

УДК 004.9:532.529:66.02.2.5

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ КЛАССИФИКАЦИИ ЗЕРНИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ НА СИТАХ

Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Назипов И.Т.

ФГАОУ ВО «Казанский государственный архитектурно-строительный университет», Казань,  
e-mail: akhmadiev@kgasu.ru

Рассмотрен процесс выделения целевых продуктов из зернистого материала на ситах с учетом стохастической природы подобных процессов, в качестве случайного процесса выбрана концентрация числа частиц выделяемых продуктов на поверхности сит (1/м). Для изучения распределения случайного процесса вдоль сит классификатора построена система стохастических дифференциальных уравнений. Коэффициенты дифференциальных уравнений найдены в зависимости от скорости вибрационного движения сыпучей среды по поверхности сит классификатора и вероятности просеивания частиц в отверстия ячеек, которые определяют количество прохода рассматриваемых частиц через ячейку за единицу времени, тем самым характеризуют скорость изменения случайного процесса. Получено решение системы стохастических дифференциальных уравнений и определены числовые характеристики случайного процесса. В общем случае уравнение Колмогорова – Фоккера – Планка относительно плотности вероятности случайного процесса для первого сита с помощью специально подобранной замены приведено к простейшему уравнению диффузии и решение уравнения записано в виде интегральной свертки. При аппроксимации случайного процесса белым шумом по найденным его числовым характеристикам записано приближенное решение для плотности распределения и вероятностей перехода, которые являются фундаментальными решениями задачи Коши при дельтаобразных начальных условиях. Приведены результаты расчетов распределения среднего значения случайного процесса для выбранных фракций вдоль первого и второго сита многоярусного классификатора.

**Ключевые слова:** математическая модель, разделение, зернистый материал, вероятность просеивания, случайный процесс

## MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES OF CLASSIFICATION OF GRANULAR MATERIALS ON THE SIEVE

Akhmadiev F.G., Gizzyatov R.F., Nazipov I.T.

Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, e-mail: akhmadiev@kgasu.ru

The process of isolating target products from granular material on sieves is considered taking into account the stochastic nature of such processes. The concentration of the number of particles of the released products on the sieve surface (1 / m) was chosen as a random process. The system of stochastic differential equations is constructed to study the distribution of a random process along the screens of the classifier. The coefficients of the differential equations are found depending on the speed of the vibratory movement of the granular medium over the surface of the sieve of the classifier and the probability of sifting particles into the openings of the cells, which determine the amount of passage of the particles under consideration through the cell per second, thereby characterizing the rate of change of the random process. The solution of the system of stochastic differential equations is obtained and the numerical characteristics of the random process are determined. In the general case, the Kolmogorov-Fokker-Planck equation for the probability density of a random process for the first sieve is reduced to a simple diffusion equation using a specially selected replacement and the solution of the equation is written as an integral convolution. When approximating a random process with white noise from its numerical characteristics, an approximate solution is written for the distribution density and transition probabilities, which are fundamental solutions to the Cauchy problem under delta-shaped initial conditions. The results of calculations of the distribution of the average value of the random process for the selected fractions along the first and second sieves of the multilevel classifier are presented.

**Keywords:** the mathematical model, the division of granular material, the probability of sifting, random process

Для выделения целевых продуктов из зернистого материала используют различные конструкции аппаратов, однако наиболее эффективным из них является ситовое оборудование. Математическое моделирование происходящих при этом процессов является основой для технологического расчета ситовых классификаторов и оптимального управления процессами. В работе [1] и в ряде других работ этих авторов изучено движение частиц в колеблющейся среде, рассмотрены различные модели вибрационного движения и получены зависимости для средней скорости, скорости сегрегации.

Следует также отметить, что работы этих авторов были одними из первых в области вибрационного разделения сыпучих сред. В работе [2] процесс разделения дисперсных сред на ситовых классификаторах рассмотрен как диффузионный процесс и изменение концентрации числа проходных частиц по толщине слоя зернистого материала в зависимости от времени в направлении к вибрирующей поверхности изучено с позиций марковских процессов и описано уравнением Колмогорова – Фоккера – Планка (К. – Ф. – П.). В работах [3, 4] процесс выделения целевых продуктов на многока-

скандных классификаторах также изучен с использованием теории случайных процессов, в частности в работе [4] для описания процесса перемещения частиц по поверхностям сит вследствие просеивания применяется теория Пуассоновских процессов. Изучению сегрегации частиц в виброожиженном слое на основе марковских цепей посвящена работа [5]. В работе [6] приведены основные принципы организации технологических процессов с управляемыми сегрегированными потоками, которые возникают при переработке зернистых материалов. Таким образом, для изучения процесса выделения целевых продуктов из зернистого материала можно использовать разные подходы, однако с учетом случайного характера процесса в целом наиболее предпочтительным является стохастический подход.

Целью работы является изучение процесса выделения целевых продуктов из зернистых материалов на ситовых классификаторах и построение его математической модели с использованием теории случайных процессов.

*Математическое моделирование*

Изучим процесс выделения целевых продуктов из зернистого материала на ситовых классификаторах с учетом стохастической природы подобных процессов. Диаметр частиц разделяемого зернистого материала рассматривается как одномерная случайная величина и для описания дисперсности зернистого материала задается плотность распределения частиц по размерам  $G(d)$ . Тогда долю частиц выделяемого продукта в исходном материале можно найти по формуле

$$n_{d_j} = \int_{d_j}^{d_{j+1}} G(\mathbf{d}) d\mathbf{d} .$$

В качестве случайного процесса  $N_i = N_i(x, t; d_j)$  рассмотрим концентрацию числа частиц целевого продукта (1/м) размерами  $d_j$  на поверхности  $i$ -го сита в точке  $x$  от начала координат в момент времени  $t$ . Тогда кинетические уравнения для определенного выше случайного процесса в общем виде можно записать [3, 7]:

$$dN_i / dt = F_i(N_i, x, \bar{z}, t) + \beta_i \eta_i(t), i = \overline{1, n}.$$

Здесь кинетические функции  $F_i$  характеризуют скорость просеивания на  $i$ -м ярусе, вектор  $\bar{z}$  задает свойства материала,  $n$  – количество сит классификатора,

$\eta_i(t)$  – дельта-коррелированные во времени случайные функции, которые в каждый момент времени характеризуют отклонение концентрации числа частиц от ее среднего значения на  $i$ -м ярусе (белый шум), с характеристиками:  $M[\eta_i] = \langle \eta_i(t) \rangle = 0$  и  $K[\eta_i] = \langle \eta_i(t) \cdot \eta_i(t + \tau) \rangle = \Delta_i \cdot \delta(\tau) / 2$ .

Здесь  $\beta_i$  – интенсивность,  $\Delta_i / 2$  – спектральная плотность белого шума. Особенностью этих уравнений, которая позволяет назвать их стохастическими, является наличие воздействия в виде белого шума.

Число частиц выбранной фракции на поверхности  $i$ -го сита в любой момент времени  $t > t_c = L_i / V_{i\text{cp}}$  определяется по выражению

$$\bar{N}_i(t) = \int_0^{L_i} N_i(x, t; d_j) dx ,$$

где  $L_i$  – длина сита,  $V_{i\text{cp}}$  – средняя скорость вибрационного движения. Отклонение числа частиц  $\bar{N}_i(t)$  от среднего значения в любой момент времени связано с вероятностью просеивания частиц в ячейки сита, которая рассматривается как случайное событие. Эта вероятность зависит от размеров и формы самих частиц, гранулометрического состава разделяемого материала, условий стесненности и других факторов, а также от относительной скорости вибрационного движения материала. В области отверстия ячейки относительная скорость частицы может принимать любые значения от нуля до максимального. Поэтому зависимость вероятности просеивания от относительной скорости рассматривается как случайное событие с нормальным распределением [3]. В каждый фиксированный момент времени  $t_1 > t_c$  из-за различной вероятности просеивания в ячейки сит частиц выбранной фракции их число на поверхности сита  $N_i(t_1)$  является случайной величиной, т.е. число частиц  $\bar{N}_i(t)$  рассматривается как случайный процесс. Аппроксимация случайного процесса  $N_i$  белым шумом возможна, так как время корреляции случайного процесса много меньше среднего времени пребывания выбранных частиц на поверхности сита. С учетом свойств белого шума [8] процесс  $N_i$  является марковским процессом. Для его изучения можно использовать математический аппарат теории марковских процессов и плотность распределения  $W_i(N_1, \dots, N_i, x, t)$  найти из решения системы уравнений Колмогорова – Фоккера – Планка (К. – Ф. – П.) [8]:

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (V_{i\text{cp}} W_i) - \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial N_k} (F_k W_i) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{i+1} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} (B_{kj} W_i), i = \overline{1, n}.$$

Здесь приняты обозначения:  $x_k \equiv N_k$ ,  $k = \overline{1, i}$ ;  $x_{i+1} \equiv x$ ,  $B_{kj}$  – коэффициенты диффузии. Решение уравнений (К. – Ф. – П.) при больших значениях  $n$  представляет собой сложную задачу. Поэтому для изучения случайного процесса  $N_i$  построим систему стохастических дифференциальных уравнений, которые описывают его изменение вдоль сит классификатора в зависимости от времени.

Рассматривается случай, когда разделяемый материал в начале верхнего сита имеет небольшую толщину (несколько слоев). Тогда кинетические функции  $F_i$  могут быть представлены в виде

$$\frac{dN_i}{dt} = \frac{\partial N_i}{\partial t} + V_{i\text{cp}} \frac{\partial N_i}{\partial x} = F_i(N_i, x, \bar{z}, t) + F_i'(\bar{z}, t) = \alpha_{i-1} \cdot N_{i-1} - \alpha_i \cdot N_i + \beta_i \eta_i(t), \quad \alpha_0 \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Коэффициенты кинетических уравнений вычисляются по зависимости [2]:

$$\alpha_i = V_{i\text{cp}} \cdot P / 2a_i. \quad (2)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  определяют количество прохода рассматриваемых частиц через ячейку за секунду, тем самым характеризуют скорость изменения случайного процесса. Здесь приняты обозначения:  $P$  – вероятность просеивания частиц в ячейку сита,  $2a_i$  – шаг  $i$ -го сита. Вероятность просеивания в ячейку рассматривается как сложное событие, состоящее из геометрической вероятности и вероятности, которая зависит от относительной скорости вибрационного движения. Вычисление вероятности просеивания в ячейку рассмотрено в работе [3]. Вибрационное движение сыпучих сред достаточно подробно изучено в работе [1]. Вычисление средней скорости вибрационного движения и амплитуды относительной скорости, которая используется при вычислении вероятности просеивания в ячейку, приведены в работе [3]. Рассмотрим решение дифференциальных уравнений (1) при следующих начальных и граничных условиях:

$$N_i(0, x) = 0 \text{ при } i = \overline{1, m} \text{ и } N_i(t, 0) = \bar{N}_{i0}(t), N_i(t, 0) = 0 \text{ при } i = \overline{2, m}. \quad (3)$$

Условия (3) определяют подачу разделяемого материала только на начало верхнего яруса многоярусного классификатора,  $\bar{N}_{i0}$  – число выбранных частиц (1/м), которые поступают на начало первого сверху сита. Используя замену  $\tau_i = t - x / V_i$ ,  $z = x$ , уравнения (1) с учетом условий (3) могут быть решены сведением к обыкновенным дифференциальным уравнениям [7]. Например, общее решение дифференциального уравнения для верхнего яруса можно записать в виде

$$N_1^j(\tau_1, z) = \bar{N}_1^j(\tau_1, z) + \frac{\beta_1}{V_1} \int_0^z \eta_1 \left( \tau_1 + \frac{\xi}{V_1} \right) \exp \left( \frac{\alpha_1^j}{V_1} (\xi - z) \right) d\xi,$$

где  $\bar{N}_1^j$  определяет среднее значение случайного процесса  $N_1^j$ .

На основании решений системы (1) для каждого яруса можно определить среднее значение, корреляционную функцию и дисперсию процесса  $N_i$ . Среднее значение случайного процесса  $N_1^j$  для верхнего яруса с учетом условий (3) имеет вид

$$\bar{N}_1^j(\tau_1, z) = \bar{N}_{i0}^j(\tau_1) \exp(-\alpha_1^j z / V_1).$$

Также с учетом свойств белого шума [8] можно найти дисперсию процесса:

$$\sigma_{N_1^j}^2(\tau_1, z) = \frac{\Delta_1}{4\alpha_1^j} \beta_1^2 (1 - \exp(-2\alpha_1^j z / V_{1\text{cp}})).$$

Решение дифференциального уравнения относительно среднего для второго сита из системы (1), с учетом решения для первого и условий (3), имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{N}_2^j(\tau_2, z) &= \bar{N}_{i0}^j(\tau_2) \frac{\alpha_1^j}{V_2} \cdot \frac{\exp(-\alpha_1^j z / V_1) - \exp(-\alpha_2^j z / V_2)}{\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1} = \\ &= \bar{N}_{i0}^j(\tau_2) \frac{\alpha_1^j}{V_2} \cdot \left[ \frac{\exp(-\alpha_1^j z / V_1)}{\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1} + \frac{\exp(-\alpha_2^j z / V_2)}{\alpha_1^j / V_1 - \alpha_2^j / V_2} \right]. \end{aligned}$$

В итоге данное решение можно записать в виде

$$\bar{N}_2^j(\tau_2, z) = \bar{N}_{10}^j(\tau_2) \frac{\alpha_1^j}{V_2} \cdot [\Psi_{1,2} \cdot \exp(-\alpha_1^j z / V_1) + \Psi_{2,2} \cdot \exp(-\alpha_2^j z / V_2)],$$

где  $1/\Psi_{1,2} = (\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1)$  и  $1/\Psi_{2,2} = (\alpha_1^j / V_1 - \alpha_2^j / V_2)$ .

Решение дифференциального уравнения относительно среднего значения случайного процесса для третьего сита из системы (1), с учетом решений для первого и второго, а также начальных и граничных условий (3), имеет вид

$$\bar{N}_3^j(\tau_3, z) = \bar{N}_{10}^j(\tau_3) \frac{\alpha_1^j \cdot \alpha_2^j}{V_2 \cdot V_3} \cdot \left[ \frac{\exp(-\alpha_1^j z / V_1) - \exp(-\alpha_3^j z / V_3)}{(\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1)(\alpha_3^j / V_3 - \alpha_1^j / V_1)} - \frac{\exp(-\alpha_2^j z / V_2) - \exp(-\alpha_3^j / V_3)}{(\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1)(\alpha_3^j / V_3 - \alpha_2^j / V_2)} \right].$$

Полученное решение для третьего сита можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{N}_3^j(\tau_3, z) &= \bar{N}_{10}^j(\tau_3) \frac{\alpha_1^j \cdot \alpha_2^j}{V_2 \cdot V_3} \cdot \left[ \frac{\exp(-\alpha_1^j z / V_1)}{(\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1)(\alpha_3^j / V_3 - \alpha_1^j / V_1)} + \right. \\ &+ \frac{\exp(-\alpha_2^j z / V_2)}{(\alpha_1^j / V_1 - \alpha_2^j / V_2)(\alpha_3^j / V_3 - \alpha_2^j / V_2)} + \left. \frac{\exp(-\alpha_3^j z / V_3)}{(\alpha_1^j / V_1 - \alpha_3^j / V_3)(\alpha_2^j / V_2 - \alpha_3^j / V_3)} \right] = \\ &= \bar{N}_{10}^j(\tau_3) \frac{\alpha_1^j \alpha_2^j}{V_2 V_3} [\Psi_{1,3} \exp(-\alpha_1^j z / V_1) + \Psi_{2,3} \exp(-\alpha_2^j / V_2) + \Psi_{3,3} \exp(-\alpha_3^j z / V_3)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 1/\Psi_{1,3} &= (\alpha_2^j / V_2 - \alpha_1^j / V_1) \cdot (\alpha_3^j / V_3 - \alpha_1^j / V_1), \\ 1/\Psi_{2,3} &= (\alpha_1^j / V_1 - \alpha_2^j / V_2) \cdot (\alpha_3^j / V_3 - \alpha_2^j / V_2), \\ 1/\Psi_{3,3} &= (\alpha_1^j / V_1 - \alpha_3^j / V_3) \cdot (\alpha_2^j / V_2 - \alpha_3^j / V_3). \end{aligned}$$

Используя метод индукции, можно показать, что решение дифференциального уравнения относительно среднего значения случайного процесса для  $i$ -го сита имеет вид

$$\bar{N}_i^j(\tau_i, z) = \bar{N}_{10}^j(\tau_i) \frac{\alpha_1^j \dots \alpha_{i-1}^j}{V_2 \dots V_i} [\Psi_{1,i} \exp(-\alpha_1^j z / V_1) + \Psi_{2,i} \exp(-\alpha_2^j z / V_2) + \dots + \Psi_{i,i} \exp(-\alpha_i^j z / V_i)], \quad (4)$$

где  $1/\Psi_{k,i} = (\alpha_1^j / V_1 - \alpha_k^j / V_k) \dots (\alpha_{k-1}^j / V_{k-1} - \alpha_k^j / V_k) \cdot (\alpha_{k+1}^j / V_{k+1} - \alpha_k^j / V_k) \dots (\alpha_i^j / V_i - \alpha_k^j / V_k)$ .

В общем случае для определения плотности распределения случайного процесса решение системы уравнений (К. – Ф. – П.) проводят численными методами. При аппроксимации белым шумом случайный процесс  $N_i$  является нормальным [8]. Поэтому, зная числовые характеристики случайного процесса, можно записать приближенное решение для плотности распределения и вероятностей перехода, которые являются фундаментальными решениями задачи Коши при дельтаобразных начальных условиях:

$$W_1^j(N_1^j, \tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{N_1^j}^2(\tau_1, z)}} \exp\left(-\frac{(N_1^j(\tau_1, z) - \bar{N}_1^j(\tau_1, z))^2}{2\sigma_{N_1^j}^2(\tau_1, z)}\right),$$

$$W_{i/i-1}^j(N_i^j, \tau_i | N_{i-1}^j, \tau_{i-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{N_i^j}^2(\tau_i, z)}} \exp\left(-\frac{(N_i^j(\tau_i, z) - \bar{N}_i^j(\tau_i, z))^2}{2\sigma_{N_i^j}^2(\tau_i, z)}\right).$$

В общем случае  $N_1$  в начальном сечении является случайной величиной с плотностью вероятности  $\bar{W}_{10}(N_1, \tau_1)$ . Тогда уравнение (К. – Ф. – П.) для первого сита, с помощью замены

$$\varphi = N_1 \exp\left(-\frac{\alpha_1}{V_1} x\right), \quad \xi = \frac{\beta_1^2 \Delta_1}{2\alpha_1} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\alpha_1}{V_1} x\right)\right) \quad (5)$$

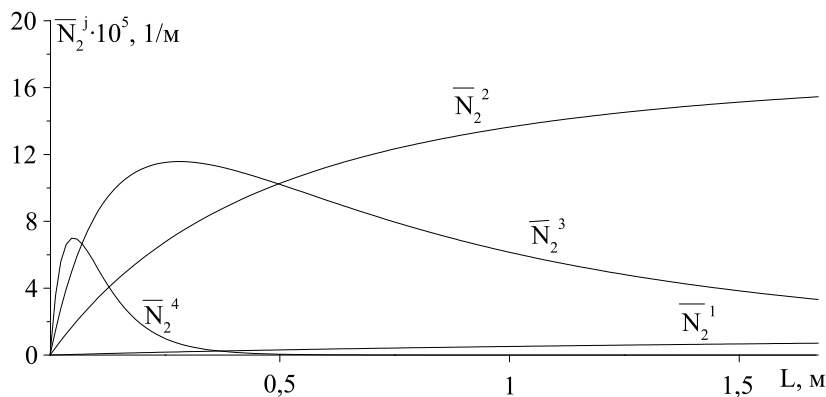
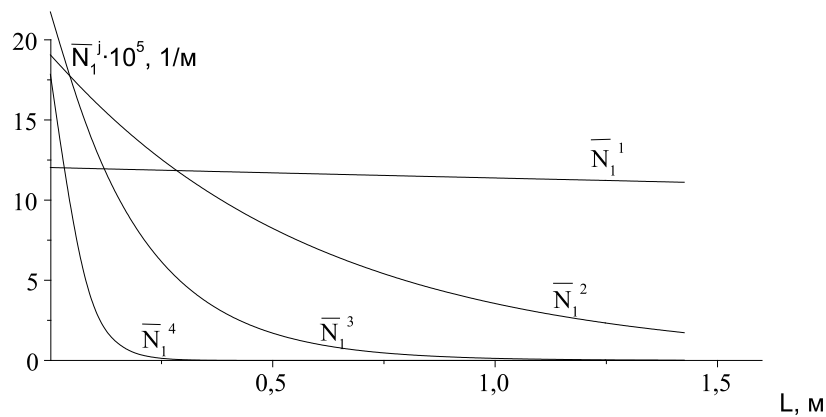
приводится к простейшему уравнению диффузии  $\frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{W}_1}{\partial \varphi^2}$  и решение полученного уравнения записывается в виде интегральной свертки:

$$\tilde{W}_1(\varphi, \xi, \tau_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi}} \int_0^\infty \bar{W}_{10}(\theta, \tau_1) \left( \exp\left(-\frac{(\varphi-\theta)^2}{2\xi}\right) - \exp\left(-\frac{(\varphi+\theta)^2}{2\xi}\right) \right) d\theta. \quad (6)$$

Тогда общее решение уравнения (К. – Ф. – П.) для первого сита имеет вид

$$W_1(N_1, x, \tau_1) = \tilde{W}_1(\varphi, \xi, \tau_1) \exp(-\alpha_1 x / V_1). \quad (7)$$

На рисунке приведены результаты расчетов изменения среднего значения случайного процесса (концентрации частиц, 1/м) целевых продуктов вдоль первого и второго сита многоярусного классификатора. На основании полученных решений вычисляются коэффициенты извлечения целевых продуктов. Также по непроеянным остаткам с сит оценивается их качество. Для этого определяется доля нецелевых продуктов (мелких), которые оказались в целевом продукте.



Изменение среднего значения случайного процесса (концентрации частиц, 1/м) целевых продуктов вдоль первого и второго сита многоярусного классификатора:  
 $\alpha_1^1 = 5,78E-3$ ;  $\alpha_1^2 = 8,42E-2$ ;  $\alpha_1^3 = 2,57E-1$ ;  $\alpha_1^4 = 9,08E-1$ ;  $\alpha_2^1 = 3,66E-4$ ;  $\alpha_2^2 = 2,77E-3$ ;  
 $\alpha_2^3 = 7,18E-1$ ;  $\alpha_2^4 = 6,93E-1$  (сек<sup>-1</sup>);  $V_{cp} = 0,05$  м/сек; размеры фракций:  
 1 –  $(0,8 \div 0,9) \cdot 10^{-3}$ ; 2 –  $(0,7 \div 0,8) \cdot 10^{-3}$ ; 3 –  $(0,6 \div 0,7) \cdot 10^{-3}$ ; 4 –  $(0,5 \div 0,6) \cdot 10^{-3}$  (м)

### Заключение

Теория случайных процессов с использованием результатов эксперимента для определения параметров модели позволяет строить математические модели выделения целевых продуктов из зернистых материалов на многоярусных ситовых классификаторах, которые являются основой для проведения оптимизации и управления процессом.

### Список литературы

1. Вайсберг Л.А., Иванов К.С., Мельников А.Е. Совершенствование подходов к математическому моделированию процессов вибрационного грохочения // Обогащение руд. 2013. № 2. С. 21–27.
2. Непомнящий Е.А. Кинетика некоторых процессов переработки дисперсных материалов // Теоретические основы химической технологии. 1973. Т. 7. № 5. С. 754–763.
3. Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Назипов И.Т. Гидродинамика и кинетика разделения дисперсных сред на ситовых классификаторах // Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90. № 5. С. 1135–1145.
4. Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф. Моделирование разделения зернистых материалов на многокаскадных классификаторах на основе теории случайных процессов // Теоретические основы химической технологии. 2018. Т. 52. № 3. С. 306–317.
5. Огурцов В.А., Горохова Е.Р., Огурцов А.В. Моделирование движения частиц при виброгрохочении на основе теории цепей Маркова // Строительство и реконструкция. 2011. № 5(37). С. 85–88.
6. Долгунин В.Н., Иванов О.О., Уколов А.А. Кинетика сегрегации частиц различной шероховатости и упругости при быстром гравитационном течении зернистой среды // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43. № 2. С. 199–207.
7. Ахмадиев Ф.Г., Гиззятов Р.Ф., Киямов Х.Г. Математическое моделирование процесса тонкослойного разделения зернистых материалов по размерам на ситовых классификаторах // Теоретические основы химической технологии. 2013. Т. 47. № 3. С. 309–317.
8. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. М.: Сов. радио, 1973. 232 с.