

УДК 004.94:539.3

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИТА

Галиев И.М., Самакалев С.С.

БУ ВО Ханты-Мансийского автономного округа – Югры «Сургутский государственный университет», Сургут, e-mail: galiev_ildar@list.ru

На современном этапе развития материалов и технологий их производства одним из наиболее перспективных материалов является фиброкомпозит. Конструкции из материала с дисперсным армированием обладают повышенной трещиностойкостью и прочностью. Моделирование композитного материала, хаотически заполненного тонкими фибрами, в настоящее время представляется крайне сложным из-за разницы в масштабах матрицы и армирующего наполнителя. В данной работе представлена конечноэлементная модель фиброкомпозита для определения упругих свойств конструкций из данного материала. В основе модели лежит предположение о слабом влиянии изгибных характеристик армирующего наполнителя – фибры на свойство материала, а существенным считается только влияние сжатия и растяжения фибры. Это позволило описать фибры стержневыми конечными элементами. Что позволило, не увеличивая размерность итоговой алгебраической системы уравнений, описывать упругое поведение композита, заполненного фибрами. Применяя вариационный принцип, получена система алгебраических уравнений для нахождения перемещений узлов шестигранного конечного элемента с фибрами, представленными стержневыми конечными элементами. Выполненные расчеты в компьютерной программе, составленной на основе данной модели, согласуются с результатами, полученными прямым методом с малым количеством фибр.

Ключевые слова: композит, композиционный материал, фибра, метод конечного элемента, фибробетон

FINITE ELEMENT MODEL OF FIBER COMPOSITES

Galiev I.M., Samakalev S.S.

Surgut State University, Surgut, e-mail: galiev_ildar@list.ru

At the present stage of development of materials and technologies for their production, one of the most promising materials is fiber composite. Products from this material have increased crack resistance, tensile strength, impact strength, abrasion resistance. Modeling a composite material randomly filled with thin fibers now seems extremely difficult because of the difference in the scale of the matrix and the reinforcing filler. In this paper, we present a finite element model of a fiber composite to determine its elastic properties. The model is based on the assumption of a weak effect of the bending characteristics of the reinforcing filler – fiber on the property of the material, and consider only the effect of compression and tension of the fiber to be significant. This made it possible to describe fibers with rod finite elements. This allowed, without increasing the dimension of the final algebraic system of equations, to describe the elastic behavior of a composite filled with fibers. Applying the variational principle, a system of algebraic equations is obtained for finding the displacements of the nodes of a hexagonal finite element with fibers represented by rod finite elements. The performed calculations in a computer program compiled on the basis of this model are consistent with the results obtained by the direct method with a small number of fibers.

Keywords: composite, composite material, fiber, finite element method, fiber reinforced composite

Как показывают исследования [1], дисперсное армирование, например, пластиковыми [2], стальными [3, 4], биологическими [5] волокнами улучшает механические характеристики материалов. Такое упрочнение основывается на предположении, что матрица композита перераспределяет напряжения по поверхности волокон. При модуле упругости волокна больше, чем матрицы, считается что основную часть приложенных напряжений воспринимают волокна, а общая прочность композиционного материала пропорциональна их объемному содержанию.

Существующие теории об определении упругих характеристик фиброкомпозитов основываются на различных гипотезах [6]. В большинстве случаев авторы используют эмпирические зависимости [7]. Экспериментальные данные, касающиеся модуля

упругости фиброкомпозитов, также весьма противоречивы.

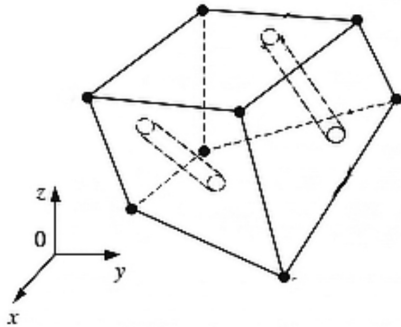
Введение коротких дискретных волокон в материал матрицы композита можно использовать для противодействия и предотвращения распространения трещин. Одной из основных проблем, препятствующих более широкому внедрению фиброкомпозитов, является отсутствие эффективных методов расчета конструкций из фиброкомпозитов на трещинообразование. Фиброкомпозит, в отличие от некомпозита, сохраняет прочность после образования трещин.

Численное исследование имеет первостепенное значение для описания локализации деформации и инициирования трещины, т.е. для определения условий возникновения сильных напряжений и, следовательно, появления трещин [8].

Цель исследования: построение упрощенной математической и соответствующей численной модели дисперсно-армированного композита.

Материалы и методы исследования

Используется вариационный метод построения системы уравнений метода конечных элементов. Будем рассматривать шестигранный конечный элемент [9] с включенными в него фибрами.



Шестигранный конечный элемент с двумя фибрами

В основе модели лежит предположение о слабом влиянии изгибных характеристик армирующего наполнителя – фибры на свойство материала, а существенным считается только влияние сжатия и растяжения фибры. Это позволило описать фибры стержневыми конечными элементами. Так что перемещения концов фибры выражаются через перемещения узлов конечного элемента, в котором находится фибра. Это позволило, не увеличивая размерность итоговой алгебраической системы уравнений, описывать упругое поведение композита, заполненного фибрами. Потенциальная энергия деформации в данном случае будет состоять из потенциальной энергии связующего всего элемента без фибр за вычетом потенциальной энергии связующего в области пространства, занимаемого фибрами и потенциальной энергии фибр.

Результаты исследования и их обсуждение

Для вывода уравнений понадобятся известные формулы теории упругости и мето-

да конечных элементов [9]. Представим их здесь в матричном виде.

В матричной форме связь между деформацией ϵ и перемещением \mathbf{U} и деформацией может быть записана в виде

$$\epsilon = \mathbf{L}\mathbf{U}, \tag{1}$$

где

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

u, v, w – перемещение вдоль осей x, y, z соответственно.

Закон Гука в матричной форме: $\sigma = \mathbf{c}\epsilon$, где матрица \mathbf{c} определяет упругие свойства материала, $c_{ij} = c_{ji}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора напряжений.

Рассмотрим элемент с n_d узлами, имеющими координаты \mathbf{x}_i (в трехмерном случае $\mathbf{x}_i(x, y, z)$), где i – номер узла ($i = 1, 2, \dots, n_d$). Представим функции (например, перемещение по оси x) следующим образом:

$$\varphi^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_d} p_i(\mathbf{x})\alpha_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n_d}\}$. Для трехмерного шестигранного 8-узлового элемента:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, xyz\}.$$

Заметим, что количество компонент этого вектора равно количеству узлов элемента.

Коэффициенты α_i определяются из условия равенства искомой функции (перемещений по оси x) в узлах (2) $\varphi^h(\mathbf{x}_i) = \varphi_i$, т.е. из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)\boldsymbol{\alpha}, i = 1, 2, 3, \dots, n_d. \tag{3}$$

В матричной форме можем записать так

$$\boldsymbol{\varphi}_e = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_e^T = (\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_{n_d})$ и

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_{n_d}(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_{n_d}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_{n_d}) & p_2(\mathbf{x}_{n_d}) & \dots & p_{n_d}(\mathbf{x}_{n_d}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_{n_d}) \end{pmatrix}.$$

Из (4) можно получить $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varphi}_e$. Подставляя это выражение в (2), получим

$$\boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\varphi}_e = \mathbf{N}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varphi}_e. \quad (5)$$

Где матрица \mathbf{N} называется функцией формы:

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{P}^{-1} = (N_1(\mathbf{x})N_2(\mathbf{x})\dots N_{nd}(\mathbf{x})).$$

Состояние равновесия или движения деформируемых систем наряду с дифференциальными уравнениями может описываться с помощью вариационных принципов. Например, с помощью принципа наименьшего действия Гамильтона: из всех допустимых перемещений наиболее вероятным является перемещение, соответствующее минимуму функционала Лагранжа. Математически принцип Гамильтона выражается формулой: $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dx$ Функционал Лагранжа

$$L = T - \Pi + W_f, \quad (6)$$

где T – кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия (энергия деформированного тела), W_f – работа внешних сил.

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV, \quad (7)$$

где V – объем твердого тела, \mathbf{U} – множество допустимых перемещений.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad (8)$$

$$W_f = \int_V \mathbf{U}^T \mathbf{f}_b dV + \int_{S_f} \mathbf{U}^T \mathbf{f}_s dS_f, \quad (9)$$

где S_f – поверхность тела, на которую действуют внешние силы, \mathbf{f}_b – плотность объемных сил, \mathbf{f}_s – плотность поверхностных сил.

После разбиения тела на конечные элементы необходимо деформации (перемеще-

ния) интерполировать некоторой функцией, используя значения перемещений в узлах элемента. Например, для перемещения по направлению оси x :

$$u^h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{nd} N_i(x, y, z) u_i = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{u}_e,$$

где h означает приближенное слагаемое, n_d – число узлов элемента, $\mathbf{u}_e^T = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{nd})$. Для трехмерной задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^h(x, y, z) &= \begin{pmatrix} u^h \\ v^h \\ w^h \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^{nd} \mathbf{N}_i(x, y, z) \mathbf{d}_i = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{d}_e, \end{aligned} \quad (10)$$

где u^h, v^h, w^h – приближенные значения перемещений вдоль осей x, y, z соответственно.

$$\mathbf{d}_i^T = (u_i \ v_i \ w_i), \quad (11)$$

$$\mathbf{d}_e^T = (\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \dots \ \mathbf{d}_{nd}). \quad (12)$$

Матрица функций формы \mathbf{N} будет иметь вид

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \dots \ \mathbf{N}_{nd}],$$

где

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}.$$

Так как согласно (1) $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, а согласно (10) $\mathbf{U}^h(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{d}_e$, то выражение (8) будет выглядеть

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mathbf{U}^T \mathbf{L}^T \mathbf{c} \mathbf{L} \mathbf{U} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \mathbf{c} \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{d}_e dV.$$

Обозначив

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (13)$$

(матрица напряжений), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mathbf{d}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} \mathbf{d}_e dV = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{d}_e.$$

Обозначим интеграл

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} dV \quad (14)$$

и назовем его матрицей жесткости (для восьмиузлового элемента это матрица размера 24×24). Тогда

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e. \quad (15)$$

Аналогично рассмотрев выражение для кинетической энергии (7), получим

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\mathbf{U}}^T \dot{\mathbf{U}} dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} \rho \dot{\mathbf{d}}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}}_e dV = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_e^T \left(\int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{d}}_e. \quad (16)$$

Введем обозначение $\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV$ и назовем эту матричную величину матрицей масс. Тогда (16) запишется в виде

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{d}}_e. \quad (17)$$

Работа внешних сил (9) с учетом (10) запишется

$$\begin{aligned} W_f &= \int_{V_e} \mathbf{U}^T \mathbf{f}_b dV + \int_{S_f} \mathbf{U}^T \mathbf{f}_s dS_f = \\ &= \int_{V_e} \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b dV + \int_{S_e} \mathbf{d}_e^T \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dS = \mathbf{d}_e^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b dV \right) + \mathbf{d}_e^T \left(\int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dS \right). \end{aligned}$$

Введя обозначения $\mathbf{F}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b dV$ и $\mathbf{F}_s = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dS$, получим

$$W_f = \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_b + \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_s = \mathbf{d}_e^T \mathbf{f}_e, \quad (18)$$

где $\mathbf{f}_e = \mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s$ – вектор действующих на элемент сил. Подставляя (16–18) в Лагранжиан (6), получим

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_e^T \mathbf{m}_e \dot{\mathbf{d}}_e - \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_e^T \mathbf{f}_e. \quad (19)$$

Применяя принцип Гамильтона, получим: $\mathbf{k}_e \mathbf{d}_e + \mathbf{m}_e \ddot{\mathbf{d}}_e = \mathbf{f}_e$.

Потенциальная энергия в рассматриваемой задаче с фибрами будет состоять из: потенциальной энергии связующего всего элемента без фибр Π_H за вычетом потенциальной энергии $\sum_{i=1}^n \Pi_{HTi}$ связующего в области пространства, занимаемого фибрами и потенциальной энергии фибр Π_T .

$$\Pi = \Pi_H - \sum_{i=1}^n \Pi_{HTi} + \sum_{i=1}^n \Pi_{Ti} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_H^T \mathbf{k}_H \mathbf{d}_H - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{d}_H^T \mathbf{k}_{HTi} \mathbf{d}_H + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{d}_{Ti}^T \mathbf{K}_{Ti} \mathbf{d}_{Ti},$$

где n – количество фибр, входящих в данный конечный элемент. Индекс Т (truss) обозначает стержневой элемент, Н (hexagon) – шестигранный элемент. Согласно определению матрицы жесткости (14):

$$\mathbf{k}_H = \int_{V_H} \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{c} \mathbf{B} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta, \quad \mathbf{k}_{HTi} = \int_{V_{Ti}} \mathbf{B}'^T \mathbf{c} \mathbf{B}' dV = A_e \int_0^{l_{ei}} \mathbf{B}'^T \mathbf{c} \mathbf{B}' dl.$$

Согласно (13): $\mathbf{B}' = \mathbf{L} \mathbf{N}'$. Элементы входящей в данное выражение матрицы \mathbf{N}' будут определены ниже (21).

В глобальной системе координат матрица жесткости запишется в виде: $\mathbf{K}_{Ti} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_{Ti} \mathbf{T}$, где \mathbf{T} – матрица перехода от локальной системы координат, связанной с конечным элементом, к глобальной. Лагранжиан (19) будет выглядеть как

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_H^T \left(\mathbf{m}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{HTi} \right) \dot{\mathbf{d}}_H - \frac{1}{2} \mathbf{d}_H^T \left(\mathbf{k}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_{HTi} \right) \mathbf{d}_H + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_{Ti}^T \mathbf{m}_{Ti} \dot{\mathbf{d}}_{Ti} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{d}_{Ti}^T \mathbf{K}_{Ti} \mathbf{d}_{Ti} + \mathbf{d}_H^T \mathbf{f}_H, \end{aligned} \quad (20)$$

где $m_H = \int_{V_H} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta$, $m_{HTi} = \int_{V_{Ti}} \rho \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dV$, $m_{Ti} = \int_{V_{Ti}} \rho_T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' dV$, ρ – плотность связующего, ρ_T – плотность фибры.

Согласно (3): $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, xyz\}$, $\boldsymbol{\alpha}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8\}$.

Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8\}$: $d_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \boldsymbol{\alpha}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 8$, где d_i – узловые перемещения (например, по оси x).

Тогда, с учетом (5):

$$d(x, y, z) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}^{-1} \mathbf{d}_e = \mathbf{N}'(\mathbf{x}) \mathbf{d}_e,$$

где

$$\mathbf{N}'(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}^{-1} = (N'_1(\mathbf{x}) \quad N'_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad N'_8(\mathbf{x})), \quad (21)$$

$$\mathbf{d}_e^T = (d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_8).$$

Из (11), (12) получим: $\mathbf{d}_H^T = (d_{e1} \quad d_{e2} \quad d_{e3} \quad d_{e4} \quad d_{e5} \quad d_{e6} \quad d_{e7} \quad d_{e8})$, \mathbf{d}_{ej} – вектор перемещения j -го узла: $\mathbf{d}_{ej}^T = (u_j \quad v_j \quad w_j)$,

$$\mathbf{d}_{Ti}^T = (d_{Ti1} \quad d_{Ti2}) = (u_{Ti1} \quad v_{Ti1} \quad w_{Ti1} \quad u_{Ti2} \quad v_{Ti2} \quad w_{Ti2}).$$

Тогда $u_{Ti1} = \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i1}) \mathbf{u}_H$, $v_{Ti1} = \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i1}) \mathbf{v}_H$, $w_{Ti1} = \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i1}) \mathbf{w}_H$, $u_{Ti2} = \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i2}) \mathbf{u}_H$, $v_{Ti2} = \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i2}) \mathbf{v}_H$, $w_{Ti2} = \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i2}) \mathbf{w}_H$, где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ – радиусы векторы концевых точек i -й фибры. $\mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H, \mathbf{w}_H$ – векторы перемещений узлов шестигранника, соответствующие осям координат, например,

$$\mathbf{u}_H^T = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_8), \quad \mathbf{d}_{Ti} = \begin{pmatrix} u_{Ti1} \\ v_{Ti1} \\ w_{Ti1} \\ u_{Ti2} \\ v_{Ti2} \\ w_{Ti2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i1}) \mathbf{u}_H \\ \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i1}) \mathbf{v}_H \\ \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i1}) \mathbf{w}_H \\ \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i2}) \mathbf{u}_H \\ \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i2}) \mathbf{v}_H \\ \mathbf{N}'(\mathbf{x}_{i2}) \mathbf{w}_H \end{pmatrix}.$$

Введем матрицу

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} N'_1(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & N'_2(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & N'_3(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N'_1(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & N'_2(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & N'_3(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N'_1(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & N'_2(\mathbf{x}_{i1}) & 0 & 0 & N'_3(\mathbf{x}_{i1}) & \dots & N'_8(\mathbf{x}_{i1}) \\ N'_1(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & N'_2(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & N'_3(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N'_1(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & N'_2(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & N'_3(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N'_1(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & N'_2(\mathbf{x}_{i2}) & 0 & 0 & N'_3(\mathbf{x}_{i2}) & \dots & N'_8(\mathbf{x}_{i2}) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{d}_{Ti} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{d}_H$. Лагранжиан (20) будет выглядеть как

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_H^T \left(\mathbf{m}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{HTi} \right) \dot{\mathbf{d}}_H - \frac{1}{2} \mathbf{d}_H^T \left(\mathbf{k}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_{HTi} \right) \mathbf{d}_H +$$

$$+ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_H^T \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i^T \mathbf{m}_{Ti} \mathbf{G}_i \right) \dot{\mathbf{d}}_H - \frac{1}{2} \mathbf{d}_H^T \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i^T \mathbf{K}_{Ti} \mathbf{G}_i \right) \mathbf{d}_H + \mathbf{d}_H^T \mathbf{f}_H =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_H^T \left(\mathbf{m}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{HTi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i^T \mathbf{m}_{Ti} \mathbf{G}_i \right) \dot{\mathbf{d}}_H - \frac{1}{2} \mathbf{d}_H^T \left(\mathbf{k}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_{HTi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i^T \mathbf{K}_{Ti} \mathbf{G}_i \right) \mathbf{d}_H + \mathbf{d}_H^T \mathbf{f}_H.$$

Применяя принцип Гамильтона, окончательно получим систему алгебраических уравнений для нахождения перемещений узлов шестигранного конечного элемента с фибрами, представленными стержневыми конечными элементами:

$$\left(\mathbf{k}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_{HTi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i^T \mathbf{K}_{Ti} \mathbf{G}_i \right) \mathbf{d}_H + \left(\mathbf{m}_H - \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_{HTi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i^T \mathbf{m}_{Ti} \mathbf{G}_i \right) \ddot{\mathbf{d}}_H = \mathbf{f}_H.$$

Заключение

На основе данной конечноэлементной модели составлена компьютерная программа, позволяющая рассчитывать прочность и жесткость конструкций из фиброкомпозита. Была проведена проверка модели на основе сравнения с результатами расчетов, полученными прямым методом в программе ANSYS Static Structural. Расчеты проводились только для конструкций с малым количеством фибр из-за большой вычислительной трудоемкости прямого метода. При данной проверке результаты обоих методов совпали.

Список литературы

1. Kar K.K. Composite Materials: Processing, applications, characterizations. Springer Berlin Heidelberg, 2017. DOI: 10.1007/978-3-662-49514-8.

2. Shi Yin. Development of Recycled Polypropylene Plastic Fibres to Reinforce Concrete. Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-981-10-3719-1.

3. Singh H. Steel Fiber Reinforced Concrete: Behavior, Modeling and Design. Springer, 2016. DOI: 10.1007/978-981-10-2507-5.

4. Рабинович Ф.Н. Композиты на основе дисперсно-армированных бетонов. Вопросы теории и проектирования, технология, конструкции. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2011. 560 с.

5. Mittal V. Spherical and fibrous filler composites. Wiley-VCH, 2016. DOI: 10.1002/9783527670222.

6. Bouvet C. Mechanics of Aeronautical Composite Materials. Wiley-ISTE, 2017. DOI: 10.1002/9781119459057.

7. Huiming Y., Yingtao Z. Introduction to the Micromechanics of Composite Materials. CRC Press, 2016.

8. Li S., Jeanmeure L.F.C., Pan Q.J. A composite material characterisation tool: UnitCells. J. Eng. Math, 2015. Vol. 95. 279 p.

9. Liu G.R., Quek S.S. The Finite Element Method: A Practical Course. Elsevier, 2014. DOI: 10.1016/C2012-0-00779-X.