

УДК 519.6

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ АЛГОРИТМИЗАЦИЯ РАСЧЕТОВ ФЛУКТУАЦИЙ ГРУППОВОГО ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ В КАНАЛАХ ПЕРЕДАЧИ СИГНАЛОВ

¹Агеева Е.Т., ²Афанасьев Н.Т., ¹Ким Д.Б., ¹Медведева О.И., ²Чудаев С.О.¹ФГБОУ ВО «Братский государственный университет», Братск;²ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет», Иркутск, e-mail: spacemaklay@gmail.com

Рассмотрен стохастический интеграл по лучевым траекториям для расчета группового запаздывания сигнала в случайно-неоднородном информационном канале. Для вычисления интеграла предложена схема алгоритмизации с использованием численных и аналитических методов. На основе метода возмущений получено приближенное представление интеграла для флуктуаций групповой задержки сигнала. В отличие от расчетов флуктуаций фазы сигнала, когда в первом приближении метода возмущений интегрирование проводится по невозмущенной траектории, при расчетах флуктуаций группового запаздывания учитываются флуктуации траектории. Для расчета флуктуаций траектории используются интегральные выражения, полученные в результате решения стохастической траекторной задачи с двухточечными краевыми условиями. Интегральное выражение для флуктуаций групповой задержки сигнала преобразовано к специальному виду для построения статистических моментов. Сделан вывод интегральной формулы для дисперсии групповой задержки сигнала в случае произвольного высотного профиля средней диэлектрической проницаемости канала. В условиях квазиоднородного случайного поля неоднородностей канала получены обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка для одновременного расчета средней траектории и дисперсии группового запаздывания сигнала. Решение системы можно найти путем ее численного интегрирования каким-либо из хорошо апробированных численных методов. Показана эффективность предложенной схемы алгоритмизации численно-аналитических расчетов дисперсии групповой задержки сигнала в информационном канале. Приведены результаты математического моделирования частотно-угловых зависимостей среднеквадратичных отклонений группового пути сигнала в ионосферном радиоканале.

Ключевые слова: алгоритмизация, флуктуации, информационные каналы, модели, численные методы, асимптотические разложения, дифференциальные уравнения

NUMERICAL-ANALYTICAL ALGORITHMIZATION OF CALCULATIONS OF GROUP DELAY TIME FLUCTUATIONS IN SIGNAL TRANSMISSION CHANNELS

¹Ageeva E.T., ²Afanasev N.T., ¹Kim D.B., ¹Medvedeva O.I., ²Chudaev S.O.¹Bratsk State University, Bratsk;²Irkutsk State University, Irkutsk, e-mail: spacemaklay@gmail.com

The stochastic integral over the ray paths is considered to calculate the group delay of a signal in a randomly inhomogeneous information channel. To calculate the integral, an algorithm using numerical and analytical methods is proposed. Based on the perturbation method, an approximate representation of the integral for the group delay of the signal is obtained. In contrast to the calculations of the fluctuations of the phase of the signal, when, in the first approximation of the perturbation method, the integration is carried out along an unperturbed trajectory, the fluctuations of the trajectory are taken into account when calculating fluctuations of the group delay. To calculate the trajectory fluctuations, we use integral expressions obtained as a result of solving a stochastic trajectory problem with two-point boundary conditions. The integral expression for fluctuations of the group delay of the signal is transformed to a special form for the construction of statistical moments. An integral formula is derived for the dispersion of the group delay of the signal in the case of an arbitrary height profile of the average dielectric permeability of the channel. Under conditions of a quasi-homogeneous random field of inhomogeneities, ordinary first-order differential equations were obtained for simultaneously calculating the average trajectory and dispersion of the group delay of the signal. The equations can be integrated numerically by means of one of the well-known methods. The efficiency of the proposed algorithm for numerical-analytical calculations of the dispersion of the group delay of the signal in the information channel is shown. The results of mathematical modeling of the frequency-angle dependence of the standard deviations of the group signal path in the ionospheric radio channel are presented.

Keywords: algorithmization, fluctuations, information channels, models, numerical methods, asymptotic expansions, differential equations

Создание эффективных математических моделей сигналов, распространяющихся в каналах передачи информации, подверженных случайным воздействиям, в настоящее время весьма актуально. Эти модели необходимы для предсказания ожидаемых искажений в пространственной и временной структуре сигналов и для мониторинга состояния каналов по

характеристикам пробных зондирующих сигналов. Рассматривая канал как возмущенную динамическую систему, можно получить приближенные аналитические соотношения между флуктуационными характеристиками сигнала и параметрами случайных воздействий. Последующая алгоритмизация этих соотношений позволяет выполнить численное модели-

рование статистических характеристик сигнала при распространении в канале. Используя универсальность численных алгоритмов [1] и простоту получения приближенных аналитических соотношений, можно проводить исследование характеристик сигнала в широком классе возмущений параметров информационного канала. С другой стороны, обращение функциональных соотношений между характеристиками сигнала и параметрами канала позволяет получить оперативную информацию о состоянии канала.

В работе [2] нами была предложена схема оперативной алгоритмизации численно-аналитических расчетов флуктуаций фазы и направления распространения сигнала в стохастическом неоднородном канале. Для прогнозирования оптимальных условий прохождения сигнала через возмущенный канал важно также иметь информацию о флуктуациях его групповой задержки. Ранее в работе [3] были получены аналитические выражения для пространственных автокорреляционных функций группового пути и времени группового запаздывания сигнала, распространяющегося в ионосферном радиоканале, средняя диэлектрическая проницаемость которого изменялась по линейному закону. Для решения ряда практических задач необходимо, чтобы функция диэлектрической проницаемости невозмущенного канала могла быть описана более общими аналитическими моделями высотных профилей. Также для практики требуется использование моделей, которые задают диэлектрическую проницаемость канала в виде дискретных данных с последующей сплайн-интерполяцией этих данных для обеспечения непрерывности производных первого и второго порядка, необходимых в расчетах.

Цель работы заключается в создании оперативной схемы алгоритмизации

численно-аналитических расчетов флуктуаций группового времени задержки сигнала при распространении в случайно-неоднородном канале, средний высотный профиль диэлектрической проницаемости которого задан произвольной аналитической функцией.

Вывод основных теоретических соотношений

В лучевом приближении групповую задержку сигнала можно определить, вычисляя стохастический интеграл по траектории, связывающей корреспондентов [4]:

$$t = \frac{1}{c} \int_0^S \frac{dS}{\sqrt{\epsilon(S)}} = \frac{1}{c} \int_0^{x_t} \frac{dx}{\sqrt{\epsilon} \sin \beta}, \quad (1)$$

где ϵ – случайная функция диэлектрической проницаемости канала, c – скорость света в вакууме, β – угол рефракции луча, dS – элемент дуги, x_t – координата пункта приёма сигнала. Определим флуктуацию групповой задержки сигнала в первом приближении методом возмущений [5, 6]. Введем разложения:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1, \quad (2)$$

$$z = z_0 + z_1, \quad (3)$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1, \quad (4)$$

где ϵ_0 , z_0 , β_0 – соответственно диэлектрическая проницаемость и траекторные характеристики сигнала в невозмущенном канале; ϵ_1 , z_1 , β_1 – возмущение диэлектрической проницаемости канала и флуктуации траекторных характеристик сигнала.

Считая $|\epsilon_1| \ll \epsilon_0$, решение (1) будем искать в виде: $t = t_0 + t_1$. Подставляя разложения (2)–(4) в формулу (1) и проводя асимптотические разложения, в первом приближении для флуктуации групповой задержки получаем

$$t_1 = \frac{1}{c} \int_0^{x_t} \left(\frac{d\beta_0}{dx} \cdot \frac{z_1 \cdot 2 \sin \beta_0}{\sqrt{\epsilon_0}} - \frac{1}{2 \cdot \sin \beta_0} \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0 \sqrt{\epsilon_0}} \right) dx. \quad (5)$$

Важно отметить, что флуктуация траектории $z_1(x)$, входящая в подынтегральное выражение (5), должна удовлетворять двухточечным краевым условиям: $z_1(0) = z_1(x_t) = 0$. Сделаем в (5) замену переменной $dt = \frac{dx}{c \sqrt{\epsilon_0} \sin \beta_0}$. С учетом формы лучевых уравнений [2], получаем

$$t_1 = - \int_0^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} z_1(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t)}{\epsilon_0(t)} dt. \quad (6)$$

где t_k – групповая задержка сигнала в невозмущенном канале в пункте приема x_t .

Для вычисления (6) используем выражение для флуктуации траектории, полученное при решении двухточечной траекторной задачи [2]:

$$z_1(t) = R_1(t) \cdot \int_{t_k}^t \frac{R_2(t') \cdot B_1}{c \cdot \sin \beta_h \cdot R_1(t_k)} dt' - R_2(t) \cdot \int_0^t \frac{R_1(t') \cdot B_1}{c \cdot \sin \beta_h \cdot R_1(t_k)} dt', \quad (7)$$

где β_h – угол входа луча в канал (относительно вертикали),

$$B_1 = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}, R_1 = \frac{\partial z_0}{\partial \beta_h}(t), R_2 = \frac{\partial z_0}{\partial \beta_h}(t_k - t), \quad (8)$$

Подставляя формулу (7) в (6), имеем

$$t_1 = G_1 + G_2 + G_3, \quad (9)$$

где

$$G_1 = -\frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} \int_0^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_1(t) \cdot \left(\int_{t_k}^t \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0} R_2(t') dt' \right) dt + \quad (10)$$

$$G_2 = \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} \int_0^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_2(t) \cdot \left(\int_0^t \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0} R_1(t') dt' \right) dt, \quad (11)$$

$$G_3 = -\frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t)}{\epsilon_0(t)} dt. \quad (12)$$

Интегралы (10), (11) вычислим методом интегрирования по частям [7]. Учитывая двухточечные краевые условия для флуктуаций траектории, получаем

$$G_1 = \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0} R_2(t') \left(\int_0^{t'} \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_1(t) dt \right) dt', \quad (13)$$

$$G_2 = \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0} R_1(t') \left(\int_{t'}^{t_k} \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_2(t) dt \right) dt'. \quad (14)$$

Подставляя (12)–(14) в (9), имеем:

$$t_1 = \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0} R_2(t') \left(\int_0^{t'} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_1(t) dt \right) dt' + \\ + \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0} R_1(t') \left(\int_{t'}^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_2(t) dt \right) dt' - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t)}{\epsilon_0(t)} dt. \quad (15)$$

Введём переобозначения:

$$F_1(t) = \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} R_2(t) P_1(t), \quad (16)$$

$$F_2(t) = \frac{c}{2 \sin \beta_h R_1(t_k)} R_1(t) P_2(t), \quad (17)$$

$$P_1(t) = \int_0^t \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_1(t) dt, P_2(t) = \int_t^{t_k} \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} R_2(t) dt, F(t) = F_1(t) + F_2(t), \quad (18)$$

С учетом (16)–(18), формула (15) принимает вид

$$t_1 = \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t) F(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t)}{\epsilon_0(t)} dt. \quad (19)$$

Заметим, что выражение (19) удобно для составления статистических моментов флуктуации времени группового запаздывания сигнала, поскольку функция $F(t)$ не содержит флуктуаций траекторных характеристик сигнала и случайных возмущений диэлектрической проницаемости канала. В частности, используя (19), для дисперсии групповой задержки имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta t}^2 &= \left\langle \left(\int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t_1) F(t_1) dt_1 - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t_1)}{\epsilon_0(t_1)} dt_1 \right) \cdot \left(\int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t_2) F(t_2) dt_2 - \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t_2)}{\epsilon_0(t_2)} dt_2 \right) \right\rangle = \\ &= \left\langle \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t_1) \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t_2) F(t_1) F(t_2) dt_1 dt_2 \right\rangle - \left\langle \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t_1) F(t_1) \frac{\epsilon_{12}(t)}{\epsilon_0(t_2)} dt_1 dt_2 \right\rangle - \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{2} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \frac{\partial \epsilon_1}{\partial z_0}(t_2) F(t_2) \frac{\epsilon_{11}(t)}{\epsilon_0(t_1)} dt_1 dt_2 \right\rangle + \left\langle \frac{1}{4} \int_0^{t_k} \int_0^{t_k} \frac{\epsilon_1(t_1)}{\epsilon_0(t_1)} \cdot \frac{\epsilon_1(t_2)}{\epsilon_0(t_2)} dt_1 dt_2 \right\rangle, \quad (20)\end{aligned}$$

где $\langle \rangle$ – знак усреднения по ансамблю неоднородностей.

Для вычисления (20) необходимо задать функцию пространственной корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости канала. Используя метод суммарно-разностного интегрирования [4], в случае квазиоднородного случайного поля неоднородностей канала и гауссова корреляционного эллипсоида получаем

$$\sigma_{\Delta t}^2 = 2 \sin^2 \beta_n \frac{\sqrt{\pi}}{a} \frac{1}{c} \int_0^{t_k} [F(t)]^2 \frac{N_1}{\sqrt{\epsilon_0^3}} dt + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi} \cdot a}{c} \cdot \int_0^{t_k} \frac{N_1}{\sqrt{\epsilon_0(z_0, t)^5}} dt, \quad (21)$$

где a – масштаб неоднородностей, N_1 – неоднородная часть корреляционной функции, а интегрирование проводится по суммарной переменной $t = (t_1 + t_2)/2$. При выводе (21) предполагалось, что функция N_1 меняется медленно по сравнению с изменениями гауссова корреляционного эллипсоида.

Полагая предел t_k переменной величиной, интегральное выражение (21) можно представить в дифференциальной форме. Объединяя полученные дифференциальные уравнения с системой невозмущенных лучевых уравнений [2], продифференцированной по свободному параметру β_n , а также с самой системой невозмущенных лучевых уравнений, получаем полную систему дифференциальных уравнений для одновременного расчета средней траектории и дисперсии группового времени задержки сигнала в информационном канале:

$$\begin{aligned}\frac{dz_0}{dt} &= c \sqrt{\epsilon_0} \cos \beta_0, & \frac{dx_0}{dt} &= c \sqrt{\epsilon_0} \sin \beta_0, & \frac{d\beta_0}{dt} &= -c \frac{\partial \sqrt{\epsilon_0}}{\partial z} \sin \beta_0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \beta_n} \right) &= c \cdot \cos \beta_0 \frac{1}{2 \sqrt{\epsilon_0}} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z_0} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial \beta_n} - c \sqrt{\epsilon_0} \cdot \sin \beta_0 \cdot \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_n}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_n} \right) &= -\frac{c}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial^2 \epsilon_0}{\partial z_0^2} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\epsilon_0^3}} \left(\frac{\partial \epsilon_0}{\partial z_0} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial z_0}{\partial \beta_n} \sin \beta_0 - \frac{c}{2 \sqrt{\epsilon_0}} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z_0} \cos \beta_0 \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta_n}, \\ \frac{dP_1}{dt} &= \frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial \beta_n}(t), & \frac{dP_2}{dt} &= -\frac{\sin^2 \beta_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\partial \epsilon_0}{\partial z} \frac{\partial z_0}{\partial \beta_n}(t_k - t) \\ \frac{d\sigma_{\Delta t}^2}{dt} &= \frac{a \sqrt{\pi}}{c} \frac{N_1}{\sqrt{\epsilon_0^3}} \left(\frac{2}{a^2} \sin^2 \beta_n [F(t)]^2 + \frac{1}{4 \epsilon_0} \right). \quad (22)\end{aligned}$$

*Результаты математического
моделирования и их обсуждение*

Для демонстрации работы предложенной схемы алгоритмизации на рис. 1, 2 приведены результаты численных расчетов на основе системы (22) среднеквадратичного отклонения группового пути сигнала $c^* < \sigma_{\Delta} \rangle$, связанного с дисперсией групповой задержки соотношением: $c^* < \sigma_{\Delta} \rangle = \sqrt{c^2 \sigma_{\Delta}^2}$. Расчеты представлены в зависимости от рабочей частоты и угла входа сигнала в ионосферный декаметровый радиоканал ($c^* < \sigma_{\Delta}(\beta_H, f) \rangle$). Модель ϵ_0 задавалась в виде

$$\epsilon_0 = 1 - \chi \frac{f_{кр}^2}{f^2} \exp \left(- \left(\frac{z - z_{me}}{y_{me}} \right)^2 \right) - \frac{f_{кр}^2}{f^2} \exp \left(- \left(\frac{z - z_m}{y_m} \right)^2 \right), \quad (23)$$

где z_{me} , z_m , y_{me} , y_m , $f_{кр}$, $f_{кр}$ – высоты максимумов электронной концентрации, полутолщины и критические частоты ионосферных слоев E и $F2$ соответственно; f – рабочая частота; параметр χ позволяет включить (исключить) слой E . Неоднородная часть корреляционной функции представлялась

зависимостью: $N_1 = \gamma^2 (1 - \epsilon_0)^2$, где γ^2 – интенсивность неоднородностей электронной концентрации. Параметры моделей составляли: $z_{me} = 125$ км, $y_{me} = 25$ км, $f_{кр} = 3$ МГц, $z_m = 300$ км, $y_m = 100$ км, $f_{кр} = 6$ МГц, $\gamma^2 = 0,008$, $a = 10$ км, $f = 6 \div 30$ МГц. Параметр χ принимал значения 0 и 1. Из рис. 1 следует, что в частотно-угловых зависимостях среднеквадратичного отклонения группового пути сигнала при распространении в однослойном ($\chi = 0$) ионосферном радиоканале имеются области повышенных значений. Возрастание флуктуаций группового пути связано с увеличением ионосферного участка рассеяния сигнала при отражении вблизи максимума ионизации слоя $F2$. На более высоких рабочих частотах максимумы $c^* < \sigma_{\Delta} \rangle$ смещаются в область больших углов входа сигнала в канал, так как условия пробоя ионосферы возникают уже внутри канала на высотах ниже уровня максимальной ионизации. Уменьшение максимальных значений флуктуаций на высоких частотах связано с дисперсионными свойствами ионосферы. Учет нижележащей ионизации ионосферы ($\chi = 1$) приводит к дополнительному максимуму среднеквадратичного отклонения группового пути сигнала (рис. 2), так как появляется возможность пробоя сигнала сквозь ионосферный слой E .

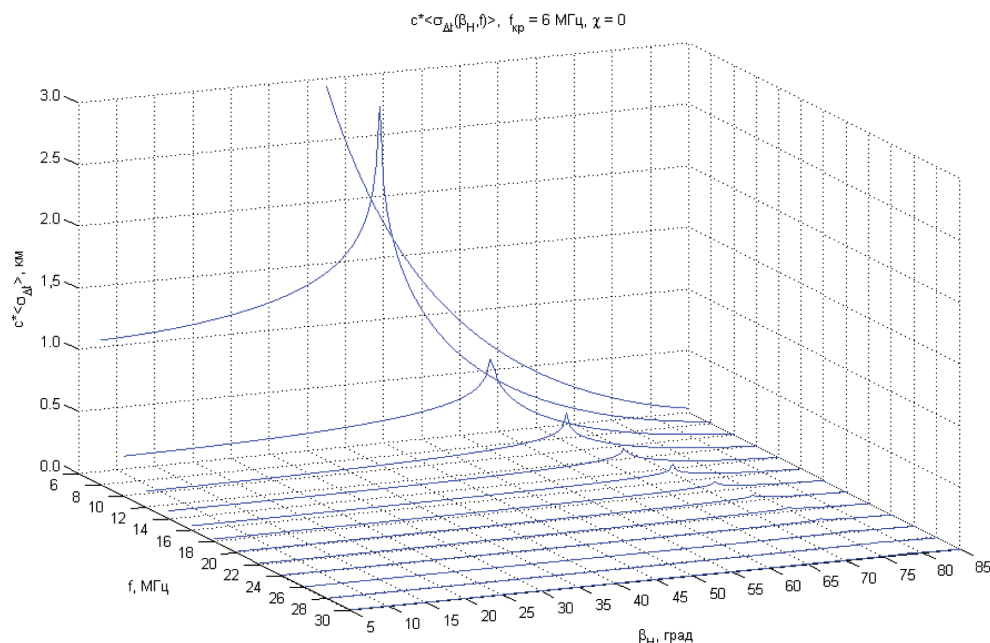


Рис. 1. Частотно-угловые зависимости среднеквадратичных отклонений группового пути сигнала в случайно-неоднородном ионосферном радиоканале с диэлектрической проницаемостью, заданной однослойной моделью

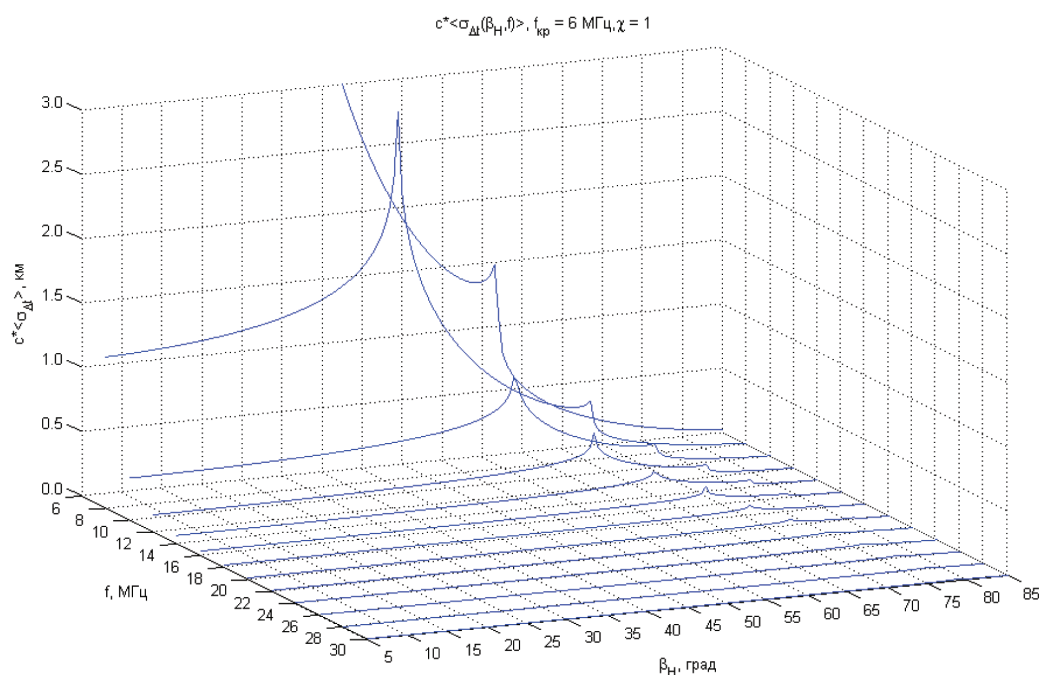


Рис. 2. Среднеквадратичные отклонения группового пути сигнала в ионосферном радиоканале с учетом нижележащего слоя E

Заключение

Предложена схема алгоритмизации расчетов стохастического интеграла по траектории для флуктуаций группового времени задержки и группового пути сигнала в случайно-неоднородном информационном канале. На основе метода возмущений получена аналитическая интегральная формула для отдельной реализации флуктуаций групповой задержки сигнала в канале. В отличие от расчетов флуктуаций фазы сигнала, когда в первом приближении метода возмущений интегрирование проводится по невозмущенной траектории, при расчетах флуктуаций группового запаздывания учтены флуктуации траектории. Для расчета траекторных флуктуаций, входящих в интегральную формулу, использованы результаты решения стохастической траекторной задачи с двухточечными краевыми условиями. Выполнены аналитические преобразования, позволяющие привести стохастический интеграл к виду, удобному для составления статистических моментов групповой задержки сигнала. Для описания поля случайных неоднородностей канала использованы представления о пространственном корреляционном эллипсоиде. Получено интегральное выражение для дисперсии флуктуаций группового времени задержки в канале передачи сигнала. Выражение для дисперсии задержки сведено к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

первого порядка. Получена полная система дифференциальных уравнений для одновременного численного расчета дисперсии групповой задержки и средней траектории сигнала в случае произвольного высотного профиля средней диэлектрической проницаемости случайно-неоднородного канала. Показана эффективность предложенной схемы алгоритмизации расчетов стохастического интеграла по траектории в задаче моделирования частотно-угловых зависимостей среднеквадратичных отклонений группового пути сигнала в ионосферном радиоканале.

Список литературы

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. СПб.: Лань, 2011. 672 с.
2. Агеева Е.Т., Афанасьев Н.Т., Ким Д.Б., Чудаев С.О. Оперативные алгоритмы расчета характеристик лучевых полей в стохастических неоднородных средах // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 2. С. 9–14.
3. Вологдин А.Г., Власова О.К., Приходько Л.И. Флуктуации группового пути и времени группового запаздывания сигнала при наклонном отражении волн от плоской среды // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 10. С. 1194–1198.
4. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения: теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. М.: Физматлит, 2008. Т. 1. 317 с.
5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н.Р. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во ЛКИ, 2010. 472 с.
6. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
7. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Ч. 1. СПб.: Лань, 2019. 444 с.