

УДК 519.657

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ПРОЕКТИРОВАНИИ СОСТАВА ЛЕГКОГО БЕТОНА

Местников А.Е., Федоров В.И.

ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени академика М.К. Аммосова»,
Якутск, e-mail: valeriyf.ykt@gmail.com

В данной статье рассмотрена возможность применения метода математического планирования эксперимента в проектировании состава легкого бетона. Основу статьи занимают вопросы, связанные с интерпретацией эмпирических зависимостей с точки зрения теоретических положений строительного материаловедения. В статье приведены характерные особенности применения легких бетонов для обеспечения тепловой защиты зданий и сооружений. Приведены физико-механические показатели исходных сырьевых компонентов, а также основные нормативно-технические документы, регламентирующие характеристики легкого бетона. Для оценки физико-механических показателей легкого бетона использованы стандартные методы анализа. В статье подробно излагается последовательность расчета для получения уравнений регрессии. Приводится оценка значимости коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента, а также оценка адекватности уравнений регрессии по критерию Фишера. Приводится анализ и описание поверхностей отклика. Установлена причинно-следственная взаимосвязь между различными сочетаниями расхода цемента и водоцементного отношения на изменения средней плотности и прочности при сжатии легкого бетона. Определена степень влияния коэффициентов регрессии на изменения выходных данных. Обнаружены линейные и квадратические эффекты взаимодействия входных факторов. Выявлена и обоснована необходимость использования метода математического планирования эксперимента для получения легкого бетона с заданными физико-механическими показателями.

Ключевые слова: гранулированное пеностекло, легкий бетон, состав, уравнение регрессии, статистическая обработка, оценка адекватности

MATHEMATICAL PLANNING IN DESIGNING LIGHT CONCRETE COMPOSITION

Mestnikov A.E., Fedorov V.I.

North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov, Yakutsk, e-mail: valeriyf.ykt@gmail.com

This article discusses the possibility of using the method of mathematical design of the experiment in designing the composition of lightweight concrete. The basis of the article is occupied by issues related to the interpretation of empirical dependencies from the point of view of the theoretical provisions of building materials science. The article presents the characteristic features of the use of lightweight concrete to provide thermal protection for buildings and structures. The physic-mechanical parameters of the initial raw materials are given, as well as the main regulatory and technical documents governing the characteristics of lightweight concrete. To assess the physical and mechanical properties of lightweight concrete, standard analysis methods were used. The article sets out in detail the sequence of calculations for obtaining regression equations. The significance of the regression coefficients by the Student criterion is estimated, as well as the adequacy of the regression equations by the Fisher criterion. The analysis and description of response surfaces is given. A causal relationship has been established between various combinations of cement consumption and water-cement ratio to changes in average density and compressive strength of lightweight concrete. The degree of influence of regression coefficients on changes in the output data is determined. Linear and quadratic effects of the interaction of input factors are found. The necessity of using the method of mathematical planning of the experiment to obtain lightweight concrete with specified physical and mechanical parameters is identified and justified.

Keywords: granular foam glass, lightweight concrete, composition, regression equation, statistical processing, adequacy assessment

В настоящее время вопросы, связанные с тепловой защитой зданий и сооружений, являются важнейшими направлениями строительной отрасли. Наибольший практический интерес с точки зрения экономии тепловой энергии представляют ограждающие конструкции, которые непосредственно контактируют с внешней средой. По данным многих исследователей, через ограждающие конструкции теряется порядка 70–85% тепловой энергии [1]. В связи с этим актуальной задачей является проектирование и расширение номенклатуры теплоизоляционных и конструкционно-теплоизоляционных стеновых материалов

и изделий с использованием высокоэффективных сырьевых компонентов. Наиболее практичным решением рассмотренной задачи является применение пористых гранулированных материалов в качестве крупного заполнителя в бетонах [2].

По требованиям ГОСТ 25192-2012, к категории легких бетонов относятся бетоны, у которых марка по средней плотности варьируется от D800 до D2000. А бетоны, имеющие марку по средней плотности менее D800, называют особо легкими. Тем не менее под обобщающим термином легкие бетоны принято называть все виды бетонов с использованием пористых заполни-

телей (независимо от марки по средней плотности). Преимущества легких бетонов на пористых заполнителях были отражены в фундаментальных работах Ю.М. Баженова, Г.И. Горчакова и А.Г. Комара. Теоретические и экспериментальные исследования по легким бетонам, охватывающих ряд вопросов, связанных с решением системы «состав – структура – свойства», также проводились и другими авторами [3, 4].

С точки зрения технологии изготовления, большинство разновидностей легких бетонов имеют некоторые специфические отличия от тяжелых и мелкозернистых бетонов. Прежде всего, эти отличия заключаются в свойствах пористых заполнителей и в особенностях их взаимодействия в процессе структурообразования и твердения растворной составляющей.

Следует отметить, что большинство современных подходов к проектированию составов легких бетонов отрабатывались в первую очередь на примере керамзитобетона [5]. Тем не менее ограниченность качественного глинистого сырья с высоким коэффициентом вспучивания ставит вопрос о замене керамзита на более эффективный материал, обладающий высокими механическими и теплофизическими характеристиками. Одним из таких материалов является гранулированное пеностекло [6]. Благодаря высокой пористости зерен, на основе гранулированного пеностекла можно получить легкие бетоны с пониженной средней плотностью без существенных потерь прочностных характеристик.

Проектирование состава теплоизоляционного и конструкционно-теплоизоляционного легкого бетона зачастую проводится опытным путем. Наиболее применимым из опытно-экспериментальных методов анализа является аппарат теории математического планирования эксперимента [7]. Данный метод широко распространен в инженерной практике благодаря значительному сокращению количества опытов, а также возможностью проведения вычислительных экспериментов.

Цель исследования: оценка возможности применения метода математического планирования эксперимента в проектировании составов легкого бетона на основе гранулированного пеностекла.

Материалы и методы исследования

В работе были использованы следующие сырьевые компоненты: портландцемент марки ЦЕМ I 32,5Б по ГОСТ 31108-2016 производства АО «Якутцемент» (минералогический состав, %: C_3S – 58,7; C_2S – 16,38; C_3A – 6,44; C_4AF – 14,35); гранулированное пеностекло по ТУ 5914-001-00643867-94 производства НПО «Силикат» (химический состав, %: SiO_2 – 66,3;

Na_2O – 19,1; CaO – 6,65; MgO – 5,54; Al_2O_3 – 1,2; др. – 1,21); техническая вода по ГОСТ 23732-2011.

Определение основных физико-механических показателей гранулированного пеностекла проведено в соответствии с требованиями ГОСТ 9758-2012. Испытания образцов легкого бетона выполнены с использованием стандартных методов, аттестованных приборов и оборудования. Подбор состава легкого бетона рассчитан в соответствии с требованиями, изложенными в ГОСТ 27006-86. В экспериментальных исследованиях использованы стандартные образцы-кубы размером 10x10x10 см по ГОСТ 10180-2012. Статистическая обработка экспериментальных данных проведена с учетом положений ГОСТ Р ИСО 16269-4-2017 на базе программы MathCAD 2001i.

Результаты исследования и их обсуждение

На основании положений, рассмотренных в работах [3, 8, 9], в качестве выходных данных выбраны средняя плотность ρ_0 и прочность при сжатии $R_{сж}$. Для достижения максимально плотной упаковки зерен в композите, гранулированное пеностекло условно разделили на две фракции, «крупную» и «мелкую». Гранулы «крупной» фракции имеют диаметр частиц 5–7,5 мм, мелкой фракции 2,5–5 мм соответственно. По данным работы [3] и собственных исследований [6], в качестве рецептурных факторов установили расход цемента X_1 и водоцементное отношение X_2 . В табл. 1 показаны уровни и шаг варьирования факторов.

Таблица 1
Уровни и шаг варьирования факторов

№	Обозначение фактора	Уровни варьирования			Шаг варьирования
		-1	0	+1	
1	X_1	320	370	420	50
2	X_2	0,27	0,31	0,35	0,04

С учетом параметров, приведенных в табл. 1, составлен план двухфакторного эксперимента с тремя уровнями варьирования. Составлены девять опытов, состоящих из двух параллельных экспериментов. После формования образцы твердели и набирали прочность в камере нормального твердения при температуре $20 \pm 2^\circ C$ и относительной влажности воздуха $95 \pm 5\%$. При достижении 28 суток с момента изготовления у образцов определены средняя плотность и предел прочности при сжатии. План и результаты полного факторного эксперимента приведены в табл. 2. Индекс i показывает порядковый номер опыта, варьируется от 1 до 9. Выходные параметры $\bar{Y}_{i,p}$ и $\bar{Y}_{i,R}$ являются среднеарифметическими значениями двух параллельных экспериментов $Y_{1,i}$ и $Y_{2,i}$.

Таблица 2

План и результаты полнофакторного эксперимента

Номер опыта	X_1	X_2	Выходные данные					
			ρ_0 , кг/м ³			$R_{сж}$, МПа		
			$Y_{1,i}$	$Y_{2,i}$	$\bar{Y}_{i,p}$	$Y_{1,i}$	$Y_{2,i}$	$\bar{Y}_{i,R}$
1	-1	-1	509,44	513,50	511,47	0,62	0,42	0,52
2	0	-1	544,22	579,23	561,72	0,65	1,61	1,13
3	+1	-1	650,15	677,31	663,73	1,43	2,21	1,82
4	-1	0	575,69	561,96	568,83	2,37	1,83	2,10
5	0	0	629,74	600,58	615,16	1,54	1,92	1,73
6	+1	0	698,02	733,51	715,76	4,46	5,32	4,89
7	-1	+1	600,91	589,57	595,24	3,92	4,48	4,20
8	0	+1	615,12	653,06	634,09	4,39	4,75	4,57
9	+1	+1	746,36	746,36	746,36	5,47	6,67	6,07

Экспериментальные данные использованы для разработки математической модели, которая представляет собой функцию отклика, связывающую факторы X_1 и X_2 с параметрами выходных данных. В данном случае функция отклика выражается полиномом второй степени [8]:

$$Y(X_1, X_2) = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2. \quad (1)$$

Расчет коэффициентов уравнения регрессии b_0 , b_1 , b_2 , b_{11} , b_{22} и b_{12} производится по следующим формулам [8]:

$$b_0 = \left[\frac{5}{9} \sum_{i=1}^N \bar{Y}_{i(p;R)} \right] - \left[\frac{1}{3} \left(\sum_{i=1}^N X_{1(p;R)}^2 \bar{Y}_{i(p;R)} + \sum_{i=1}^N X_{2(p;R)}^2 \bar{Y}_{i(p;R)} \right) \right],$$

$$b_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N X_{1(p;R)} \bar{Y}_{i(p;R)},$$

$$b_2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^N X_{2(p;R)} \bar{Y}_{i(p;R)}, \quad (2)$$

$$b_{11} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N X_{1(p;R)}^2 \bar{Y}_{i(p;R)} \right] - \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \bar{Y}_{i(p;R)} \right],$$

$$b_{22} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N X_{2(p;R)}^2 \bar{Y}_{i(p;R)} \right] - \left[\frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \bar{Y}_{i(p;R)} \right],$$

$$b_{12} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N X_{1(p;R)} X_{2(p;R)} \bar{Y}_{i(p;R)}.$$

По формулам (2) рассчитаны по шесть коэффициентов регрессии для каждого из двух полиномов. Значения вычисленных коэффициентов регрессии приведены в табл. 3 (полужирным шрифтом в табл. 3 отмечены незначимые коэффициенты регрессии).

Таблица 3

Коэффициенты уравнений регрессии

№	Выходные данные	Коэффициенты уравнений регрессии					
		b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{22}	b_{12}
1	Y_p	613,31	75,05	39,8	29,91	-14,48	-0,28
2	Y_R	2,38	0,99	1,9	0,79	0,15	0,14

Следующим этапом анализа является оценка значимости коэффициентов регрессии. Для этого по результатам параллельных опытов (табл. 2 столбцы № 4–9) рассчитывается дисперсия воспроизводимости. Данный показатель необходим для статистического анализа результатов эксперимента. При дублировании опытов по строкам плана, дисперсия воспроизводимости определяется по следующей формуле [10]:

$$S^2_{в(ρ;R)} = \frac{1}{f_2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (Y_{i(ρ;R)} - \bar{Y}_{i(ρ;R)})^2, \quad (3)$$

где $f_2 = N(m - 1)$ – число степеней свободы; N – количество опытов; m – количество параллельных опытов.

Значимость коэффициентов регрессии оценивается по критерию Стьюдента. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ и для числа степеней свободы $f_2 = N(m - 1) = 9(2 - 1) = 9$, табличное значение критерия Стьюдента составляет $t_{кр} = 2,26$ [10]. Доверительный интервал, соответствующий вероятности $p = 0,95$, определяется через среднюю дисперсию параллельных опытов с учетом табличного значения критерия Стьюдента по формуле [11]:

$$\Delta b_{(ρ;R)} = t_{кр} \sqrt{\frac{S^2_{в(ρ;R)}}{N(m-1)}}. \quad (4)$$

Проверяется значимость коэффициентов на выполнение условия [10]:

$$|b_i| < \Delta b_{(ρ;R)}. \quad (5)$$

По результатам оценки значимости оказалось, что из всех данных незначимыми коэффициентами оказались b_{22} и b_{12} (табл. 3). Окончательный вид полиномов после исключения незначимых коэффициентов имеет вид

$$Y_p(X_1, X_2) = 613,31 + 75,05X_1 - 39,8X_2 + 29,91X_1^2, \quad (6)$$

$$Y_R(X_1, X_2) = 2,38 + 0,99X_1 + 1,9X_2 + 0,79X_1^2. \quad (7)$$

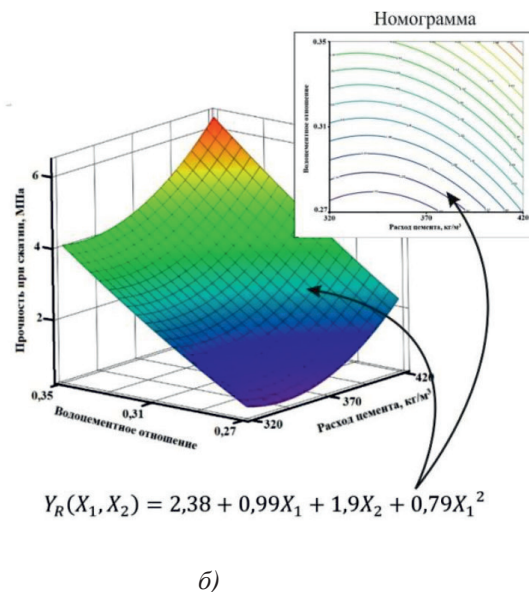
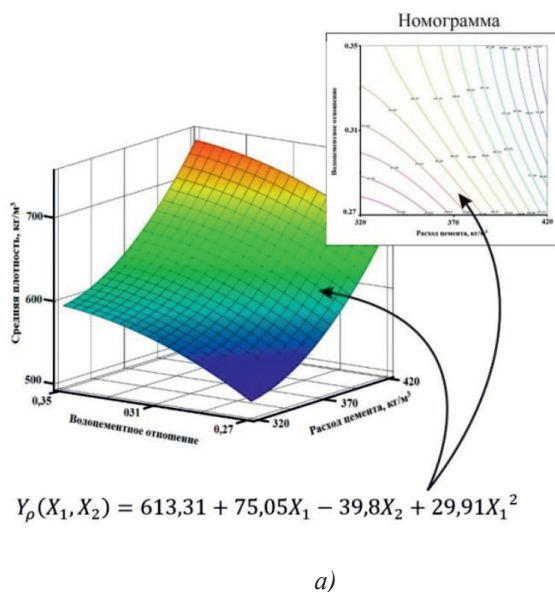
Сумма квадратов разностей между рассчитанными и экспериментальными значениями позволяет вычислить дисперсию адекватности модели по формуле [12]:

$$S^2_{а(ρ;R)} = \frac{1}{f_1} \sum_{i=1}^N (\bar{Y}_{i(ρ;R)} - \tilde{Y}_{i(ρ;R)})^2, \quad (8)$$

где f_1 – число степеней свободы, $f_1 = N - k$, k – количество коэффициентов полинома; $\bar{Y}_{i(ρ;R)}, \tilde{Y}_{i(ρ;R)}$ – экспериментальное и рассчитанное значение выходных данных в i -м опыте.

Дисперсия адекватности определяет степень отклонения экспериментальных и рассчитанных данных, а также позволяет оценить работоспособность полученного полинома. Наблюдаемое значение критерия Фишера определяется по соотношению [10–12]:

$$F_{p(ρ;R)} = \frac{S^2_{а(ρ;R)}}{S^2_{в(ρ;R)}}. \quad (9)$$



Зависимость средней плотности (а) и прочности при сжатии (б) от расхода цемента и водоцементного отношения

Далее, проверяется следующее условие [10–12]:

$$F_{p(p;R)} < F_{T(p;R)}. \quad (10)$$

Критическое значение критерия Фишера при уровне значимости $\alpha = 0,05$ для выходных параметров Y и Y_R составляет $F_{T(p;R)} = 3,48$ ($f_1 = 5$, $f_2 = 9$) [12]. Сравнивая наблюдаемые и критические значения критерия Фишера по условию (10), можно сделать вывод, что:

$[F_{p;p} = 0,81] < [F_{T;p} = 3,48]$ – условие выполняется;

$[F_{p;R} = 1,35] < [F_{T;R} = 3,48]$ – условие выполняется.

Следовательно, полиномы (6) и (7) при уровне значимости $\alpha = 0,05$ являются адекватными экспериментальным данным и пригодными для дальнейшего анализа.

По полиномам (6) и (7) построены поверхности отклика и номограммы зависимости средней плотности и прочности при сжатии от расхода цемента и водоцементного отношения (рисунок). Рисунок представляет собой графическую интерпретацию полиномов (6) и (7).

На основании полученных зависимостей (рисунок) можно сделать вывод, что наиболее сильное влияние на изменение средней плотности оказывает расход цемента (X_1). Ввиду достаточно значительной разности плотностей цементного камня и гранулированного пеностекла, данный эффект является вполне очевидным. Выявлен отрицательный линейный эффект водоцементного отношения ($X_2 = -39,8$) на плотность композита. Это объясняется повышением пористости цементного камня при повышении его водосодержания, что в последующем приводит к снижению плотности материала. Установлен положительный эффект изменения прочности легкого бетона при повышении содержания цемента ($X_1 = +0,99$) и водоцементного отношения ($X_2 = +1,9$). Как и большинство бетонов гидратационного твердения, увеличение содержания вяжущего благоприятно влияет на формирование прочностных характеристик материала. Однако самый весомый вклад в формирование прочности оказывает водоцементное отношение. В эксперименте водоцементное отношение варьируется от 0,27 до 0,35. При минимальных значениях водоцементного отношения наблюдается резкое снижение прочности при сжатии. Это связано, во-первых, с нехваткой воды затворения для обеспечения реакции гидратации, во-вторых, миграцией части воды в поверхностные слои гранул пеностекла. Минимальная плотность и прочность на-

блюдаются при расходе цемента 320 кг/м^3 и водоцементном отношении 0,27. Максимальная плотность и прочность выявлены при расходе цемента 420 кг/м^3 и водоцементном отношении 0,35. Совместные влияния факторов на изменения выходных данных не обнаружены. В целом особенности изменения поверхностной отклика (Y_p и Y_R) имеют практически одинаковое направление, а также идентичные причинно-следственные связи с входными факторами (X_1 и X_2).

По разработанным составам легкого бетона получен конструкционно-теплоизоляционный стеновой материал, соответствующий требованиям ГОСТ 25820-2014, марки по средней плотности D500-D700, класса по прочности при сжатии В0,5-В3,5 и теплопроводностью (в сухом состоянии) 0,121–0,137 Вт/(м·К).

Таким образом, использование метода математического планирования эксперимента позволяет проектировать и получать легкий бетон с достаточно широким диапазоном изменения средней плотности и прочности при сжатии.

Заключение

На основании проведенного исследования обоснована целесообразность применения метода математического планирования эксперимента при проектировании составов конструкционно-теплоизоляционного легкого бетона с пористым заполнителем из гранулированного пеностекла. Отличительной особенностью данного метода от известных методов численного анализа является возможность получения нескольких возможных решений поставленной задачи. То есть, сочетая значения входных факторов друг относительно друга, можно получить огромное количество выходных данных (в области определения функции) не прибегая к лабораторным испытаниям. Такой подход позволяет получить максимально возможное количество информации об изучаемом объекте с заданной степенью точности прогноза при минимальных затратах ресурсов и времени.

Список литературы

1. Хозин В.Г., Красникова Н.М., Ерусланова Э.В. Легкие поризованные бетоны на основе сухих смесей // Строительные материалы. 2018. № 9. С. 40–45. DOI: 10.31659/0585-430X-2018-763-9-40-45.
2. Иноземцев А.С., Королев Е.В. Динамика развития высокопрочных лёгких бетонов. Анализ мировых достижений // Международный научно-исследовательский журнал. 2013. № 12–1. С. 87–94.
3. Иноземцев А.Е. Средняя плотность и пористость высокопрочных легких бетонов // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 7. С. 31–37. DOI: 10.5862/MCE.51.4.

4. Рыбьев И.А., Казеннова Е.П., Кузнецова Л.Г., Тихомирова Т.Е. Материаловедение в строительстве. М.: Изд-во Академия, 2006. 528 с.
5. Местников А.Е., Егорова А.Д., Абрамова П.С. Производство строительных материалов из местного минерального сырья для арктических районов северо-востока России // Горный журнал. 2016. № 9. С. 65–68. DOI: 10.17580/gzh.2016.09.13.
6. Местников А.Е., Федоров В.И., Софронов В.Д. Пеноцеолитобетон – легкий бетон с пористым заполнителем из гранул пеноцеолита // Естествознание и технические науки: глобальные вызовы, тренды, возможности. Материалы международной научно-практической конференции (Белгород, 30 мая 2019 г.). Белгород: АПНИ, 2019. С. 86–90.
7. Федоров М.В., Богомолов А.В., Цыганок Г.В., Айвазян С.А. Технология проектирования многофакторных экспериментальных исследований и построения эмпирических моделей комбинированных воздействий на операторов эрготических систем // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2010. № 5. С. 53–61.
8. Хартман К., Лецкий Э., Шефер В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М.: Изд-во Мир, 1977. 552 с.
9. Грачев Ю.П., Плаксин Ю.М. Математические методы планирования экспериментов. М.: Изд-во ДеЛипринт, 2005. 296 с.
10. Сидняев Н.И. Теория планирования эксперимента и анализ статистических данных. М.: Изд-во Юрайт, 2012. 399 с.
11. Калмыков В.В., Федорова О.С. Основные статистические методы анализа результатов экспериментов // Электронный журнал: наука, техника и образование. 2016. № 1. С. 68–75.
12. Жуков А.Д., Смирнова Т.В., Гудков П.К. Практикум по технологическому моделированию. М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2014. 168 с.