

УДК 62-2:534.01

**МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧАХ  
ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ ИЗ ДВУХ СЕГМЕНТОВ****Сафина Г.Ф.***ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», Нефтекамский филиал, Нефтекамск,  
e-mail: safinagf@mail.ru*

Рассмотрена прямая спектральная задача определения частот поперечных колебаний балки, состоящей из двух сегментов разной жесткости и различных поперечных сечений. Получено частотное уравнение к прямой задаче, учитывающее условия закреплений концов сегментной балки, а также условия сопряжения между сегментами. По прямой задаче рассмотрены зависимости частот поперечных колебаний сегментной балки от коэффициентов жесткостей пружин кручения ее шарнирных опор. Проведенные исследования показывают, что при увеличении жесткостей пружин кручения опор сегментной балки частоты ее колебаний также увеличиваются. Впервые поставлена обратная задача – задача акустического диагностирования коэффициентов жесткости пружин кручения опор балки. Исследованы вопросы существования и единственности решения обратной задачи. Представлена и доказана соответствующая теорема. Определен метод решения обратной задачи, использующий для этого известные значения трех частот поперечных колебаний сегментной балки. Алгоритм сведен к решению системы трех нелинейных уравнений относительно искомых коэффициентов жесткостей пружин кручения опор балки. По ходу решения получены аналитические формулы для коэффициентов жесткостей пружин кручения опор балки. Найденные формулы подтверждают единственность определения жесткостей пружин кручения шарнирных опор балки. Приведен пример решения обратной задачи, использующий полученные аналитические формулы. Решение поставленных задач сопровождается программами с применением стандартных команд математического пакета.

**Ключевые слова:** собственные частоты, поперечные колебания, прямая и обратная задачи, жесткости пружин кручения, диагностирование

**MODELLING CROSS FLUCTUATIONS OF A TWO-SEGMENT BEAM  
IN DIRECT AND INVERSE PROBLEMS****Safina G.F.***Bashkir State University, Neftekamsk branch, Neftekamsk, e-mail: safinagf@mail.ru*

The study examines the direct spectral problem of determination of transverse oscillations of a beam consisting of two segments of different stiffness and different cross sections. The frequency equation for the direct problem is obtained, which takes into account the conditions of fixing the ends of the segmental beam as well as the transmission conditions between the segments. Based on the solution to the direct problem, we study the effect of the stiffness coefficients of the torsion springs hinging the ends of the beam on the frequencies of its transverse oscillations. We show that an increase in the stiffness of torsion springs leads to an increase in the oscillation frequency of the segmental beam. We model and set the inverse spectral problem to diagnose the stiffness parameters of the hinged supports of the beam from the known frequencies of its oscillations. We raise the question of the existence of the solution to the problem. A theorem on the uniqueness of the solution to the inverse problem is formulated and proved. An algorithm for solving the problem is presented, which allows to obtain the stiffness coefficients by the known values of the three oscillation frequencies of the segmental beam. The algorithm is reduced to solving a system of three nonlinear equations for the desired coefficients with the introduction of a new variable. The obtained analytical formulae confirm the uniqueness of the stiffness determination for torsion springs of hinged supports of the beam. An example of solving the inverse problem using the obtained analytical formulae is presented. The software implementations of solving algorithms are provided for the direct and inverse problems.

**Keywords:** natural frequencies, transverse oscillations, direct and inverse problems, torsional spring stiffness, diagnosing

Проведенные в представленной работе исследования относятся к проблемам диагностики технических конструкций, и это направление в настоящее время имеет широкое научное и практическое развитие и применение [1–3]. По акустическому отклику механических систем или их составляющих в виде балок, стержней, дисков и т.д. можно восстанавливать различного рода неисправности таких систем, в том числе учитывающих влияние условий закреплений на их колебательный процесс. Данная работа продолжает подобные исследования и относится к области акустической диагностики механических систем [4–6].

Собственные поперечные колебания различных балок рассматриваются во многих научных работах по теории колебаний, например в [1, 2]. В данной же работе разрабатывается модель балки, состоящей из двух сегментов разного поперечного сечения с учетом условий их сопряжения. Исследована зависимость частот колебаний двухсегментной балки от коэффициентов жесткостей пружин кручения ее шарнирных опор. Поставлена также обратная задача восстановления жесткостей пружин кручения опор балки по конечному набору частот ее поперечных колебаний. Исследованы вопросы существования и единственности

решения обратной задачи, представлена соответствующая теорема. Полученный алгоритм решения обратной задачи использует известные значения трех первых частот колебаний сегментной балки.

*Прямая задача определения частот поперечных колебаний балки из сегментов*

Приведем теоретические сведения по прямой спектральной задаче. Рассмотрим балку длины  $L$  ступенчато-переменного сечения с двумя участками разной жесткости  $EI_1$  и  $EI_2$  длиной  $l_1$  и  $l_2$  соответственно (рисунок, а). Разность в жесткости между участками образуется в результате поворота правой части относительно левой на угол  $\varphi$  (рисунок, б).

Согласно расчетной схеме балку моделируем сопряжением двух сегментов в виде стержней длиной  $l_i$ . Вводим локальные координаты  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Уравнения свободных поперечных колебаний имеют вид

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + \rho A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

В (1):  $w_i = w_i(x_i, t)$  – прогиб  $i$ -го сегмента;  $I_i = \frac{bh_i^3}{12}$  и  $A_i = bh_i$  – момент инерции и площадь сечения  $i$ -го сегмента;  $\rho$  – плотность материала балки. При моде-

лировании также учитываем, что:  $I_2 = \alpha^4 I_1$ ,

$$\alpha^4 = \cos^2(\varphi) + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \sin^2(\varphi), \quad A_1 = A_2 = A.$$

От размерных физических параметров переходим к следующим безразмерным:

$$\bar{w}_i = \frac{w_i}{L}, \quad \xi_i = \frac{x_i}{L}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \bar{l}_i = \frac{l_i}{L},$$

тогда уравнения (1) примут вид

$$\frac{\partial^4 \bar{w}_1}{\partial \xi_1^4} + \frac{\partial^2 \bar{w}_1}{\partial \tau^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \bar{w}_2}{\partial \xi_2^4} + \frac{1}{\alpha^4} \frac{\partial^2 \bar{w}_2}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2)$$

С учетом моделирования свободных поперечных колебаний сегментной балки примем в уравнениях (2) прогиб в виде

$$\bar{w}_i = W_i(\xi_i) e^{i\omega\tau}, \quad \text{где } \bar{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ – безразмерная}$$

частота колебаний. Принятые решения  $\bar{w}_i$  подставим в уравнения (2) и с помощью стандартного разделения переменных придем к следующим уравнениям для сегментов:

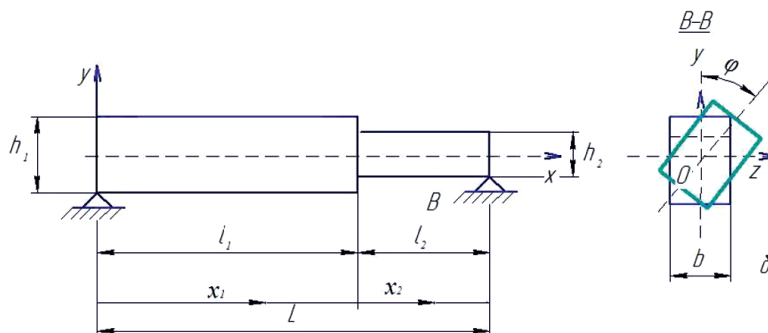
$$W_1^{IV} - k^4 W_1 = 0; \quad W_2^{IV} - \left(\frac{k}{\alpha}\right)^4 W_2 = 0. \quad (3)$$

В (3) введен спектральный коэффициент  $k^4 = \frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI}$ . Найдем решения уравнений (3):

$$W_1 = D_{11} \cos k\xi_1 + D_{12} \sin k\xi_1 + D_{13} ch k\xi_1 + D_{14} sh k\xi_1;$$

$$W_2 = D_{21} \cos \frac{k}{\alpha} \xi_2 + D_{22} \sin \frac{k}{\alpha} \xi_2 + D_{23} ch \frac{k}{\alpha} \xi_2 + D_{24} sh \frac{k}{\alpha} \xi_2, \quad (4)$$

в которых  $D_{ij}$  ( $i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 4}$ ) – амплитуды колебаний двухсегментной балки.



Модель балки ступенчато-переменного сечения

Вместе с дифференциальными уравнениями (1) (или (3)) рассмотрим краевые условия в виде шарнирных опор балки с коэффициентами жесткости  $c_1$  и  $c_2$  пружин кручения:

$$W_1(0) = 0; W_1''(0) - \frac{c_1}{EI} W_1'(0) = 0; W_2(\bar{l}_2) = 0; W_2''(\bar{l}_2) + \frac{c_2}{EI} W_2'(\bar{l}_2) = 0. \quad (5)$$

Рассмотрим также условия сопряжения двух сегментов балки разного поперечного сечения, которые при нашем моделировании примут вид

$$W_1(\bar{l}_1) = W_2(0); W_1'(\bar{l}_1) = W_2'(0); I_1 W_1''(\bar{l}_1) = I_2 W_2''(0); I_1 W_1'''(\bar{l}_1) = I_2 W_2'''(0). \quad (6)$$

Подставляя решения (4) в краевые условия (5) и условия сопряжения (6), получим систему восьми однородных алгебраических уравнений относительно амплитуд колебаний балки.

Решая полученную систему уравнений относительно ненулевых амплитуд колебаний сегментной балки, получим следующий частотный определитель восьмого порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2 & -kC_1 & k^2 & -kC_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos k\bar{l}_2 & \sin k\bar{l}_2 & chk\bar{l}_2 & shk\bar{l}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k^2 \cos k\bar{l}_2 - & -k^2 \sin k\bar{l}_2 + & k^2 chk\bar{l}_2 + & k^2 shk\bar{l}_2 + \\ & & & & -kC_2 \sin k\bar{l}_2 & +kC_2 \cos k\bar{l}_2 & +kC_2 shk\bar{l}_2 & +kC_2 chk\bar{l}_2 \\ \cos k\bar{l}_1 & \sin k\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin k\bar{l}_1 & \cos k\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\cos k\bar{l}_1 & -\sin k\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \sin k\bar{l}_1 & -\cos k\bar{l}_1 & shk\bar{l}_1 & chk\bar{l}_1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Отметим, что в (7) учтены равенства:  $\alpha^4 = \cos^2(\varphi) + \left(\frac{b}{h}\right)^2 \sin^2(\varphi)$ ,  $A_i = b_i h_i$ ,  $\bar{l}_i = \frac{l_i}{L}$ ,  $b_i = h_i$ ,  $C_1 = \frac{c_1}{EI_1}$ ,  $C_2 = \frac{c_2}{EI_2}$ . Составлена программа с применением команд математического

пакета Maple, с помощью которой по уравнению (7) при заданных значениях жесткостей пружин на кручение шарнирных опор двухсегментной балки и известных ее физических параметрах определяются частоты поперечных ее колебаний.

Проведенные расчеты показывают, что при увеличении жесткостей пружин на кручение частоты колебаний балки увеличиваются. В таблице, например, даны пять собственных значений задачи (3), (5), соответствующие увеличивающимся значениям коэффициента  $C_1$  (при  $C_2 = \text{const}$ ) при параметрах балки:  $I_1 = I_2 = I = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ ,  $l_1 = l_2 = 0,5 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ,  $b = h = 0,1 \text{ м}$ .

Зависимость собственных значений  $k_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) задачи (3), (5) от коэффициента  $C_1$  (при  $C_2 = \text{const}$ )

$C_1$	$C_2$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$
1	1	6,2831	12,5664	18,8496	21,9911	28,2743
1,5	1	6,3157	12,5844	18,8620	22,0019	28,2828
2	1	6,3456	12,6016	18,8740	22,0124	28,2911
2,5	1	6,3731	12,6182	18,8858	22,0226	28,2993
3	1	6,3985	12,6341	18,8972	22,0326	28,3073

Проведенные исследования важны при рассмотрении проблемы сохранения безопасных частот колебаний сегментной балки.

*Обратная задача диагностирования  
жесткостей пружин на кручение опор балки*

Смоделируем теперь обратную задачу, а именно задачу акустического определения жесткостей пружин на кручении шарнирных опор балки. Итак, известен конечный набор частот поперечных колебаний сегментной балки, необходимо восстановить жесткости пружин на кручении ее шарнирных опор.

Преобразуем частотное уравнение (7) к следующему виду относительно искомым параметров  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\Delta(k) = f_1(k)C_1 + f_2(k)C_2 + f_3(k)C_1C_2 + f_4(k) = 0. \quad (8)$$

Введенные в рассмотрение в (8) функции  $f_j(k)$  ( $j = \overline{1,4}$ ) зависят от физических параметров балки, а также спектрального параметра  $k_i$  ( $i = \overline{1,\infty}$ ) следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1(k) &= 8k^3 (\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2) + \sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2) + \\ &+ \cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2) - \cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) + \\ &+ \sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) - \sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2) - \\ &- \cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) - \sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)); \\ f_2(k) &= 8k^3 (\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) - \sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2) + \\ &+ \sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) - \sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2) - \\ &- \cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2) + \cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2) + \\ &+ \cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) - \cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)); \\ f_3(k) &= 4k^2 (2\cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\cos(k\bar{l}_2) - 2\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) + \\ &+ sh(k\bar{l}_1)^2 ch(k\bar{l}_2)^2 - sh(k\bar{l}_1)^2 sh(k\bar{l}_2)^2 - ch(k\bar{l}_1)^2 \cos(k\bar{l}_2)^2 + ch(k\bar{l}_1)^2 sh(k\bar{l}_2)^2 + \\ &+ 2\sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2) - 2\sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_2)\sin(k\bar{l}_2) - \cos(k\bar{l}_1)^2 \cos(k\bar{l}_2)^2 - \\ &- \cos(k\bar{l}_1)^2 \sin(k\bar{l}_2)^2 - \cos(k\bar{l}_1)^2 \sin(k\bar{l}_2)^2 - \sin(k\bar{l}_1)^2 \cos(k\bar{l}_2)^2 - \sin(k\bar{l}_1)^2 \sin(k\bar{l}_2)^2); \\ f_4(k) &= 16k^4 (\cos(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)ch(k\bar{l}_2) - \sin(k\bar{l}_1)sh(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)ch(k\bar{l}_2) - \\ &- \cos(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\sin(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2) + \sin(k\bar{l}_1)ch(k\bar{l}_1)\cos(k\bar{l}_2)sh(k\bar{l}_2)). \end{aligned} \quad (9)$$

Для исследования вопроса о существовании решения обратной задачи введем в рассмотрение две спектральные задачи  $L$  и  $L'$  с соответствующими частотными уравнениями  $\Delta(k)$  (равенство (7)) и  $\underline{\Delta}(k) = f_1(k)\underline{C}_1 + f_2(k)\underline{C}_2 + f_3(k)\underline{C}_1\underline{C}_2 + f_4(k) = 0$ . Отметим, что уравнение  $\underline{\Delta}(k)$  имеет те же функции (9), но другие безразмерные коэффициенты  $\underline{C}_1$  и  $\underline{C}_2$ . Сформулируем теперь теорему.

*Теорема.* Пусть частотные уравнения  $\Delta(k)$  и  $\underline{\Delta}(k)$  задач  $L$  и  $L'$  имеют вещественные корни  $k_i$  ( $i = \overline{1,\infty}$ ) (а значит, собственные частоты  $\underline{\omega}_i$  ( $i = \overline{1,\infty}$ )). Тогда при совпадении  $k_i$  ( $i = \overline{1,\infty}$ ) с учетом их кратностей будут совпадать и коэффициенты:  $C_1 = \underline{C}_1$ ,  $C_2 = \underline{C}_2$ .

*Доказательство.* Заметим, что частотные уравнения  $\Delta(k)$  и  $\underline{\Delta}(k)$  являются целыми функциями от параметра  $k_i$  ( $i = \overline{1,\infty}$ ). Кроме того, с помощью команд математического пакета можно показать, что  $\Delta(k)$  и  $\underline{\Delta}(k)$  являются линейно независимыми функциями. Тогда с учетом теоремы Адамара [7] можно утверждать, что ненулевые целые функции  $\Delta(k)$  и  $\underline{\Delta}(k)$  восстанавливаются по параметру  $k_i$  ( $i = \overline{1,\infty}$ ) с точностью до постоянного множителя  $K$ :  $\Delta(k) - \underline{\Delta}(k) = 0$ . В итоге получаем, что  $K = 1$ , откуда:  $C_1 = \underline{C}_1$ ,  $C_2 = \underline{C}_2$ . Теорема доказана.

*Метод решения обратной задачи*

Проведенные исследования по вопросу единственности решения обратной задачи позволяют определять безразмерные коэф-

коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  (а значит, и жесткости  $c_1$  и  $c_2$  пружин на кручение шарнирных опор балки) единственным образом. Необходимо теперь построить алгоритм решения задачи.

Покажем, что для единственности восстановления искомым параметров достаточно знание первых трех значений собственных частот  $\omega_i$  поперечных колебаний двухсегментной балки. Для этого с учетом вида частотного уравнения (8) введем дополнительный параметр  $D = C_1 C_2$ . Тогда при известных значениях  $k_i$  ( $i = 1, 3$ ) получим систему уравнений

$$\begin{cases} f_1(k_1)C_1 + f_2(k_1)C_2 + f_3(k_1)D = -f_4(k_1); \\ f_1(k_2)C_1 + f_2(k_2)C_2 + f_3(k_2)D = -f_4(k_2); \\ f_1(k_3)C_1 + f_2(k_3)C_2 + f_3(k_3)D = -f_4(k_3), \end{cases} \quad (10)$$

в которой  $C_1$ ,  $C_2$  и  $D$  неизвестны, а функции  $f_j(k)$  ( $j = 1, 4$ ) определяются при  $k_i$  ( $i = 1, 3$ ) формулами (9). Решая (10) методом Крамера, получим

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (11)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(k_1) & f_2(k_1) & f_3(k_1) \\ f_1(k_2) & f_2(k_2) & f_3(k_2) \\ f_1(k_3) & f_2(k_3) & f_3(k_3) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -f_4(k_1) & f_2(k_1) & f_3(k_1) \\ -f_4(k_2) & f_2(k_2) & f_3(k_2) \\ -f_4(k_3) & f_2(k_3) & f_3(k_3) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_1(k_1) & -f_4(k_1) & f_3(k_1) \\ f_1(k_2) & -f_4(k_2) & f_3(k_2) \\ f_1(k_3) & -f_4(k_3) & f_3(k_3) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

С учетом введенной переменной необходимо проверить также выполнение равенства:

$$\frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \cdot \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

в котором  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_1(k_1) & f_2(k_1) & -f_4(k_1) \\ f_1(k_2) & f_2(k_2) & -f_4(k_2) \\ f_1(k_3) & f_2(k_3) & -f_4(k_3) \end{vmatrix}$ .

Таким образом, найденный алгоритм решения системы уравнений (10) позволяет однозначно восстанавливать искомые коэффициенты  $C_1$ ,  $C_2$  по аналитическим формулам (11)–(12) при известных трех ненулевых собственных частотах  $\omega_i$  колебаний двухсегментной балки.

Применение метода рассмотрим на конкретном примере.

*Пример.* Даны собственные значения  $k_1 = 9,26658$ ,  $k_2 = 12,43919$ ,  $k_3 = 18,75845$ , соответствующие первым трем частотам колебаний балки ступенчато-переменного сечения, а также физические параметры:  $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ;  $I_1 = I_2 = I = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ ;  $l_1 = l_2 = 0,5 \text{ м}$ ;  $b = h = 0,1 \text{ м}$ . Найти коэффициенты жесткости  $c_1$  и  $c_2$  пружин на кручение шарнирных опор балки. Подставляя значения  $k_1, k_2, k_3$ , а также заданные физические параметры в (9), получим

$$f_1(k_1) = -0,3855 \cdot 10^8;$$

$$f_2(k_1) = 0,2795 \cdot 10^8;$$

$$f_3(k_1) = -572429,293;$$

$$f_4(k_1) = -0,9831 \cdot 10^8;$$

$$f_1(k_2) = 0,2175 \cdot 10^{10};$$

$$f_2(k_2) = -0,1682 \cdot 10^{10};$$

$$f_3(k_2) = 0,1982 \cdot 10^8;$$

$$f_4(k_2) = 0,6135 \cdot 10^{10};$$

$$f_1(k_3) = 0,4023 \cdot 10^{13};$$

$$f_2(k_3) = -0,3349 \cdot 10^{13};$$

$$f_3(k_3) = 0,1795 \cdot 10^{11};$$

$$f_4(k_3) = 0,1263 \cdot 10^{14}.$$

Далее по формулам (10), (11) имеем:  $\Delta = 0,3876 \cdot 10^{26}$ ;  $\Delta_1 = 0,3876 \cdot 10^{26}$ ;  $\Delta_2 = 0,1938 \cdot 10^{27}$ . Тогда определяем следующие безразмерные параметры:  $C_1 = 1$ ;  $C_2 = 5$ , через которые находим значения коэффициентов жесткостей опор балки:  $c_1 = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ ,  $c_2 = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

### Заключение

В работе была исследована и решена прямая задача определения поперечных колебаний балки из двух сегментов при шарнирных опорах с пружинами кручения различной жесткости. Исследовано влияние на собственные частоты колебаний сегментной балки коэффициентов жесткостей ее опор и установлена прямая зависимость при любых ее других физических параметрах. Приведена постановка обратной спектральной задачи, исследован вопрос существования и единственности ее решения. Алгоритм решения обратной задачи сведен к введению новой переменной с последующим решением системы трех линейных

уравнений относительно искомым параметров. Получены математические модели для определения коэффициентов жесткости шарнирных опор сегментной балки единственным образом.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан в рамках научного проекта № 17-41-020230-р\_а.*

#### Список литературы

1. Бабанов В.В. Строительная механика: В 2 т. Т. 1. М.: Academia, 2017. 256 с.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 458 с.
3. Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи: учебник. Ростов н/Д.: Издательство Южного федерального университета, 2011. 232 с.
4. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. М.: Физматлит, 2007. 384 с.
5. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
6. Сафина Г.Ф. Метод определения характеристик тонкостенной круговой цилиндрической оболочки // Фундаментальные исследования. 2017. № 3. С. 72–76.
7. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения: учебное пособие для вузов. М.: Альянс, 2016. 392 с.