

УДК 681.5

## ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ

Ильясов Б.Г., Сaitова Г.А., Елизарова А.В.

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа,  
e-mail: elizarovaanastasia@gmail.com

Задача управления объектами с запаздыванием довольно непростая. Наличие задержки в контуре управления приводит к возрастанию фазового сдвига, что способно спровоцировать неустойчивость замкнутой системы, кроме всего прочего при наличии небольших коэффициентов усиления регулятора. Проблема еще больше усугубляется, если объект управления многомерный. В работе исследуется многосвязная система автоматического управления отдельно и одновременно с запаздыванием в прямых и перекрестных каналах связи. Предлагается оценка критического значения запаздывания на основе системного подхода к описанию многосвязной системы в сочетании с частотными методами анализа устойчивости. Разработана методика оценки критического значения запаздывания в прямых и перекрестных связях многосвязной системы автоматического управления с помощью метода декомпозиции. Еще одна задача, решаемая в работе – определение устойчивости многосвязной системы с запаздыванием в подсистемах и связях с помощью системного подхода для описания многосвязной системы автоматического управления через характеристики связей и характеристики подсистем. В работе приведены примеры, наглядно демонстрирующие использование предложенных методик и для нахождения критического значения запаздывания, и для оценки устойчивости MCSAU. Результаты исследования подтверждены путем моделирования с использованием пакета MATLAB SIMULINK.

**Ключевые слова:** запаздывание, устойчивость, многосвязная система автоматического управления, перекрестные связи, прямые каналы, метод декомпозиции, критическое запаздывание, характеристическое уравнение

## INVESTIGATION OF MULTI-CONNECTED SYSTEM OF AUTOMATIC CONTROL WITH DELAY DECOMPOSITION METHOD

Ilyasov B.G., Saitova G.A., Elizarova A.V.

Ufa State Aviation Technical University, Ufa, e-mail: elizarovaanastasia@gmail.com

The problem of controlling objects with time delay is quite complicated. The presence of a delay in the control loop leads to an increase in the phase shift, which can provoke instability of the closed system, including in the presence of small gain factors of the regulator. The problem is get worse if the control object is multidimensional. In article investigates a multi-connected automatic control system separately and concurrently with delay in direct and cross communication channels. The estimation of the critical value of the delay on the basis of a systematic approach to the description of a multi-connected system in combination with frequency methods of stability analysis is proposed. The technique of estimation of the critical value of delay in direct and cross-links of a multi-connected automatic control system using the decomposition method is developed. Another problem solved in this article is to determine the stability of a multi-connected system with delay in subsystems and connections using a system approach to describe a multi-connected automatic control system through the characteristics of connections and characteristics of subsystems. In article presents examples that demonstrate the use of the proposed techniques and to find the critical value of the delay, and to assess the stability of the MCSAC. The results of the study were confirmed by simulation using MATLAB SIMULINK package.

**Keywords:** delay, stability, multi-connected automatic control system, cross-links, direct channels, decomposition method, critical delay, characteristic equation

В работе исследуется многосвязная система автоматического управления (МСАУ), где одновременно осуществляется регулирование нескольких взаимосвязанных координат и наблюдается явление запаздывания. Далее будем рассматривать однотипную МСАУ – многосвязная система с одинаковыми подсистемами.

Задача управления объектами с запаздыванием довольно непростая. Наличие задержки в контуре управления приводит к возрастанию фазового сдвига, что способна спровоцировать неустойчивость замкнутой системы, а именно при наличии небольших коэффициентах усиления регулятора. Проблема еще больше усугу-

бляется, если объект управления многомерный.

Постановка задачи: рассматривается линейная многосвязная система автоматического управления, состоящая из множества однородных сепаратных подсистем и связей через многомерный объект управления:

$$\begin{cases} X(s) = W(s, \tau)U(s), \\ U(s) = R(s)(X^0(s) - X(s)), \end{cases} \quad (1)$$

где  $X^0(s)$ ,  $X(s)$ ,  $U(s)$  – векторы задающих, регулируемых, управляющих воздействий соответственно;  $W(s, \tau) = \|W_{ij}(s, \tau)\|_{n \times n}$  – матричная передаточная функция (МПФ) многомерного объекта по управляю-

щим воздействиям, с запаздыванием;  $R(s) = \text{diag}\{R_1(s), R_2(s), \dots, R_n(s)\}$  – МПФ сепаратных регуляторов.

С целью изучения МСАУ с запаздыванием используется подход, представленный в труде [1], при котором линейная МСАУ описывается на уровне физических подсистем и многомерных элементов связи между ними.

Цель исследования: разработка методов оценки критического значения запаз-

дывания в прямых и перекрестных связях МСАУ с помощью метода декомпозиции, на основе описания системы через характеристики связей и характеристики подсистем [1].

### Материалы и методы исследования

Рассмотрим однородную МСАУ с запаздыванием в подсистемах. Поскольку подсистемы однотипные, то их передаточные функции (ПФ) можно представить как

$$R_1 W_{11} e^{-\tau s} = R_2 W_{22} e^{-\tau s} = \dots = R_n W_{nn} e^{-\tau s} = R W e^{-\tau s}, \quad (2)$$

а ПФ индивидуальных характеристик подсистем примут вид [1]:

$$\Phi_{ii}(\tau, s) = \frac{R_i(s) W_{ii}(s) e^{-\tau s}}{1 + R_i(s) W_{ii}(s) e^{-\tau s}} = \frac{R(s) W(s) e^{-\tau s}}{1 + R(s) W(s) e^{-\tau s}}, \quad \Phi_{ii}(\tau, s) = \Phi(\tau, s), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Для полной МСАУ, состоящей из  $n$  подсистем и соответствующей системы уравнений (1), характеристика связи (ХС) в общем виде между  $k$  подсистемами имеет вид

$$h_k(s) = \frac{\det[W_{ij}(s) \gamma_{ij}]_{k \times k}}{\det[W_{ij}(s) \delta_{ij}]_{k \times k}}, \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ 1, & i \neq j, \end{cases} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad k = \overline{2, n}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Характеристическое уравнение однотипной МСАУ имеет вид

$$D(\Phi, h) = 1 + h_2(s) \Phi^2(s) + h_3(s) \Phi^3(s) + \dots + h_n(s) \Phi^n(s) = 0. \quad (4)$$

Перепишем равенство (4) сравнительно разомкнутых подсистем  $W(\tau, s) = R W e^{-\tau s}$  в общем виде для удобства вычисления критического значения запаздывания  $\tau_k$  [2]:

$$D(W, h) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} W(\tau, s) + \left( \binom{n}{2} + h_2 \right) W^2(\tau, s) + \dots + \left( \binom{n}{n} + \sum_{i=2}^n h_i \right) W^n(\tau, s) = 0. \quad (5)$$

Проанализируем уравнение связей

$$D(a) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \left( \binom{n}{2} + h_2 \right) x^2 + \dots + \left( \binom{n}{n} + \sum_{i=2}^n h_i \right) x^n = 0, \quad (6)$$

относительно переменной  $x$ , что выходит из (5) с помощью подстановки  $W(\tau, s) = x$ , где запаздывание в подсистемах.

Перенеся на комплексную плоскость годограф функции  $W(j\omega)$  с запаздыванием, а также корни характеристического уравнения связи (6)  $x_i, i = \overline{1, n}$ , можно найти критическое значение запаздывания  $\tau_{кр}$  [3].

Критическое запаздывание находится в точке пересечения корня уравнения (6)  $x_i^*(j\omega)$  и годографа подсистемы  $W(j\omega)$ . В МСАУ для нахождения критического значения запаздывания  $\tau_{кр}$  необходимо, чтобы годограф  $W(j\omega)$  построенный на одной комплексной плоскости с корнями уравнения (6), проходил через ближайший из них и не охватывал при этом другие корни, то есть МСАУ оказывается на границе устойчивости. Значения  $\omega_{кр}$  (частота среза) и  $\tau_{кр}$  определяются из выражения:  $x_i^*(j\omega) = W(j\omega, \tau)$ . Из этого условия получаем систему из двух уравнений относительно  $\tau$  и  $\omega_0$  [4]:

$$|W(\tau, \omega_0)| = |x_i^*(j\omega)|, \quad \arg W(\tau, \omega_0) = \arg x_i^*(j\omega). \quad (7)$$

Минимальным из найденных значений  $\tau_i$  является критическое значение запаздывания  $\tau_{кр} = \min\{\tau_i\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  [4].

### Результаты исследования и их обсуждение

*Пример 1.* Многосвязная система автоматического управления с запаздыванием в подсистемах.

В качестве примера рассмотрим двусвязную систему. Объектом исследования является многомерный объект с запаздыванием в подсистемах. ПФ разомкнутой подсистемы равна

$$W = R W e^{-\tau s} = \frac{e^{-\tau s}}{0,8s^2 + s},$$

характеристика связи  $h_2 = 0,2$  [5].

Характеристическое уравнение системы:

$$1 + 2W + (1 + h_2)W^2 = 0.$$

Корни уравнения связи  $1 + 2x + (1,2)x^2 = 0$  равны:

$$x_1 = -0,56 + 0,5j; \quad x_2 = -0,56 - 0,5j.$$

С целью расчета значения критического запаздывания используем графоаналитический метод, который эффективен в случае, если нет необходимости в высокой точности решений дифференциальных уравнений низкого порядка. В зависимости от способа построения графиков изменяется достоверность этого метода, которая еще и возрастает при увеличении их масштаба (рис. 1).

Так как годограф с запаздыванием  $W(j\omega)$  пересекает один из корней уравнения связи, следовательно, система на грани устойчивости. С помощью графоаналитического способа найдено критическое значение запаздывания  $\tau_{кр} = 0,15$  сек.

Чтобы определить устойчивость МСАУ с запаздыванием в подсистемах, воспользуемся частотным критерием. По характеристическому уравнению (4) получаем уравнение связи

$$D(s, x) = 1 + h_2(s)x^2(s) + \dots + h_n(s)x_n(s) = 0. \quad (8)$$

На одной комплексной плоскости строим годограф  $\Phi^*(j\omega, \tau)$  (подсистема с запаздыванием) для всех  $\omega \in (0, +\infty)$  и корни уравнения связи (8). Согласно критерию устойчивости для многомерных систем необходимо и достаточно, чтобы годограф амплитудно-фазовой характеристики подсистем  $\Phi^*(j\omega, \tau)$ , для всех  $\omega \in (0, +\infty)$ ,

построенный на плоскости корней уравнения связи, не охватывал ни один из его корней (рис. 2). На рис. 2 показана устойчивая МСАУ, где  $\Phi(j\omega)$  – годограф без запаздывания.

*Многовязная система автоматического управления с запаздыванием в перекрестных связях*

Рассмотрим однородную МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях. Для данного вида системы характеристическое уравнение одноподтипной МСАУ:

$$D(\Phi, h) = 1 + h_2^*(s)\Phi^2(s) + h_3^*(s)\Phi^3(s) + \dots + h_n^*(s)\Phi^n(s) = 0,$$

где

$$h_k^*(s) = h_k(s)e^{-k\tau s}, \quad k = \overline{2, n},$$

$$\Phi(s) = \frac{R(s)W(s)}{1 + R(s)W(s)}.$$

Введем переменную  $W_p$ , которая обозначает разомкнутую систему, и перепишем относительно нее характеристическое уравнение. Так как  $W_p = R(s)W(s)$ , следовательно характеристическое уравнение МСАУ примет вид [6]:

$$D(W, h) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}W_p(s) + \left( \binom{n}{2} + h_2e^{-2\tau s} \right)W_p^2(s) + \dots + \left( \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^n h_i e^{-n\tau s} \right)W_p^n(\tau, s) = 0. \quad (9)$$

Уравнение связи относительно переменной  $W_p = x$  (10):

$$D(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \left( \binom{n}{2} + h_2e^{-2\tau s} \right)x^2 + \dots + \left( \binom{n}{n} + \sum_{i=1}^n h_i e^{-n\tau s} \right)x^n = 0. \quad (10)$$

Решением уравнения связи (10) будут корневые годографы  $x_i(j\omega)$  [3, 4].

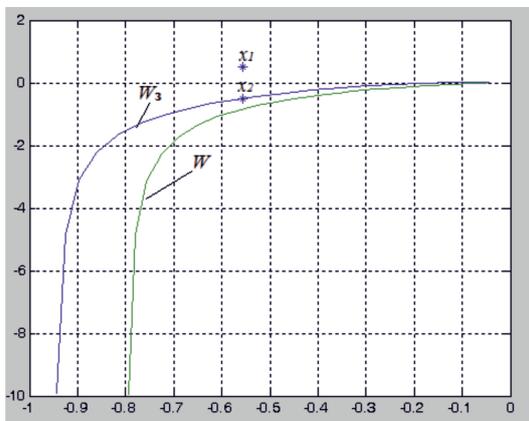


Рис. 1. Годограф МСАУ с критическим значением запаздывания

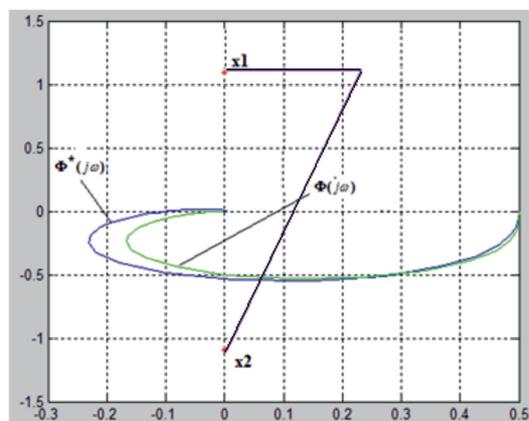


Рис. 2. Годограф МСАУ с запаздыванием в подсистемах, построенный на плоскости корней уравнения связи

*Пример 2.* Рассмотрим МСАУ с двумя подсистемами и запаздыванием в перекрестных связях. ПФ подсистемы равна

$$W_p = RW = \frac{1}{0,8s^2 + s}, \text{ характеристика связи}$$

$$h_2 = 0,2e^{-\tau s}.$$

Корни уравнения связи (10) при  $\tau = 0$  в перекрестных связях и  $\omega = 0$ :  $1 + 2x + (1 + 0,2 * e^{-\tau s})x^2 = 0$  (10) равны  $x_1 = -0,5611 + 0,5442i$ ;  $x_2 = -0,5509 - 0,4537i$ .

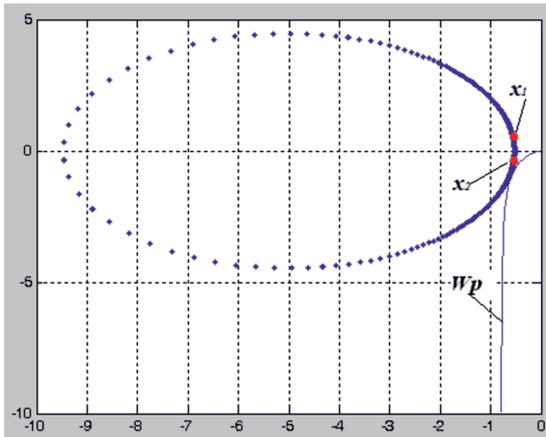


Рис. 3. Годограф МСАУ с запаздыванием в перекрестных связях

При постепенном увеличении значения запаздывания  $\tau$  видим, что корневые годографы  $x_i(j\omega)$  не пересекают годографы под-

систем. Это означает, что запаздывание не влияет на устойчивость системы (рис. 3). На устойчивость разомкнутой системы можно повлиять, изменив коэффициенты характеристик связей  $h_2$ .

Как видим, используя метод декомпозиции при построении годографа подсистем и связей, предоставляется возможность применять известные частотные критерии устойчивости и вычислять критические значения запаздывания  $\tau_{кр}$ .

*Многосвязная система автоматического управления с запаздыванием одновременно в подсистемах и перекрестных связях*

В общем виде характеристическое уравнение МСАУ с однотипными подсистемами и запаздыванием одновременно в подсистемах и перекрестных связях имеет вид

$$D(\Phi, h) = 1 + h_2^*(s)\Phi^2(s) + h_3^*(s)\Phi^3(s) + \dots + h_n^*(s)\Phi^n(s) = 0,$$

где

$$h_k^*(s) = h_k(s)e^{-k\tau s}, \quad k = \overline{2, n},$$

$$\Phi(s) = \frac{R(s)W(s)e^{-\tau s}}{1 + R(s)W(s)e^{-\tau s}}.$$

Запишем по аналогии характеристическое уравнение МСАУ относительно разомкнутых подсистем:

$$D(W, h) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}W(\tau, s) + \left( \binom{n}{2} + h_2e^{-2\tau s} \right)W^2(\tau, s) + \dots + \left( \binom{n}{n} + \sum_{i=2}^n h_i e^{-i\tau s} \right)W^n(\tau, s) = 0, \quad (11)$$

и уравнение связи

$$D(a) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \left( \binom{n}{2} + h_2e^{-2\tau s} \right)x^2 + \dots + \left( \binom{n}{n} + \sum_{i=2}^n h_i e^{-i\tau s} \right)x^n = 0. \quad (12)$$

Далее, если построить на комплексной плоскости годограф разомкнутых подсистем  $W_p(j\omega, \tau)$  и корневой годограф уравнения связи (12), то можно найти критическое значение запаздывания  $\tau_{кр}$  и исследовать систему на устойчивость (рис. 4).

Значения  $\tau_{кр}$  определяются из выражения

$$\Psi_1 = \varphi_0(\omega) - \omega_{1cp} \tau_{икр}, \quad \tau_{икр} = (\varphi_0(\omega) - \Psi_1) / \omega_{1cp},$$

где  $\Psi_1 = \arg x_1$ ,  $\varphi_0(\omega_{1cp}) = \arg W_p(j\omega)$  на частоте  $\omega_{1cp} = 1$ .

Минимальным из найденных значений  $\tau_i$  – критическое значение запаздывания  $\tau_{кр} = \min\{\tau_{икр}\}$ ,  $i = 1, n$ . В примере 2 критическое значение запаздывания равно  $\tau_{кр} = 0,087$  сек.

### Заключение

В ходе выполненной работы применен способ оценки критического значения запаздывания в прямых и перекрестных связях МСАУ с помощью метода декомпозиции.

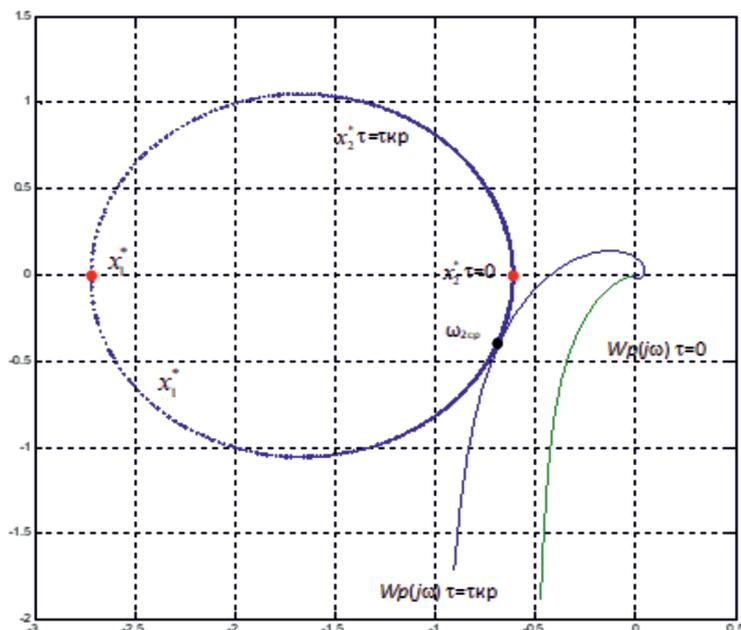


Рис. 4. Годограф МСАУ с запаздыванием в прямых и перекрестных связях

С помощью известного критерия устойчивости для МСАУ рассмотрена ее устойчивость с запаздыванием в подсистеме, перекрестных связях. Также рассмотрен алгоритм определения критического значения запаздывания для МСАУ по разомкнутым и замкнутым подсистемам. Проверена эффективность разработанной методики нахождения критического значения запаздывания  $\tau_{кр}$ . Результаты и проверка системы на устойчивость подтверждены моделированием МСАУ по результатам переходных процессов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Гранты РФФИ № 18-08-00702 А, 18-08-01299 А).

#### Список литературы

1. Ильясов Б.Г., Кабальнов Ю.С. Исследование устойчивости однопольных многосвязных систем автоматического управления с гомонными связями между подсистемами // Автоматика и телемеханика. 1995. № 7. С. 82–90.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического управления. СПб.: Изд-во «Профессия», 2014. 752 с.
3. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2016. 441 с.
4. Ильясов Б.Г., Сайтова Г.А. Анализ устойчивости динамических систем, представленных в полиномиальной векторно-матричной форме // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 3–10.
5. Кудинов Ю.И., Пашенко Ф.Ф. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB SIMULINK): учебное пособие. СПб.: Лань, 2016. 256 с.
6. Ерофеев А.А. Теория автоматического управления: учебник для вузов. СПб.: Политехника, 2008. 302 с.