

УДК 519.651

**ПОЛУЧЕНИЕ ТАБЛИЦ ПАДЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ,
ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ****¹Богомолова О.И., ²Гараев Т.К.**¹*Казанский государственный энергетический университет, Казань, e-mail: boikfti@yandex.ru;*²*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ, Казань, e-mail: garaev77@mail.ru*

В работе рассмотрена актуальная тема аппроксимации функции, обратной к функции гамма-распределения. Обратные функции могут быть использованы в математическом моделировании для решения уравнений и генерации ряда случайных чисел. В случае, когда функция является функцией вероятностного распределения, при генерации получают ряд, соответствующий необходимому вероятностному закону распределения. В работе рассматривается алгоритм и программная реализация получения аппроксимации Паде для функций, обратных к функциям распределения. Основой получаемой аппроксимации служит разложение Доминичи в ряд Тейлора, реализованное программно в математическом пакете Mathcad. Полученные коэффициенты разложения используются для аппроксимации Паде. Аппроксимация Паде – классический метод рациональной аппроксимации аналитических функций, заключающийся в представлении функции в виде отношения двух полиномов. Большой интерес к аппроксимациям Паде обусловлен широким применением рациональных приближений в задачах статистики, химии, механики, теоретической физики. Данный подход может быть использован для определенного вида функций, к которому относятся все функции распределения. Рассмотрен частный случай гамма-функции, для обратной к которой получена таблица Паде. Данные таблицы могут быть использованы для программной реализации на требуемом языке программирования. В работе проведен анализ относительных погрешностей полученных аппроксимаций.

Ключевые слова: приближение функции, аппроксимация Паде, обратная функция, распределение вероятностей, гамма-функция

PADE TABLE GENERATION FOR THE INVERSE OF THE GAMMA DISTRIBUTION**¹Bogomolova O.I., ²Garaev T.K.**¹*Kazan State Power Engineering University, e-mail: boikfti@yandex.ru;*²*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI, e-mail: garaev77@mail.ru*

The paper deals with the actual topic of approximation of the function inverse to the gamma distribution function. Inverse functions can be used in mathematical modeling to solve equations and generate a series of random numbers. In the case when the function is a probability distribution function, a series corresponding to the required probability distribution law is obtained during generation. The paper deals with the algorithm and software implementation of obtaining the Pade approximation for functions inverse to distribution functions. The basis of the obtained approximation is the Dominici expansion into the Taylor series, implemented programmatically in the mathematical package matkad. The obtained decomposition coefficients are used to approximate the Pade. Pade approximation is a classical method of rational approximation of analytic functions, which consists in the representation of a function as a ratio of two polynomials. The great interest in Pade approximations is due to the wide application of rational approximations in problems of statistics, chemistry, mechanics, and theoretical physics. This approach can be used for a certain type of function to which all distribution functions belong. A special case of the gamma function for the inverse of which the Pade table is obtained is considered. These tables can be used for software implementation in the required programming language. The paper analyzes the relative errors of the obtained approximations.

Keywords: function approximation, Pade approximation, inverse function, probability distribution, gamma function

Один из важнейших разделов численной математики – аппроксимация функций [1]. Наиболее известный метод представления функции степенным рядом – разложение в ряд Тейлора [2]. В силу того, что нахождение приближения обратной функции представляет большую сложность, многие авторы исследовали эту проблему для конкретных функций, в частности для функции ошибок $\text{erf}(x)$.

Цель работы: получить аппроксимацию функции, обратной к гамма-функции вероятностного распределения.

Материалы и методы исследования

Для обратных функций разложение в ряд Тейлора представляет сложность с точки зрения практического применения. Решению этой проблемы посвящены работы Доминичи [3]. Доминичи представляет алгоритм получения коэффициентов разложения обратной функции с использованием вложенных производных.

Разложение Доминичи для функций, обратных функциям распределения, обеспечивает высокую точность приближения не на всем рассматриваемом отрезке. Для обеспечения более высокой точности необходимо учесть в ряде Тейлора члены с более высокими степенями, что неизбежно приведет к уве-

личению времени вычисления аппроксимируемой функции. Для уменьшения степени разложения, без ухудшения точности приближения применим аппроксимацию Паде [2].

Аппроксимация Паде – классический метод рациональной аппроксимации аналитических функций, заключающийся в представлении функции в виде отношения двух полиномов. Большой интерес к аппроксимациям Паде обусловлен широким применением рациональных приближений в задачах статистики, химии, механики, теоретической физики и т.д. [4]. Аппроксимации Паде – это наилучшие рациональные аппроксимации заданного степенного ряда.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим задачу получения таблицы Паде для обратной функции гамма-распределения. Для решения этой задачи потребуется получить коэффициенты разложения в ряд Тейлора для этой функции. Воспользуемся подходом, предложенным Доминичи. Автор рассматривает функции, задаваемые выражением

$$F(x) = \int_a^x r(t) dt. \quad (1)$$

Выражение (1) записывает функцию $F(x)$, как несобственный интеграл, нижний предел которого a удовлетворяет условию $a > 0$, верхний предел x условию $-\infty < x < +\infty$. Частный случай функции $F(x)$ – функция вероятностного распределения. Разложение базируется на введенном Доминичи понятии вложенной производной n -го порядка, которое определяется рекуррентно. Вложенная производная нулевого порядка определяется для $f(x) = 1/r(x)$ выражением

$$D^0[f](x) = 1. \quad (2)$$

Вложенная производная n -го порядка определяется выражением

$$D^n[f](x) = \frac{d}{dx} [[f](x) \times D^{n-1}[f](x)]. \quad (3)$$

Разложение в ряд Тейлора для функции, обратной функции распределения записывается выражением

$$F(z)^{-1} = a + f(a) \sum_{n \geq 1} D^{n-1}[f](a) \frac{z^n}{n!}. \quad (4)$$

В выражении (4) величиной a задаётся нижний предел интегрирования несобственного интеграла выражения (1), при условии $f(a) \neq 0$; z – переменная, по которой производится разложение обратной функ-

ции. Запишем ниже программную реализацию разложения Доминичи, реализованную в математическом пакете Mathcad. Функция, разложение обратной к которой требуется найти, задается аналитически. Ниже показан код соответствующей программы [5]:

```
GetSeriesCoeff(N, h, x0)
c ← matrix(N+1,1,σ)
g(x) ← 1
for n ∈ 1,2..N
  g(x) ← g'(x) + n·h(x)·g(x)
  cn ← g(x0)
return c
```

В коде программы используются следующие возможности математического пакета: аналитическое дифференцирование, матричная математика, циклы.

Функция, для обратной к которой требуется получить приближение, задается в Mathcad аналитически. Коэффициенты разложения этой функции в ряд Тейлора используются для получения коэффициентов аппроксимации Паде.

Аппроксимация Паде – рациональная дробь, в числителе которой многочлен степени L , а в знаменателе многочлен степени M :

$$f_{L,M}(t) = \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_L t^L}{1 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_M t^M}. \quad (5)$$

В знаменателе присутствуют $M + 1$ слагаемых, в числителе $L + 1$ соответственно.

Таблица Паде представляет собой двумерный массив, в общем случае записываемый в виде

Таблица 1

Общий вид таблицы Паде

L/M	0	1	2	...
0	[0/0]	[1/0]	[2/0]	...
1	[0/1]	[1/1]	[2/1]	...
2	[0/2]	[1/2]	[2/2]	...
...

Первый столбец этой таблицы – частные суммы разложения в ряд Тейлора.

Вычисление коэффициентов a_i аппроксимации Паде задается выражением

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0, \\ a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} c_i + b_L c_{L-i}. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты b_i получаются программно, как решение системы линейных уравнений, записанных выражением

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & \dots & c_L \\ c_{L-M+2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_L & \dots & \dots & c_{L+M-11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ \dots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \dots \\ c_{L+M} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Алгоритм получения коэффициентов Паде в математическом пакете Mathcad можно представить последовательностью шагов:

1. Задать аналитически функцию, для обратной к которой требуется получить приближение.
2. Получить коэффициенты Доминичи разложения в ряд этой функции.
3. На основе полученных коэффициентов рассчитать коэффициенты Паде, используя выражения (5, 6) для различных значений $N \geq 1, M \geq 1$.

Используя предложенный алгоритм, решим задачу для получения аппроксимации Паде для функции, обратной функции гамма-распределения.

Плотность вероятности гамма распределения задается выражением

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} \frac{e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

$\Gamma(k)$ – гамма-функция Эйлера.

Гамма-распределение зависит от двух параметров и является абсолютно непрерывным. Это распределение получило широкое распространение в инженерных науках и экономических моделях. Гамма-распределение применяется для описания ряда величин, имеющих положительное значение. Данное распределение несимметрично. Коэффициент α является параметром формы, θ – параметром масштаба (рис. 1).

Получим аппроксимацию обратной к гамма-функции, выполняя алгоритм, описанный в работах Доминичи.

Первый этап – получение коэффициентов Доминичи. Запишем в Mathcad функцию $f(x) = 1/\Gamma(x)$:

$$f(x) = e^x x^{1-\alpha}. \quad (9)$$

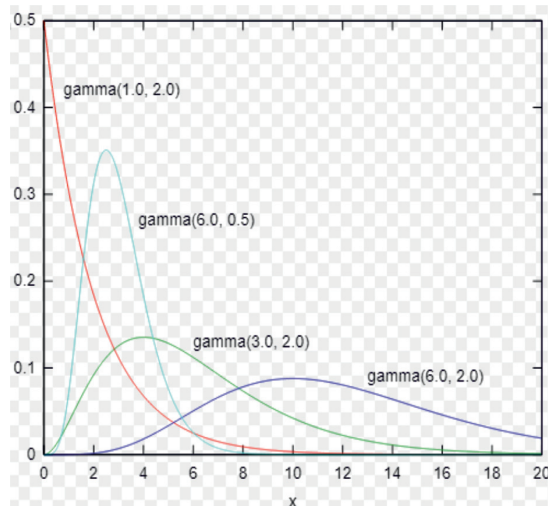


Рис. 1. Зависимость вида кривой гамма-распределения от параметров α и θ

Промежуточная величина $h(x) = f'(x)/f(x)$ принимает значение $1 - (\alpha - 1)/x$. Значение α возьмем равным 0,5. Точке x_0 , в которой производим разложение функции присвоим значение равное 0,25. Для получения коэффициентов разложения в ряд Тейлора функции, обратной к гамма-функции, используем разработанную программную реализацию GetSeriesCoeff(N, h, x0) в математическом пакете Mathcad. Результат работы программы – вектор коэффициентов. Значения первых шести коэффициентов разложения, полученные программно: {1, 3, 10, 58, 424, 3928}.

Полученные коэффициенты используем для аппроксимации Паде, решая в Mathcad соответствующие системы уравнений (5, 6). На рис. 2 показан листинг программы в Mathcad, предназначенной для расчета коэффициентов аппроксимации Паде. В табл. 1 представлены аппроксимации Паде для значений $M = 1,2$ и значений $N = 1,2$.

Исследуем относительную погрешность аппроксимации Паде и Доминичи. Проведем сравнение полученных аппроксимаций с представлением функции в Mathcad. Значения обратной функции получим, поменяв значения аргумента и функции. На рис. 3 показан график относительной погрешности на отрезке [0,1] аппроксимации Паде и Доминичи. Четная степень аппроксимации Паде N означает, что в числителе и знаменателе стоят многочлены степени N/2. На графике видно, что общая степень N аппроксимации Паде обеспечивает на всем отрезке лучшую аппроксимацию, чем аппроксимация Доминичи (рис. 3).

```

Pade(L,M,c,t) :=
  C ← matrix(M,M,δ)
  d ← matrix(M,1,δ)
  for i ∈ 0,1..M-1
    for j ∈ 0,1..M-1
      k ← i+j+1+L-M
      if k < 0
        Ci,j ← 0
      else
        Ci,j ← ck
  for i ∈ 0,1..M-1
    di ← -ci+L+1
  r ← lsolve(C,d)
  b ← matrix(M,1,δ)
  a ← matrix(L,1,δ)
  a0 ← c0
  for i ∈ 1,2..M
    bi ← rM-i
  for i ∈ 1,2..L
    m ← i
    if i > M
      m ← M
    ai ← ∑k=0m ci-k · bk
  return (∑i=0L ai · ti) ÷ (∑i=0M bi · ti)
  return [a b]
    
```

Рис. 2. Листинг программы получения аппроксимации Паде

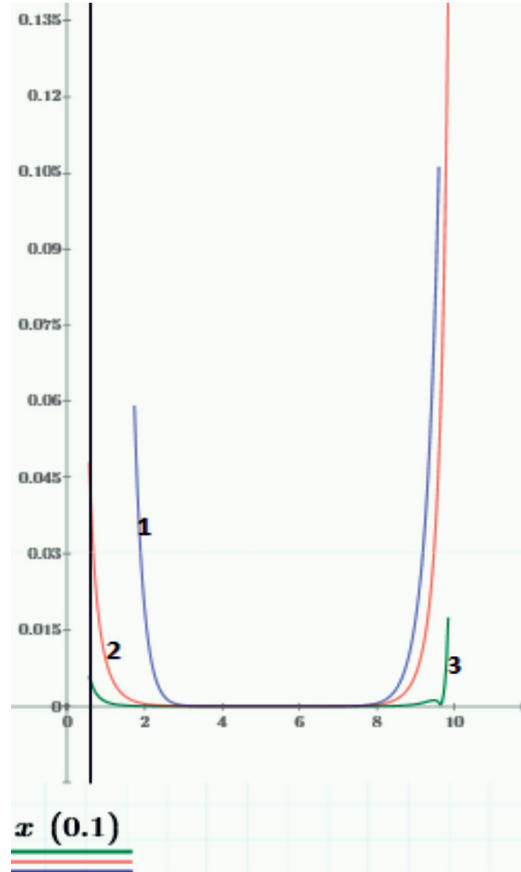


Рис. 3. Графики относительной погрешности для функции, обратной к функции гамма-распределения. Цифрами обозначены: 1 – приближение Доминичи (10-я степень); 2 – приближение Паде (8-я степень); 3 – приближение Паде (6-я степень)

Таблица 2
Таблица Паде для обратной к гамма-распределению функции ($\alpha = 0,5$)

L\M	1	2
1	$\frac{5t}{8} + \frac{1}{4}$ $-\frac{3t}{2} - 1$	$\frac{17t}{30} + \frac{1}{4}$ $\frac{14t^2}{15} - \frac{26t}{15} + 1$
2	$\frac{7t^2}{18} + \frac{13t}{18} + \frac{1}{4}$ $-\frac{10t}{9} - 1$	$\frac{167t^2}{168} + \frac{27t}{28} + \frac{1}{4}$ $-\frac{61t^2}{42} + \frac{t}{7} - 1$

Заключение

Полученные в работе аппроксимации Паде для функции, обратной функции гамма-распределения, могут быть использованы в задачах численного моделирования.

Коэффициенты аппроксимации Паде могут быть сохранены в текстовый файл и затем автоматически считаны для программной реализации на любом языке программирования. Полученные программы могут быть использованы для генерации ряда чисел, соответствующего гамма-распределению с заданными параметрами.

Список литературы

1. Поршнев С.В., Беленкова И.В. Численные методы на базе Mathcad. БХВ-Петербург, 2014. 464 с.
2. Колдаев В.Д., Гагарина Л.Г. Численные методы и программирование. М.: Форум, 2018. 336 с.
3. Dominici D. The inverse of the cumulative standard normal probability function. Integral Transforms and Special Functions, 2003. № 4. С. 281–292.
4. Пантелеев А.В., Кудрявцева И.А. Численные методы для инженеров и экономистов. М.: Факториал Пресс, 2017. 416 с.
5. Богомолова О.И. Программная реализация разложения в ряд Тейлора функций, обратных к функциям распределения с использованием вложенных производных // Вестник Технологического университета. 2018. № 11. С. 119–122.