углубились из-за резкого подорожания минеральных удобрений, из-за недостатка средств на мелиоративные мероприятия. В этой связи требуется обоснование приемов регулирования процессов на мелиорируемых землях, поиск новых приемов, дешевле существующих, менее трудоемких при их выполнении и отвечающих экологическим требованиям. Возникает необходимость рассмотрения различных вариантов проекта, введения новых показателей эффективности природоохранных проектов.

В каждом мелиоративном проекте проводится анализ влияния намечаемых мероприятий на окружающую среду. Особенность оценки эффективности природоохранных проектов состоит в необходимости учета вероятностного характера происходящих процессов [3, 4]. Для учета стохастического характера процессов необходим выбор подходящих вероятностных моделей. В Кубанском государственном аграрном университете в программе магистратуры цель курса «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» – научить обучающихся использовать современные подходы науки в методике исследований водохозяйственного комплекса природообустройства.

Материалы и методы исследования

Большинство данных, используемых в мелиоративных исследованиях, являются стохастическими величинами. Это обстоятельство не позволяет находить однозначные решения. Возникает необходимость выполнить оценку пределов допустимых колебаний переменных величин. Такие оценки эффективнее выполнять на моделях с использованием математической статистики. Приведем примеры.

Первый пример. Так как состояние почв обусловлено большим количеством случайных факторов, необходим вероятностный подход к выбору управленческих решений [3–5]. При таком подходе параметры, характеризующие мелиоративную систему, трактуются случайными величинами. Это позволяет рассматривать неопределенность, связанную с оценкой параметров, в терминах вероятностных распределений.

Второй пример. Для совершенствования технологии орошения с применением фертигации необходима разработка математической модели процессов влаго- и солепереноса. Фертигация – орошение с использованием растворимых удобрений и систем капельного полива. Совместное нормированное внесение в почву воды и удобрений является технологической и экологической основой оптимизации условий выращивания высоких урожаев сельскохозяйственных культур. Этот прием позволяет постоянно поддерживать влажность воздуха и почвы в оптимальной пропорции в системе «вода – воздух» в почве, подавать растениям удобрения небольшими дозами, способствует повышенной усвояемости удобрений, меньшей выщелачиваемости в сравнении с традиционными методами ирригации.

Моделирование процесса управления водно-солевым режимом во фрактальных средах рассмотрено в работах [6, 7]. Французский математик Б. Мандельброт определяет фракталы раздробленными объектами, которые выглядят одинаковыми в любом масштабе [8]. В работах [6, 7] авторы рассматривают почву сложной пористой фрактальной структурой. Целью фрактального анализа является исследование фрактальных свойств, оценка их глубины и значение показателя Н. Херста. В теории используют термин R/S-анализ, который называется «методом нормированного размаха Херста».

При использовании метода нормированного размаха рассматривается ряд n последовательных величин $x_1, x_2, \ldots x_n$. Каждое x_i, $i=\overline{1,n}$ характеризует временное положение исследуемой величины. Влажность почвы определяет фрактальные качества почвенных коллоидов, а фрактальная размерность – изменение масштаба, степень изменчивости ряда. По выборке $x_1, x_2, \ldots x_n$ рассчитываются выборочные статистические характеристики: среднее арифметическое, дисперсия, стандарт, коэффициент вариации. Они являются оценками соответствующих генеральных статистических параметров [8].

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим математическую модель первого примера.

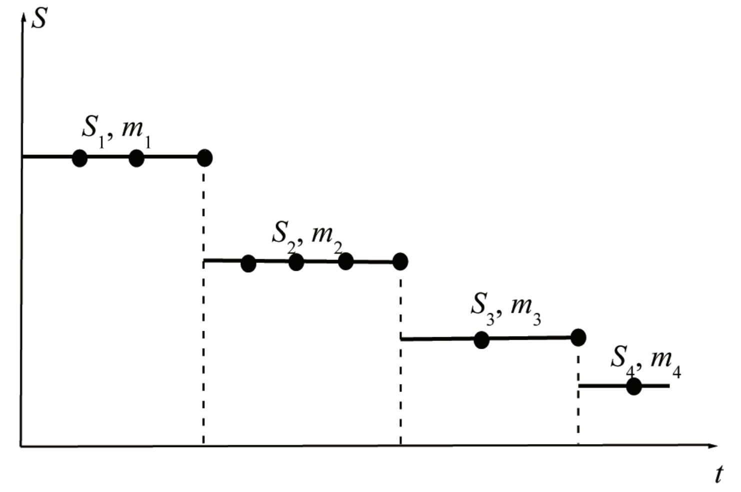
Пусть в момент начала работ намечены мелиоративные мероприятия на длительность функционирования T_1, цена которых S_1. S_i – затраты, связанные с регулированием или полным устранением отрицательных последствий мелиоративных мероприятий.

Если за время T_1 отрицательные последствия мелиоративных мероприятий не устранены, намечаются новые мелиоративные мероприятия, цена которых S_2 и длительность функционирования T_2.

Если за время T_2 отрицательные последствия не устранены, намечаются новые мелиоративные мероприятия на длительность функционирования T_3 и цене S_3 и т.д. Каждый отрезок времени будем называть фазой. Длительность фазы поставим в зависимость от числа намечаемых мероприятий.

Пусть в начальный момент устанавливается цена S_1. Мелиоративные мероприятия вводятся в эксплуатацию, m_1 – число возможных мероприятий. Если удовлетворительное состояние будет достигнуто – процесс закончен. Если выбранные m_1 мероприятий не приводят к удовлетворительному состоянию, то намечаются m_2 возможных мероприятия, цена которых S_2. Если намеченные мероприятия приводят систему к приемлемому состоянию – процесс закончен, если нет – выбираются другие m_3 возможных мероприятия, оцениваемых ценой S_3, и т.д. Этот процесс пояснен рисунком.

Можно рассматривать последовательность мелиоративных мероприятий пуассоновским потоком интенсивности λ. На n-й фазе удовлетворительное мелиоративное состояние будет достигнуто с вероятностью $R_n = R(S_n)$.



Модель выбора намечаемых мероприятий с понижением цены

Рассмотрим i-ю фазу. Тогда с вероятностью

$$p(n) = \frac{(\lambda T_i)^n}{n!} e^{-\lambda T_i} \quad (1)$$

на ней будет выполнено n выбранных мероприятий. Так как R_i есть вероятность достижения удовлетворительного мелиоративного состояния при конкретном мероприятии, то с вероятностью $(1-R_i)^n$ удовлетворительное состояние не будет достигнуто. Пусть P_i – вероятность того, что на i-й фазе удовлетворительное состояние не достигнуто.

$$P_i = \sum_{n=0}^{\infty} (1-R_i)^n \frac{(\lambda T_i)^n}{n!} e^{-\lambda T_i} =$$
$$= e^{-\lambda T_i} \cdot e^{\lambda T_i (1-R_i)} = e^{-\lambda T_i R_i}. \quad (2)$$

Обозначим Q_n – вероятность того, что удовлетворительное состояние достигнуто на n-й фазе. На предыдущих фазах с номерами 1, 2, 3, … , $n-1$ мелиоративное состояние неудовлетворительно. Потому

$$Q_n = P_1 P_2 P_3 \ldots P_{n-1}(1-P_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P_i \cdot (1-P_n). \quad (3)$$

Используя выражение (2), получим

$$Q_n = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda T_i R_i\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\lambda T_n R_n\right)\right).$$

Теперь можем рассмотреть основные характеристики цены удовлетворительного мелиоративного состояния.

Выполненное мероприятие доводит систему до определенного состояния с вероятностью $R(S)$, зависящей от цены $S(t)$. $R(S)$ – монотонно убывающая функция, так что с уменьшением цены мероприятий вероятность достижения ущерба возрастает.

Если удовлетворительное мелиоративное состояние будет достигнуто на n-м отрезке времени (n-й фазе), то цена выполненных мероприятий будет равна S_n. Потому отмечаем, цена S_e – дискретная случайная величина, принимающая значения S_n с вероятностями Q_n

$$P\{S_e = S_n\} = Q_n, \quad n = \overline{1,\infty}. \quad (4)$$

Следовательно,

$$M\{S_e\} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \prod_{i=1}^{n-1} (1-R_i)^{m_i} (1-(1-R_n)^{m_n}), \quad (5)$$

$$M\{S_e^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2 Q_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^2 \prod_{i=1}^{n-1} (1-R_i)^{m_i} (1-(1-R_n)^{m_n})$$

и $D\{S_e\} = M\{S_e^2\} - M^2\{S_e\}$.

Полученные характеристики случайной величины (цены намечаемых мелиоративных мероприятий с учетом неопределенностей) могут быть использованы в управленческих решениях [9].

Для оценки статистических параметров дискретной случайной величины второго примера можно использовать известные формулы математической статистики [10].

$$P\left(\bar{x}_{в} - t\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{в} + t\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (6)$$

Формулой (6) определен искомый доверительный интервал $\left(\bar{x}_{в} - t\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}, \bar{x}_{в} + t\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}\right)$ для неизвестного параметра $M(X) = a$ с заданной заранее доверительной вероятностью γ при $n > 30$ (n – объем выборки). Концы этого интервала содержат две неизвестные величины t и σ_r. Первая из них находится из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$, откуда $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ и $t = \Phi_{-1}\left(\frac{\gamma}{2}\right)$, где $\Phi_{-1}(x)$ есть функция, обратная функции Лапласа.

Тогда (6) приобретает вид

$$P\left(\bar{x}_{в} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{в} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma. \quad (7)$$

Пример. По данным выборки из генеральной совокупности, приведенным ниже в таблице, найти с вероятностью $\gamma = 0,95$ доверительный интервал для неизвестного X – органических добавок в почву.

Выборка из генеральной совокупности

$X = x_i$	100	300	500	700	900
n	5	20	40	25	10

Решение.

Выборка большая ($n > 30$)

$$P\left(\bar{x}_{в} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{в} + t\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma .$$

1. Найдем $\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum x_i \cdot n_i = 530.$

2. Найдем $S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n-1}} = 208$.

3. Найдем $t = \Phi_{-1}\left(\frac{y}{2}\right) = \Phi_{-1}(0,475) = 1,96$.

4. Найдем характеристику точности оценки $\delta = t\frac{S}{\sqrt{n}} = 40,8$.

5. Найдем доверительные границы $\bar{x}_{в} \pm \delta$, что даст

$$\bar{X}_{в} - \delta = 530 - 40,8 = 489,2;$$

$$\bar{X}_{в} + \delta = 530 + 40,8 = 570,8.$$

Следовательно, с 95%-ной уверенностью (надежностью) неизвестный параметр $M(X) = a$ принадлежит интервалу (489,2; 570,8), т.е. $489,2 < a < 570,8$, или, иначе, $a = 530 \pm 40,8$ с вероятностью $\gamma = 0,95$.

Смысл полученного результата: если произвести достаточно большое число различных выборок из генеральной совокупности с объемами $n = 100$ единиц, то в 95% из них неизвестное $M(X) = a$ будет находиться в полученном интервале (489,2; 570,8) и лишь в остальных 5% $M(X)$ может оказаться за пределами этого интервала [10].

Примечание. Из формулы для точности оценки $\delta = t\frac{S}{\sqrt{n}}$ следует, что, чем больше объем выборки n, тем точность оценки лучше, так как $\delta = t\frac{S}{\sqrt{n}}$ убывает с ростом n.

Наоборот, если потребовать увеличение надежности оценки (например, $\gamma = 0,99$ или $\gamma = 0,999$), то увеличится значение функции Лапласа $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, а вместе с ней и значение аргумента, ибо $\Phi(t)$ – возрастающая функция t. Но тогда увеличится и δ, и точность оценки δ ухудшится.

Иначе говоря, худшая точность более вероятна, чем лучшая, что вполне естественно.

Выводы

Приемы мелиорации обеспечивают повышение плодородия почв. С изменением экологических условий и развитием технического прогресса приемы улучшения условий жизни сельскохозяйственных культур постоянно совершенствуются, разрабатываются новые технические средства регулирования режимов почв. Необходимо количественно оценивать мероприятия, их состав, объем, очередность, сроки ввода. Рассмотренные вопросы нахождения числовых характеристик случайных величин и доверительных интервалов для средних величин магистранты используют при оформлении курсовых работ по дисциплине «Математическое моделирование природных процессов в компонентах природы».

Список литературы

1. Лисуненко К.Э., Соколова И.В. Оценка состояния почв сельскохозяйственных районов Краснодарского края //

Научное обеспечение агропромышленного комплекса: сб. статей по материалам 72-й научно-практической конференции студентов по итогам НИР за 2016 год. (01 февраля – 01 марта 2017 г.). Краснодар: Издательство Кубанский государственный аграрный университет им. И.Т. Трубилина, 2017. С. 231–234.

2. Подколзин О.А., Соколова И.В., Осипов А.В., Слюсарев В.Н. Мониторинг плодородия почв земель Краснодарского края // Труды Кубанского государственного аграрного университета. 2017. № 68. С. 117–124.

3. Сафронова Т.И., Хаджиди А.Е., Холод Е.В. Обоснование метода управления агроресурсным потенциалом агроландшафтов // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 2. [Электронный ресурс]. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=22376 (дата обращения: 27.06.2019).

4. Сафронова Т.И., Дегтярева О.Г., Степанов В.И. Вероятностный подход к выбору объема водохранилища системы регулирования стока // Успехи современного естествознания. 2018. № 9. С. 42–46.

5. Сафронова Т.И., Дегтярева О.Г., Дацьо Д.А. Разработка модели оптимального использования стока с малых водосборов с учетом неопределенности затрат // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 12–1. С. 137–142.

6. Мелихова Е.В. Математическое моделирование процессов влагообеспеченности при капельном и внутрипочвенном орошении // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2016. № 1 (41). С. 228–234.

7. Мелихова Е.В., Бородычев В.В. Математическое моделирование влагопереноса при локальном орошении в почвах фрактальной структуры // Известия Нижневолжского агроуниверситетского комплекса: Наука и высшее профессиональное образование. 2017. № 4 (48). С. 246–251.

8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы: пер. с англ. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.

9. Юрченко И.Ф. Системы поддержки принятия решений как фактор повышения эффективности управления мелиорацией // Научный журнал Российского НИИ проблем мелиорации. 2017. № 2 (26). С. 195–209.

10. Буре В.М., Парилина Е.М. Теория вероятностей и математическая статистика. СПб.: Издательство «Лань», 2013. 416 с.