

УДК 623.746.-519:517.935.4

## УПРОЩЕНИЕ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ И В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

<sup>1,2</sup>Карпунин А.А., <sup>1</sup>Титков И.П.<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», Москва, e-mail: ksans@yandex.ru, titkov.ivan.bmstu@gmail.com;<sup>2</sup>ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», Москва

В современной теории управления при описании движения беспилотного летательного аппарата (БПЛА) увеличивается потребность в получении и использовании универсальных математических моделей, с различной степенью полноты этих описаний. Целью работы является получение модели, учитывающей влияние перекрестных связей, и оценка этого влияния на точность модели. Рассматривается математическая модель пространственного движения БПЛА типа квадрокоптер с учетом возмущений и перекрестных связей из-за наличия гироскопических моментов при вращении аппарата, двигателей и пропеллеров. Выводится система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши, описывающая движение БПЛА в трехмерном пространстве. Производится получение ее частного случая без учета возмущений и перекрестных связей. Осуществляется линеаризация упрощенной модели. Осуществляется формирование линеаризованной системы дифференциальных уравнений, описывающей движение в вертикальной плоскости. Исследуются результаты моделирования движения БПЛА варианта с учетом возмущений и перекрестных связей, а также варианта без их учета. Осуществляется оценка влияния перекрестных связей на движение БПЛА. По результатам моделирования можно дать рекомендации по использованию полученной системы с учетом перекрестных связей, поскольку данная система повышает точность описания движения квадрокоптера.

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, математическая модель, линеаризация, пространственное движение, перекрестная связь

## SIMPLIFICATION AND LINEARIZATION OF THE MATHEMATICAL MODEL OF THE MOTION OF THE UNLIMITED AIRCRAFT IN SPACE AND IN THE VERTICAL PLANE

<sup>1,2</sup>Karpunin A.A., <sup>1</sup>Titkov I.P.<sup>1</sup>Federal State Budgetary Education Institution of Higher Education «Bauman Moscow State Technical University», Moscow, e-mail: ksans@yandex.ru, titkov.ivan.bmstu@gmail.com;<sup>2</sup>Peoples Friendship University of Russia, Moscow

In modern control theory, when describing the movement of an unmanned aerial vehicle (UAV), there is an increasing need for obtaining and using universal mathematical models, with varying degrees of completeness of these descriptions. The aim of the work is to obtain a model that takes into account the effect of cross-links, and to estimate this influence on the accuracy of the model. A mathematical model of the spatial motion of an unmanned aerial vehicle (UAV) of the quadrotor type is considered, taking into account disturbances and cross-connections due to the presence of gyroscopic moments during the rotation of the vehicle, engines and propellers. A system of differential equations in the normal form of Cauchy describing the motion of the UAV in three-dimensional space is derived. Its special case without taking into account disturbances and cross-connections is obtained. The simplified model is linearized. The formation of a linearized system of differential equations describing the motion in the vertical plane is carried out. The results of the simulation of the UAV motion of the variant taking into account disturbances and cross-links, as well as the variant without them are investigated. The evaluation of the influence of cross-connections on the movement of the UAV is occurred. According to the simulation results, recommendations can be made on the use of the resulting system with regard to cross-links, since this system improves the accuracy of the description of the quadcopter motion.

**Keywords:** drone, quadrotor, mathematical model, linearization, spatial motion, cross-connection

В связи с ростом научно-прикладного интереса к тематике применения беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) мультироторного типа увеличивается потребность в получении и использовании универсальных математических моделей, описывающих движение БПЛА с различной степенью полноты этих описаний [1]. Большинство авторов предпринимает попытки описания движения БПЛА с помощью систем линеа-

ризованных уравнений, поскольку для нелинейных уравнений затруднен аналитический синтез системы управления [2, 3]. Описание математической модели движения БПЛА с помощью уравнений Ньютона – Эйлера с учетом перекрестных связей представлено в [4–6]. С помощью обобщенных координат и метода Лагранжа формируется математическая модель движения БПЛА в работе [7]. Линеаризованные и упрощенные модели

движения БПЛА лежат в основе синтеза регуляторов и фильтров: LQR-регуляторов [8], LQG-регуляторов [9], фильтра Калмана [10],  $L_1$ -оптимизации [11]; управление со скользящим режимом [12, 13]. В работе [14] рассматривается синтез регуляторов с помощью линеаризации обратной связи.

В большинстве работ после получения систем управления, синтезированных с использованием упрощенных моделей, не выполняется оценка влияния исключенных из рассмотрения факторов. При синтезе систем автоматического управления движением БПЛА с использованием упрощенных моделей необходимо учитывать их адекватность.

Цель работы – получение модели, учитывающей влияние перекрестных связей, и оценка этого влияния на точность модели.

#### Математическая модель движения БПЛА

На рис. 1 показаны взаимные расположения нормальной земной и связанной систем координат, положительные направления отсчета углов рыскания, тангажа и крена, сила тяги и моменты, создаваемые винтами, направления вращения винтов.

Переход из связанной системы координат (с.к.) в нормальную земную с.к. возможно выполнить с использованием матрицы перехода [15]:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \sin \psi & \sin \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \cos \gamma \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \cos \vartheta \\ -\cos \vartheta \sin \psi & \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \cos \psi & -\sin \gamma \sin \psi \sin \vartheta + \cos \gamma \cos \psi \end{bmatrix},$$

где  $\vartheta$  – угол тангажа,  $\gamma$  – угол крена,  $\psi$  – угол рыскания.

При моделировании БПЛА приняты следующие допущения: БПЛА симметричен; центр масс расположен в начале координат связанной системы; коэффициенты силы тяги винтов равны; коэффициенты моментов, создаваемых винтами, равны. Перекрестные связи представлены гироскопическими моментами, возникающими при вращении БПЛА.

В силу симметрии тензор инерции БПЛА имеет вид

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix},$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – осевые моменты инерции БПЛА.

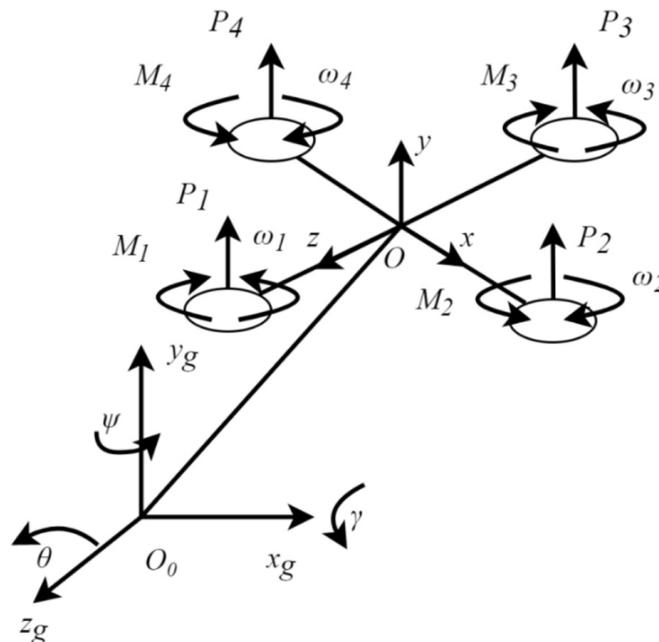


Рис. 1. Системы координат

Сила тяжести в земной с.к.:  $\mathbf{G}_g = [0, -mg, 0]^T$ , где  $m$  – масса БПЛА,  $g$  – ускорение силы тяжести. Сила сопротивления воздуха в земной с.к.:  $\mathbf{f}_g = [-f_x, -f_y, -f_z]^T$ , где  $f_x, f_y, f_z$  – проекции силы сопротивления воздуха в земной с.к. Сила тяги в связанной с.к.:

$$\mathbf{P}_b = [P_x, P_y, P_z]^T = [0, P, 0]^T,$$

$$P = \sum_{i=1}^4 P_i = \sum_{i=1}^4 c_{P_i} \omega_i^2,$$

$$c_{P_i} = \frac{1}{2} \rho c_a S_i r_i^2,$$
(1)

где  $P$  – суммарная тяга,  $P_i$  – сила тяги  $i$ -го винта,  $c_{P_i}$  или  $k_i$  – коэффициент силы тяги  $i$ -го винта,  $r_i$  – радиус  $i$ -го винта,  $S_i$  – площадь ометаемой лопастями  $i$ -го винта поверхности,  $\rho$  – плотность воздуха,  $c_a$  – коэффициент подъемной силы винта.

Сила тяги в нормальной земной с.к.:  $\mathbf{P}_g = [P_{x_g}, P_{y_g}, P_{z_g}] = \mathbf{R}\mathbf{P}_b$ .

Уравнение динамики движения центра масс БПЛА в нормальной земной с.к.:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{\text{цм}_g} = \frac{\mathbf{G}_g + \mathbf{P}_g + \mathbf{f}_g}{m}.$$

Уравнение динамики движения ц.м. БПЛА в нормальной земной с.к. в проекциях на оси этой с.к.:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{P(-\cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \sin \psi) - f_x}{m}, \\ \ddot{y} = \frac{P(\cos \gamma \cos \vartheta) - f_y - mg}{m}, \\ \ddot{z} = \frac{P(\cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta + \sin \gamma \cos \psi) - f_z}{m}. \end{cases}$$
(2)

Угловая скорость вращения БПЛА в связанной с.к.:  $\mathbf{w}_b = [w_x, w_y, w_z]$ , где  $w_x, w_y, w_z$  – проекции вектора угловой скорости аппарата в связанной с.к. Производная угловой скорости вращения БПЛА в связанной с.к.:  $\boldsymbol{\varepsilon}_b = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z]$ , где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – проекции производной вектора угловой скорости аппарата в связанной с.к.

Вектор кинетического момента:  $\mathbf{K}_b = \mathbf{I}\mathbf{w}_b$ . Производная кинетического момента:  $\dot{\mathbf{K}}_b = \mathbf{I}\boldsymbol{\varepsilon}_b$ . Изменение кинетического момента:  $\dot{\mathbf{K}}_b + \mathbf{w}_b \times \mathbf{K}_b = \mathbf{M}_{R_b}$ , где  $\mathbf{M}_{R_b}$  – результирующий момент в связанной с.к.

Уравнения динамики углового движения в связанной с.к. можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{w}_x = \frac{I_y - I_z}{I_x} w_y w_z + \frac{M_{R_x}}{I_x}, \\ \dot{w}_y = \frac{I_z - I_x}{I_y} w_x w_z + \frac{M_{R_y}}{I_y}, \\ \dot{w}_z = \frac{I_x - I_y}{I_z} w_x w_y + \frac{M_{R_z}}{I_z}, \end{cases}$$
(3)

где  $M_{R_x}, M_{R_y}, M_{R_z}$  – проекции результирующего момента.

Результирующий момент состоит из момента, создаваемого винтами, и гироскопических моментов двигателей и винтов. В этой работе инерционность винтов не учитывается.

Проекция результирующего момента с учетом моментов, создаваемых винтами, гироскопических моментов двигателей и винтов и возмущающих моментов определяются как сумма соответствующих проекций:

$$\begin{aligned} M_{R_x} &= M_{q_x} + M_{p_x} + M_{m_x} + M_{f_x}, \\ M_{R_y} &= M_{q_y} + M_{p_y} + M_{m_y} + M_{f_y}, \\ M_{R_z} &= M_{q_z} + M_{p_z} + M_{m_z} + M_{f_z}. \end{aligned}$$
(4)

Используя кинематические уравнения Эйлера, изменения углов Эйлера определяются через проекции угловой скорости следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = w_x \cos \vartheta - w_y \sin \vartheta, \\ \dot{\psi} = (w_x \sin \vartheta + w_y \cos \vartheta) / \cos \gamma, \\ \dot{\vartheta} = w_z + \sin \vartheta \operatorname{tg} \gamma w_x + \cos \vartheta \operatorname{tg} \gamma w_y. \end{cases} \quad (5)$$

Таким образом, система нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -\frac{f_x - (\sin x_{13} \sin x_{14} - \cos x_{13} \cos x_{14} \sin x_{15})P}{m}, \\ \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_4 = -\frac{(f_y + gm - \cos x_{13} \cos x_{15})P}{m}, \\ \dot{x}_5 = x_6, & \dot{x}_6 = -\frac{f_z - (\cos x_{14} \sin x_{13} + \cos x_{13} \sin x_{14} \sin x_{15})P}{m}, \\ \dot{x}_7 = x_8, & \dot{x}_8 = \frac{M_{R_x}}{I_x} + \frac{I_y - I_z}{I_x} x_{10} x_{12}, \\ \dot{x}_9 = x_{10}, & \dot{x}_{10} = \frac{M_{R_y}}{I_y} + \frac{-I_x + I_z}{I_y} x_8 x_{12}, \\ \dot{x}_{11} = x_{12}, & \dot{x}_{12} = \frac{M_{R_z}}{I_z} + \frac{I_x - I_y}{I_z} x_8 x_{10}, \\ \dot{x}_{13} = x_8 \cos x_{15} - x_{10} \sin x_{15}, \\ \dot{x}_{14} = x_{10} \cos x_{15} + x_8 \frac{\sin x_{15}}{\cos x_{13}}, \\ \dot{x}_{15} = x_{12} + x_{10} \cos x_{15} \operatorname{tg} x_{13} + x_8 \sin x_{15} \operatorname{tg} x_{13}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = y$ ,  $x_4 = \dot{y}$ ,  $x_5 = z$ ,  $x_6 = \dot{z}$ ,  $x_7 = w_x$ ,  $x_8 = \dot{w}_x$ ,  $x_9 = w_y$ ,  $x_{10} = \dot{w}_y$ ,  $x_{11} = w_z$ ,  $x_{12} = \dot{w}_z$ ,  $x_{13} = \gamma$ ,  $x_{14} = \psi$ ,  $x_9 = w_y$ ,  $x_{15} = \vartheta$ .

Математическая модель БПЛА (6) без учета возмущений и перекрестных связей в связанной системе координат в форме Коши может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_7 = x_8, \\ \dot{x}_2 = \frac{(\sin x_{13} \sin x_{14} - \cos x_{13} \cos x_{14} \sin x_{15})P}{m}, & \dot{x}_8 = \frac{M_{R_x}}{I_x}, \\ \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_9 = x_{10}, \quad \dot{x}_{13} = x_8, \\ \dot{x}_4 = -\frac{(gm - \cos x_{13} \cos x_{15})P}{m}, & \dot{x}_{10} = \frac{M_{R_y}}{I_y}, \quad \dot{x}_{14} = x_{10}, \\ \dot{x}_5 = x_6, & \dot{x}_{11} = x_{12}, \quad \dot{x}_{15} = x_{12}, \\ \dot{x}_6 = \frac{(\cos x_{14} \sin x_{13} + \cos x_{13} \sin x_{14} \sin x_{15})P}{m}, & \dot{x}_{12} = \frac{M_{R_z}}{I_z}, \end{cases} \quad (7)$$

Упрощенная математическая модель (7) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{(\sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \cos \psi \sin \vartheta)P}{m}, & \ddot{\gamma} = \frac{M_{qx}}{I_x}, \\ \ddot{y} = \frac{-gm + \cos \gamma \cos \vartheta P}{m}, & \ddot{\psi} = \frac{M_{qy}}{I_y}, \\ \ddot{z} = \frac{(\cos \psi \sin \gamma + \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta)P}{m}, & \ddot{\vartheta} = \frac{M_{qz}}{I_z}. \end{cases} \quad (8)$$

Сила тяги и управляющие моменты для системы уравнений (8):

$$\begin{cases} P = m \frac{\ddot{y} + g}{\cos \gamma \cos \vartheta} \\ M_{qx} = \ddot{\gamma} I_x \\ M_{qy} = \ddot{\psi} I_y \\ M_{qz} = \ddot{\vartheta} I_z. \end{cases} \quad (9)$$

Квадраты угловых скоростей вращения винтов, необходимые для создания управляющих моментов и силы тяги, могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \frac{P}{4k} - \frac{M_{qx}}{2kl} - \frac{M_{qy}}{4b}, \\ \omega_2^2 = \frac{P}{4k} + \frac{M_{qz}}{2kl} + \frac{M_{qy}}{4b}, \\ \omega_3^2 = \frac{P}{4k} + \frac{M_{qx}}{2kl} - \frac{M_{qy}}{4b}, \\ \omega_4^2 = \frac{P}{4k} - \frac{M_{qz}}{2kl} + \frac{M_{qy}}{4b}. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, задача управления БПЛА может быть сведена к задаче определения потребных силы тяги и управляющих моментов.

Выполним линеаризацию математической модели движения БПЛА в пространстве без учета перекрестных связей и возмущений (7) в соответствии с [16]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \begin{pmatrix} \sin x_7 \sin x_9 + x_7 (\cos x_7 \sin x_9 + \cos x_9 \sin x_7 \sin x_{11}) + \\ + x_9 (\cos x_9 \sin x_7 + \cos x_7 \sin x_9 \sin x_{11}) - \\ - \cos x_7 \cos x_9 \sin x_{11} - x_{11} \cos x_7 \cos x_9 \cos x_{11} \end{pmatrix} u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = (\cos x_7 \cos x_{11} - x_7 \cos x_{11} \sin x_7 - x_{11} \cos x_7 \sin x_{11}) u_1 - g, \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = \begin{pmatrix} (\cos x_9 \sin x_7 + \cos x_7 \sin x_9 \sin x_{11}) + \\ + x_7 (\cos x_7 \cos x_9 - \sin x_7 \sin x_9 \sin x_{11}) - \\ - x_9 (\sin x_7 \sin x_9 - \cos x_7 \cos x_9 \sin x_{11}) \\ + x_{11} (\cos x_7 \cos x_{11} \sin x_9) \end{pmatrix} u_1, \\ \dot{x}_7 = x_8, \quad \dot{x}_9 = x_{10}, \quad \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_8 = \frac{u_2}{I_x}, \quad \dot{x}_{10} = \frac{u_3}{I_y}, \quad \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_z}, \end{cases} \quad (11)$$

где  $u_1 \equiv P$ ,  $u_2 \equiv M_{qx}$ ,  $u_3 \equiv M_{qy}$ ,  $u_4 \equiv M_{qz}$ ; здесь аргументы тригонометрических функций имеют смысл выбранной рабочей точки.

Для нулевой рабочей точки (11) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_2 = -u_1 x_{11}, & \dot{x}_4 = u_1 - g, & \dot{x}_6 = x_7 u_1, \\ \dot{x}_7 = x_8, & \dot{x}_9 = x_{10} & \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_8 = \frac{u_2}{I_x}, & \dot{x}_{10} = \frac{u_3}{I_y}, & \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_z}. \end{cases} \quad (12)$$

Из анализа (12) следует, что для линеаризованной модели при нулевых начальных условиях возможно выполнить разделение на движение в двух ортогональных вертикальных плоскостях и независимое движение вокруг ц.м. по каналам тангажа, крена и рыскания. При этом для линеаризованной модели канал рыскания не оказывает влияния на движение в вертикальной плоскости и может рассматриваться отдельно.

Математическая модель движения БПЛА в вертикальной плоскости может быть получена из упрощенной математической модели движения БПЛА в пространстве (12).

В силу симметрии аппарата рассмотрим движение вдоль оси  $x$ :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\sin \vartheta P}{m}, \\ \ddot{y} = \frac{-gm - \cos \vartheta P}{m}, \\ \ddot{\vartheta} = \frac{M_{qz}}{I_z}. \end{cases} \quad (13)$$

Выполним замену переменных и запишем систему уравнений (13) в форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_2 = -\frac{u_1 \sin x_5}{m}, & \dot{x}_4 = \frac{-gm - u_1 \cos x_5}{m}, & \dot{x}_6 = \frac{u_2}{I_z}, \end{cases} \quad (14)$$

где  $x_1$  – боковое перемещение,  $x_2$  – скорость бокового перемещения,  $x_3$  – высота,  $x_4$  – скорость изменения высоты,  $x_5$  – угол тангажа,  $x_6$  – скорость изменения угла тангажа,  $u_1$  – управляющее ускорение (сила тяги),  $u_2$  – управляющий момент.

Выполним линеаризацию математической модели движения БПЛА в вертикальной плоскости (14) в соответствии с [17]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{u_1 \sin x_5}{m} - \frac{u_1 \cos x_5}{m}, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \frac{u_1 \cos x_5}{m} - \frac{u_1 \sin x_5}{m} - g, \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = \frac{u_2}{I_z}, \end{cases} \quad (15)$$

здесь аргументы тригонометрических функций имеют смысл выбранной рабочей точки.

Для нулевой рабочей точки (15) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_2 = -\frac{u_1}{m}, & \dot{x}_4 = \frac{u_1}{m} - g, & \dot{x}_6 = \frac{u_2}{I_z}. \end{cases} \quad (16)$$

Исходные данные для моделирования

Моделирование выполняется для систем уравнений (6) и (7) для последующего анализа и сравнения движения БПЛА с учетом и без учета перекрестных связей.

При выполнении моделирования используются исходные данные, представленные в табл. 1. Эти данные аналогичны исходным данным в [18]. Аэродинамическое сопротивление при отсутствии возмущений носит диссипативный характер и при моделировании не учитывалось. На управляющие ускорения по каналам крена  $u_\gamma$ , рыскания  $u_\psi$  и тангажа  $u_\vartheta$  наложены ограничения  $|u_\gamma| \leq [a_\gamma]$ ,  $|u_\psi| \leq [a_\psi]$ ,  $|u_\vartheta| \leq [a_\vartheta]$  соответственно. На желаемое ускорение, создаваемой силой тяги наложено ограничение  $|P_d| \leq [P_d]$ .

Желаемые значения углов тангажа и крена изменялись во времени следующим образом:

$$\vartheta_d(t) = \begin{cases} \Delta\vartheta, t < 3 \\ 0, t \geq 3 \end{cases}, \quad \gamma_d(t) = \begin{cases} \Delta\vartheta, t < 3 \\ 0, t \geq 3 \end{cases}, \quad (17)$$

где  $\Delta\vartheta$  – желаемое значение угла тангажа и крена.

Система управления ориентацией БПЛА построена с использованием двух ПИД-регуляторов для канала крена и тангажа. Для обоих каналов используются коэффициенты:  $k_p = 4$ ,  $k_D = 4$ . Управление по каналу рыскания не производится.

Желаемые управляющие моменты по каналам крена и тангажа можно определить:

$$\begin{aligned} r_\gamma(t) &= k_p \varepsilon_\gamma(t) + k_D \dot{\varepsilon}_\gamma, & r_\vartheta(t) &= k_p \varepsilon_\vartheta(t) + k_D \dot{\varepsilon}_\vartheta, \\ \varepsilon_\gamma(t) &= \gamma_d(t) - \gamma(t), & \varepsilon_\vartheta(t) &= \vartheta_d(t) - \vartheta(t), \\ u_\gamma &= I_x r_\gamma(t), & u_\vartheta &= I_z r_\vartheta(t), \\ |u_\gamma| &\leq [a_\gamma], & |u_\vartheta| &\leq [a_\vartheta], \end{aligned}$$

при этом  $M_{qx} = u_\vartheta$ ,  $M_{qz} = u_\gamma$ ,  $M_{qy} = u_\psi$ .

Система управления движением ц.м. БПЛА построена с использованием ПД-регулятора для канала высоты:  $k_p = 6$ ,  $k_D = 4,5$ . Отсюда желаемая сила тяги:

$$P_d = \frac{m(u_y + g)}{\cos \gamma \cos \vartheta}, \quad u_{pd} = k_p \varepsilon_y + k_D \dot{\varepsilon}_y, \quad \varepsilon_y = y_d - y, \quad |P_d| \leq [P_d].$$

По полученным желаемым управляющим ускорениям и силе тяги по (10) вычисляются необходимые угловые скорости вращения винтов.

Моделирование движения БПЛА выполнялось в программном пакете MATLAB. В качестве метода численного интегрирования использовался метод Эйлера с фиксированным шагом 0,001 с.

Таблица 1

Параметр	Значение	Размерность
g	9,81	м/с <sup>2</sup>
m	0,468	кг
l	0,225	м
k	2,98·10 <sup>-6</sup>	рад
b	1,140·10 <sup>-7</sup>	рад
I <sub>M</sub>	3,357·10 <sup>-5</sup>	кг×м <sup>2</sup>
I <sub>x</sub>	4,856·10 <sup>-3</sup>	кг×м <sup>2</sup>
I <sub>y</sub>	8,801·10 <sup>-3</sup>	кг×м <sup>2</sup>
I <sub>z</sub>	4,856·10 <sup>-3</sup>	кг×м <sup>2</sup>
ω <sub>i</sub>	[300, 900]	рад/с
[a <sub>γ</sub> ], [a <sub>ψ</sub> ], [a <sub>θ</sub> ]	1	рад/с <sup>2</sup>
[u <sub>y</sub> ]	19,62	м/с <sup>2</sup>

Результаты моделирования движения БПЛА

На рис. 2 представлены результаты моделирования движения БПЛА с учетом и без учета перекрестных связей.

Оценка влияния перекрестных связей на движения БПЛА производится по двум критериям:  $\Delta\psi$  – значение угла рыскания в конце моделирования для модели, описываемой системой уравнений;  $\Delta\varepsilon$  – «промах», расстояние между положением БПЛА в горизонтальной плоскости в конце моделирования для моделей, описываемых системами уравнений и соответственно.

Желаемое значение углов тангажа и крена  $\Delta\vartheta$  изменяется от 0° до 25° с шагом 1°.

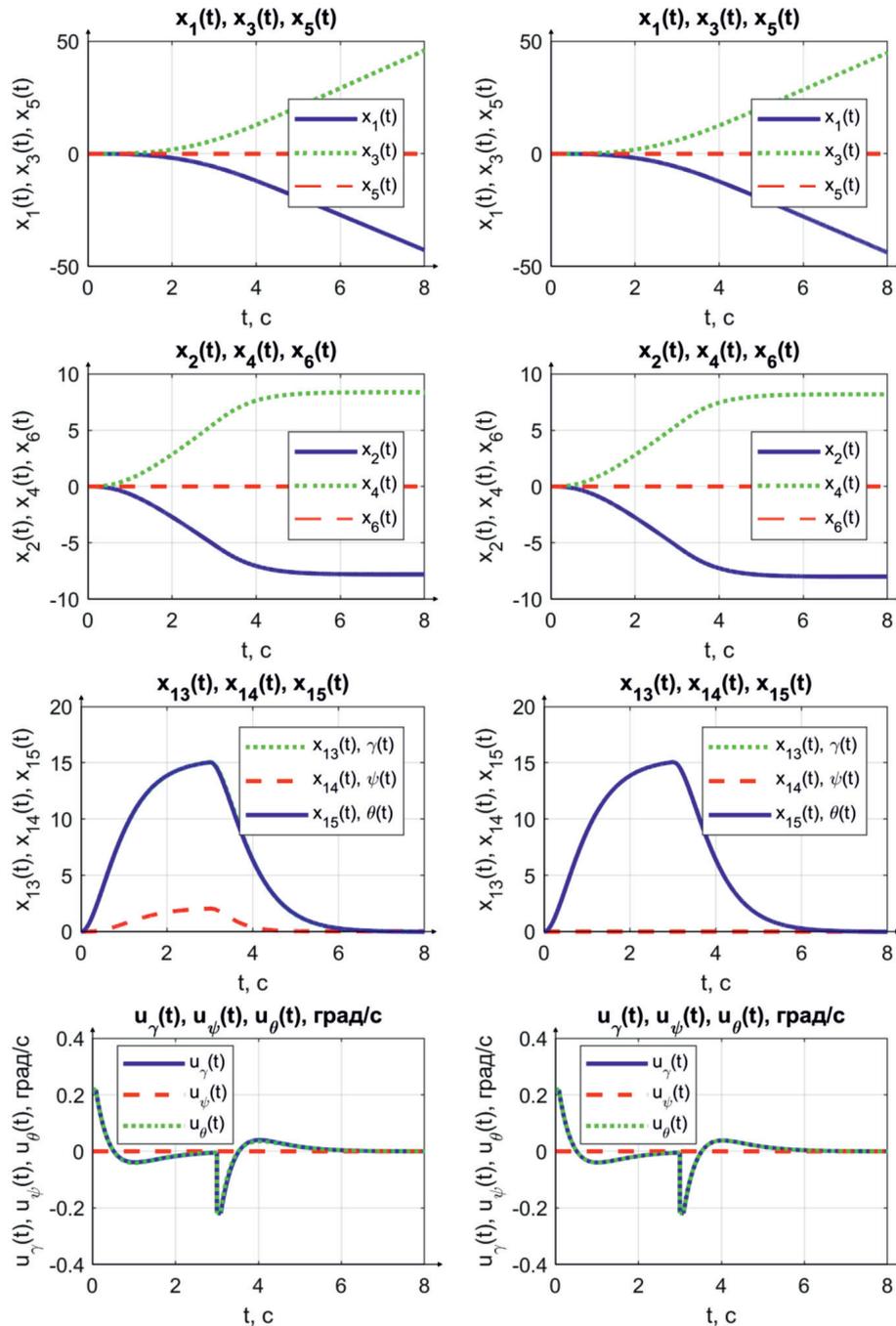


Рис. 2. Результаты моделирования движения БПЛА с учетом перекрестных связей (слева) и без учета перекрестных связей (справа)

На рис. 3 представлены: зависимость величины критерия  $\Delta\psi$  от  $\Delta\vartheta$ , зависимость величины критерия  $\Delta\epsilon$  от  $\Delta\vartheta$  и зависимость величины критерия  $\Delta\epsilon$  от дальности перелета  $\rho$  в конце моделирования. Зависимости были интерполированы на интервале между точками.

Из анализа рис. 3 следует, что с увеличением желаемого угла тангажа происходит нелинейный рост угла рыскания и нелинейный рост «промаха». При этом при значении желаемого угла тангажа более  $10^\circ$  «промах» превышает 1 м на расстоянии 102,1 м от точки (0;0) ( $11^\circ - 1,257$  м).

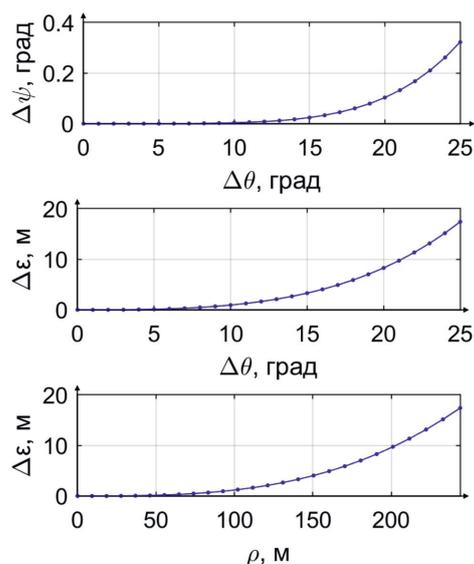


Рис. 3. Оценка влияния перекрестных связей на движение БПЛА

### Заключение

Разработана математическая модель БПЛА как объекта управления с учетом и без учета возмущений и перекрестных связей в пространстве. Получена математическая модель движения БПЛА в вертикальной плоскости. Получены линеаризованные математические модели движения БПЛА в пространстве и в вертикальной плоскости. Выполнено моделирование движения БПЛА в пространстве с учетом и без учета перекрестных связей и проведена оценка влияния этих связей.

По результатам моделирования можно сделать рекомендацию по использованию полученной системы с учетом перекрестных связей, поскольку данная система повышает точность описания движения квадрокоптера.

*Работа выполнена при поддержке гранта ФГБУ «Фонд содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере» (Фонд содействия инновациям) (Договор № 12089ГУ2/2016).*

### Список литературы

1. Фам С.Ф., Цибизова Т.Ю. Системы управления летательными аппаратами // Фундаментальные и прикладные исследования: проблемы и результаты: Труды международной научно-практической конференции (Московская область, г. Дедовск, 18–21 декабря 2014 г.). М.: ИИУ МГОУ, 2014. С. 194–196.
2. Карпунин А.А., Зазирный Е.А. Исследование задачи аппроксимации траектории плоского разворота летательного аппарата в заданном диапазоне высот и скоростей на основе рассчитанных опорных траекторий // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 10 (22) [Электронный ресурс]. URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/1090.html> (дата обращения: 31.01.19). DOI: 10.18698/2308-6033-2013-10-1090.
3. Цибизова Т.Ю., Чан Нгок Хьонг, Нгуен Динь Тхай. Мониторинг ситуации с использованием беспилотных летательных аппаратов // Научное обозрение. 2015. № 9. С. 154–159.
4. Zulu A., John S. A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotors. Open Journal of Applied Sciences. 2014. Vol. 4. P. 547–556. DOI: 10.4236/ojapps.2014.414053.
5. Necdet Sinan Özbek. Feedback control strategies for quadrotor-type aerial robots: a survey. Transactions of the Institute of Measurement and Control. Vol. 38. No. 5. 2015. P. 529–554. DOI: 10.1177/0142331215608427.
6. Гэн К., Чулин Н.А. Алгоритмы стабилизации для автоматического управления траекторным движением квадрокоптера // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 5. С. 218–235.
7. Belkheiri M. Different linearization control techniques for a quadrotor system. CCCA12, Marseilles. 2012. P. 1–6. DOI: 10.1109/CCCA.2012.6417914.
8. Föhn P., Scaramuzza D. Onboard State Dependent LQR for Agile Quadrotors. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2018. Brisbane, 21 May 2018 – 25 May 2018. P. 1–8.
9. Fessi R., Bouall'egue S. Modelling and Optimal LQG Controller Design for a Quadrotor UAV. Proceedings of the 3th International conference on automation, control engineering and computer science (ACECS 2016). Hammamet, Tunisia. P. 264–270.
10. Hodzic M., Kurak S. Control and Estimation of a Quadcopter Dynamical Model. Periodicals of Engineering and Natural Sciences. Vol. 6. No. 1. P. 63–75. DOI: 10.21533/pen.v6i1.164.g174.
11. Satıcı A.C., Poonawala H., Spong M.W. Robust Optimal Control of Quadrotor UAVs. IEEE Access. Vol. 1. 2013. P. 79–93. DOI: 10.1109/ACCESS.2013.2260794.
12. Gherouat O., Matouk D., Hassam A., Abdessemed F. Sliding Mode Control for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle. J. Automation & Systems Engineering. Vol. 10. No. 3. 2017. P. 150–157.
13. Xu Rong, Umit Ozguner. Sliding Mode Control of a Quadrotor Helicopter. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. 2006. P. 4957–4962. DOI: 10.1109/CDC.2006.377588.
14. Lee D., Kim H.J., Sastry S. Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter. International Journal of Control, Automation and Systems. 2009. No. 73. P. 419–428. DOI: 10.1007/s12555-009-0311-8.
15. Ванин А.В., Воронов Е.М., Карпунин А.А. Оптимизация управления в двухуровневой иерархической системе стабилизации – наведения летательного аппарата // Инженерный журнал: наука и инновации. 2012. № 11 (11) [Электронный ресурс]. URL: <http://engjournal.ru/catalog/it/nav/422.html> (дата обращения: 31.01.2019). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-11-422.
16. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5-ти томах; 2-е издание. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656 с.
17. Канатников А.Н., Аюпян К.Р. Управление плоским движением квадрокоптера // Математика и математическое моделирование. 2015. № 2. С. 23–36. DOI: 10.7463/mathm.0215.0789477.
18. Luukkonen T. Modelling and control of quadcopter. Aalto University. Espoo. 2011. P. 2–26.