

УДК 539.3

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ОБРАЗЦА ПРИ РАЗРЫВНОМ ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

¹Хромов А.И., ²Григорьев Я.Ю., ²Григорьева А.Л., ²Жарикова Е.П.¹ФГБУН «Институт прикладной математики» Дальневосточного отделения

Российской академии наук, Владивосток, e-mail: naj198282@mail.ru;

²ФГБОУ ВО «Комсомольский-на-Амуре государственный университет», Комсомольск-на-Амуре

Работа затрагивает область механики деформируемого твердого тела, которая является одной из самых актуальных и востребованных областей в машиностроении. В различных областях промышленности возникают проблемы, которые напрямую связаны с необходимостью решения задач, затрагивающих деформирование материала в различных областях конструкций. Возникает необходимость определения деформаций материала, которая может помочь определить проблемные области, требующие дополнительного усиления либо замены из-за угрозы разрушения. В связи с чем было рассмотрено математическое моделирование процесса деформирования оболочечных конструкций на примере деформирования плоского образца (части оболочки) в условиях плоского напряженного состояния при разрывном поле скоростей перемещений. В статье были получены аналитические решения полей тензоров деформации, которые наблюдаются в оболочках из различных материалов при их деформировании, проведен сравнительный анализ при различных деформационных состояниях, сделаны выводы. Актуальность построения данных решений связана с необходимостью получения полей деформаций в различных точках оболочек, использующихся на объектах различной направленности (военные, промышленные и так далее). Существенными трудностями, при определении полей деформаций численными методами (например, методом конечных элементов).

Ключевые слова: плоское напряженное состояние, малые конечные деформации, главные значения тензора Альманси, плоская деформация

THE DEFORMATION OF A FLAT SAMPLE AT A TERMINAL VELOCITY FIELD OF DISPLACEMENTS IN THE CONDITIONS OF PLANE STRESS STATE

¹Khromov A.I., ²Grigorev Ya.Yu., ²Grigoreva A.L., ²Zharikov E.P.¹Institute of applied mathematics of the far Eastern branch of the Russian Academy of Sciences,

Vladivostok, e-mail: naj198282@mail.ru;

²Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur

This work touches upon the field of mechanics of deformable solids, this area is one of the most relevant and in-demand areas in mechanical engineering. In various areas of the industry there are problems that are directly related to the need to solve problems affecting the deformation of the material in various areas of construction. There is a need to determine the deformation of the material, which can help to determine the problem areas that require additional strengthening or replacement due to the threat of destruction. In this connection, the mathematical modeling of the deformation process of shell structures was considered on the example of deformation of a flat sample (clean shell) under the conditions of a flat stress state with a discontinuous field of displacement velocities. In this paper we have obtained analytical solutions of fields of deformation that are observed in the shells of various materials during their deformation, comparative analysis at various deformation conditions, the conclusions. The actuality of constructing these solutions is associated with the need to obtain deformation fields at various points of shells used at objects of different orientation (military, industrial, and so on). Significant difficulties in determining the deformation fields by numerical methods (for example, the finite element method).

Keywords: velocity discontinuity lines, rigid-plastic body, tensor of finite deformations, strain rate tensor

Задачи об одноосном растяжении плоских и цилиндрических образцов в условиях плоской и осесимметричной деформации рассматривались в работах [1–3]. Алгоритм решения рассматриваемой задачи в целом соответствует указанным работам.

Еще одним решением задачи о растяжении полосы в условиях плоского напряженного состояния будет решение аналогично решению Е. Оната и В. Прагера при плоской деформации.

Цель работы: исследование и анализ зависимостей полей скоростей деформаций от относительных удлинений, возникаю-

щих при деформировании образца. Также целью данной работы является определение наиболее предпочтительных моделей поведения образца при различных полях скоростей перемещения и сравнительный анализ зависимостей деформирования образца как при плоской деформации, так и при плоском напряженном состоянии.

Материалы и методы исследования

Рассмотрим растяжение полосы с разрывным полем скоростей перемещений. Пластическая деформация в данном случае локализуется вдоль линий разрыва скоростей перемещений. Особенностью данной

задачи являются разрывность поля скоростей перемещений и скачкообразное увеличение деформаций при пересечении частицей линий разрыва скоростей и локализация деформаций в заштрихованной области (рис. 1).

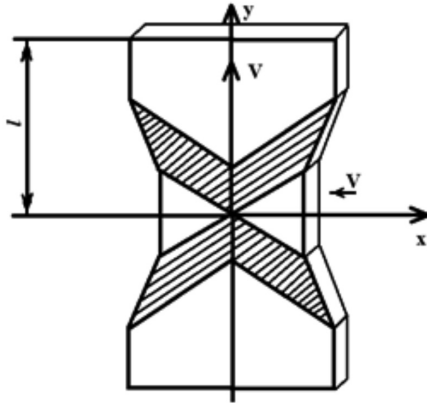


Рис. 1. Растяжение полосы при неоднородном поле скоростей перемещений

Пусть L – линия разрыва скоростей перемещений V_p , которая распространяется с нормальной скоростью G_p .

Деформация частицы в условиях плоского напряженного состояния при пересечении линии разрыва скоростей перемещений [4] (L) будет иметь вид (рис. 2), и нормальная скорость линии определяется по формуле: $G_i = -Gv_i$.

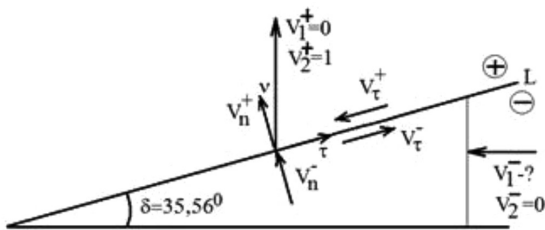


Рис. 2. Скорости деформаций

Движение среды будет описываться в форме Эйлера.

$$[x_{i,j}^0] = x_{i,j}^{0+} - x_{i,j}^{0-}, [V_i] = V_i^+ - V_i^-, \quad (1)$$

«+» и «-» определенная сторона линии разрыва.

Будем считать, что ниже линии разрыва L [5] материал недеформирован:

$$x_{i,j}^{0-} = \delta_{i,j}. \quad (2)$$

Для разрывов производных имеют место геометрические и кинематические условия совместности:

$$[x_{i,j}^0] = \lambda_i v_j, \left[\frac{\partial x_i^0}{\partial t} \right] = \lambda_i G, \quad (3)$$

v_j – единичный вектор нормали, τ_i – единичный вектор касательной с координатами $v(0,1)$, $\tau(1,0)$.

Вдоль траектории материальной частицы лагранжеские координаты постоянны:

$$\frac{dx_j^0}{dt} = \frac{\partial x_j^0}{\partial t} + V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} = 0. \quad (4)$$

Получаем

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = - \left[V_k \frac{\partial x_j^0}{\partial x_k} \right]. \quad (5)$$

Из соотношений (2) и (3) получаем

$$\left[\frac{\partial x_j^0}{\partial t} \right] = -[V_j] - \lambda_j V_n^+, \quad (6)$$

где $[V_j]$ – вектор разрыва скорости перемещения, который определяется в виде

$$[V_j] = [V_n] v_j + [V_\tau] \tau_j,$$

V_n^+ – нормальная скорость движения частицы на линии разрыва.

$$[V_n] = V_n^+ - V_n^-, [V_\tau] = V_\tau^+ - V_\tau^-.$$

Из уравнений (1)–(4) получаем

$$\lambda_i = \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} \tau_i, [x_{i,j}^0] = \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} \tau_i v_j, \quad (7)$$

$$x_{i,j}^{0+} = \delta_{i,j} - \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} \tau_i v_j. \quad (8)$$

Значение диссипации энергии для разрывного поля скоростей [6] перемещений при плоском напряженном состоянии имеет вид

$$W = W_1 + W_2,$$

$$W_1 = \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} k, W_2 = \frac{[V_n]}{G + V_n^+} k,$$

$$W = \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} k + \frac{[V_n]}{G + V_n^+} k.$$

Объемная плотность диссипации энергии, получаемой материальной частицей при пересечении поверхности разрыва скоростей, имеет вид

$$\bar{W} = \frac{W}{k}, \bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} + \frac{[V_n]}{G + V_n^+}. \quad (9)$$

Разрыв тензора градиентов перемещения имеет вид

$$[x_{i,j}^0] = \bar{W} \tau_i v_j = \begin{bmatrix} 0 & \bar{W} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из (10) получаем компоненты тензора Альманси в виде

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{i,j} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\bar{W} \\ -\bar{W} & -\bar{W}^2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Главные значения тензора Альманси согласно (11) имеют вид

$$E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right),$$

$$E_2 = -\frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right).$$

Из условия несжимаемости:

$$(1 - 2E_1)(1 - 2E_2)(1 - 2E_3) = 1.$$

Получаем

$$E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right),$$

$$E_2 = -\frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right), \quad E_3 = 0. \quad (12)$$

Определим значение объемной плотности энергии диссипации. Используя рис. 2, имеем

$$\begin{cases} V_n^- = V_1^- \sin \delta; \\ V_n^+ = V_2^- \cos \delta; \\ V_1^+ = 0; \\ V_2^+ = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Необходимо найти значение скорости перемещений V_1^- .

Для соотношения объемов при переходе через линию разрыва выполняются соотношения

$$\begin{cases} U^+ = f^+ V_n^+ t; \\ U^- = f^- V_n^- t. \end{cases} \Rightarrow \frac{U^+}{U^-} = \frac{f^+ V_n^+ t}{f^- V_n^- t} = 1. \quad (14)$$

Используя (14), получаем

$$f^+ V_n^+ t = f^- V_n^- t. \quad (15)$$

Из (13) и (15) имеем

$$f^+ V_2^- \cos \delta = f^- V_1^- \sin \delta;$$

при условии $f^+ = f^-$ имеем: $V_2^- \cos \delta = V_1^- \sin \delta$;

так как $V_2^- = 1$, то $V_1^- = \operatorname{ctg} \delta$.

Согласно (1) получаем

$$[V_1] = V_1^- - V_1^+ = \operatorname{ctg} \delta. \quad (16)$$

Разрыв скорости перемещений из (12)–(15) в нормальном направлении имеет вид

$$V_n^+ = \cos \delta, V_n^- = \cos \delta, [V_n] = 0. \quad (17)$$

Из (17) следует, что нормальная составляющая скорости перемещений непрерывна и скачок происходит только в касательном направлении. Из рис. 2 (совместно с (16)) имеем

$$V_\tau^- = \frac{(\cos \delta)^2}{\sin \delta}, V_\tau^+ = \sin \delta. \quad (18)$$

Разрыв касательной составляющей согласно (18) имеет вид

$$[V_\tau] = \sin \delta - \frac{(\cos \delta)^2}{\sin \delta} = -\frac{\cos 2\delta}{\sin \delta}. \quad (19)$$

Из соотношений (9), (12), (17), (19):

$$\bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G + V_n^+} + \frac{[V_n]}{G + V_n^+}, [V_\tau] = -\frac{\cos 2\delta}{\sin \delta},$$

$$V_n^+ = \cos \delta, [V_n] = 0, G = 0, \delta = 35^\circ 56', \quad (20)$$

$$E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right),$$

$$E_2 = -\frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right), \quad E_3 = 0.$$

Используя формулы (20), определим значения величин:

$$\bar{W} = -\frac{2\cos 2\delta}{\sin 2\delta} = -2\operatorname{ctg} 2\delta, \delta = 35^\circ 56',$$

$$E_1 = \operatorname{ctg} 2\delta \left(\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta} - \operatorname{ctg} 2\delta \right), \quad (21)$$

$$E_2 = -\operatorname{ctg} 2\delta \left(\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\delta} - \operatorname{ctg} 2\delta \right),$$

$$E_3 = 0.$$

Результаты исследования и их обсуждение

Полученные зависимости (20) и (21) являются решением задачи о растяжении полосы с разрывным полем скоростей перемещений и позволяют найти тензор конечных деформаций Альманси (11).

Приведем сравнительный анализ решений, полученных для задачи растяжения полосы с непрерывным полем скоростей перемещений и задачи с разрывным полем скоростей перемещений. На рис. 3 представлены зависимости первого инварианта тензора деформации Альманси (E_1) для решений с непрерывным и разрывным полем скоростей перемещений.

На рис. 4 изображены зависимости объемной плотности диссипации ($\bar{W}$) энергии для различных полей скоростей [7] перемещений (непрерывного и разрывного поля скоростей перемещений).

На рис. 5 показаны графики зависимостей усилия (P), необходимого для растяжения полосы, от относительного удлинения образца ($\bar{\epsilon}$) для решений с непрерывным полем скоростей перемещений и разрывным полем скоростей перемещений.

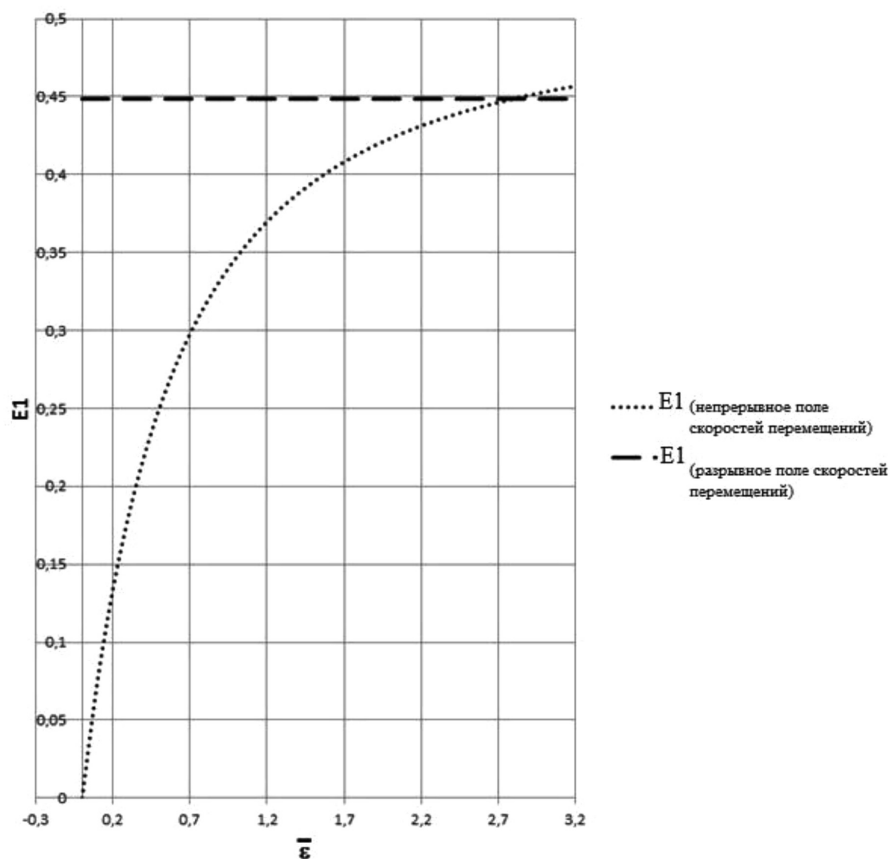


Рис. 3. Первое главное значение тензора деформации Альманси

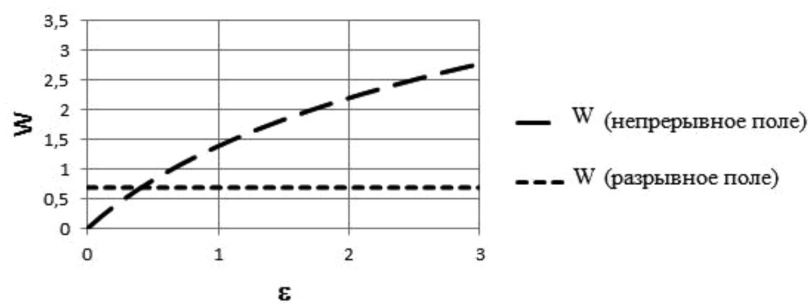


Рис. 4. Диссипация энергии

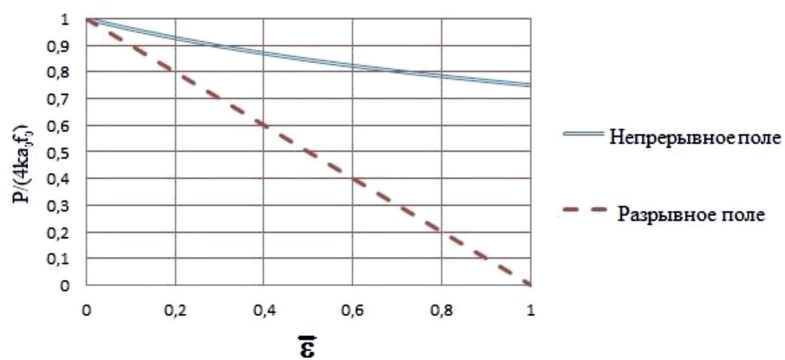


Рис. 5. Усилие, необходимое для растяжения образца

Заключение

Анализ полученных зависимостей показывает, что на начальном этапе деформирования решение с непрерывным полем скоростей перемещений при плоском напряженном состоянии приводит к меньшим деформациям частиц материала и к большим усилиям, необходимым для деформирования образца. Следовательно, модель с непрерывным полем скоростей перемещений более предпочтительна для реальных материалов (алюминиевые сплавы (7475, 1163, 1161, 2524 и т.д.), алюминивно-литиевые сплавы), причем анализ зависимостей, в отличие от плоской деформации образца, производится с учетом геометрии (изменение толщины и ширины образца). Данные выводы позволяют на ранних этапах деформирования оценить поведение элементы конструкции и сделать выводы о его деформировании в различных частях конструкции.

Результаты, полученные в данной работе, позволят принять соответствующие меры для предотвращения нежелательного деформирования и последующего разрушения материала, что приводит к возможному разрушению элемента конструкции.

Список литературы

1. Буханько А.А. Условие пластичности, связанное с линиями уровня поверхности деформационных состояний, для различных процессов деформирования // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2013. № 9–2 (110). С. 43–54.
2. Артемьева А.А., Баженов В.Г., Казаков Д.А., Кибец А.И., Нагорных Е.В. О больших деформациях и предельных состояниях упругопластических оболочек вращения при комбинированных сложных нагружениях // Прикладная математика и механика. 2015. Т. 79. № 4. С. 558–570.
3. Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Термомеханическая модель нелокального деформирования твердого тела // Известия РАН. МТТ. 2016. № 3. С. 20–27.
4. Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю. Алгоритм решения задачи о растяжении полосы с непрерывным полем скоростей перемещений с использованием деформационно-энергетического условия пластичности // Фундаментальные исследования. 2013. № 1–3. С. 694–700.
5. Григорьева А.Л., Хромов А.И. Одноосное растяжение жесткопластической полосы в условиях плоского напряженного состояния при однородном поле скоростей деформаций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 198–205.
6. Буханько А.А. Теория пластического течения в механике разрушения и её приложения: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Чебоксары, 2015. 209 с.
7. Bukhanko A.A., Ovchinnikova S.A. Approximation of the plastic zone by circular arcs during the sliding of a cylinder on the rigid-plastic half-space. International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (MEACS). Tomsk, Russia, 2014. DOI: 10.1109/MEACS.2014.6986898.