

УДК 004.9:51-74

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗИМНЕГО БЕТОНИРОВАНИЯ  
ФРАГМЕНТОВ СТЕН СПОСОБОМ ТЕПЛОВОЙ ОБРАБОТКИ****Турантаев Г.Г., Местников А.Е., Федоров В.И.***ФГАОУ ВО «Северо-Восточный федеральный университет имени академика М.К. Аммосова»,  
Якутск, e-mail: valeriyif.ykt@gmail.com*

В данной статье рассматривается возможность применения нетрадиционного способа тепловой обработки стеновой конструкции в зимнее время года. Проанализированы основные методы ведения бетонных работ при отрицательной температуре наружного воздуха. Составлена расчетная схема бетонизируемого фрагмента стены с учетом примыкающих конструктивных элементов сооружения. Основу статьи занимает вывод систем дифференциальных уравнений, характеризующих тепловые процессы при бетонировании фрагмента стены к ранее возведенным участкам и плитам перекрытий. Разработана математическая модель, описывающая процессы теплообмена на основе дифференциального уравнения теплопроводности с объемно распределенным источником тепла. При составлении математической модели использованы классические уравнения теплофизики, не требующие доказательства достоверности. Также в статье рассмотрены классические граничные условия I, II, III и IV родов. Достоверность результатов расчета оценена экспериментальным методом на фрагменте бетонной стены с заданной толщиной формы и температурой наружного воздуха. Обработка экспериментальных данных выполнена с использованием стандартных методов математической статистики. Построены графики изменения температурных перепадов на форме при различном шаге линейных нагревателей. Определена оптимальная скорость подъема температуры термоактивной опалубки для среднemasивных монолитных конструкций.

**Ключевые слова:** зимнее бетонирование, термосифон, теплопроводность, математическое моделирование, опалубка, тепловая обработка

**MATHEMATICAL MODELING OF WINTER CONCRETING  
OF WALL FRAGMENTS BY THE METHOD OF HEAT TREATMENT****Turantaev G.G., Mestnikov A.E., Fedorov V.I.***North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov, Yakutsk, e-mail: valeriyif.ykt@gmail.com*

This article discusses the possibility of using an unconventional method of heat treatment of a wall structure in the winter season. The basic methods of introducing concrete work at a negative outside temperature are analyzed. A design diagram of the concreted wall fragment was compiled taking into account the adjacent structural elements of the structure. The basis of the article is the derivation of systems of differential equations characterizing thermal processes during concreting of a wall fragment to previously erected sections and floor slabs. A mathematical model has been developed that describes heat transfer processes on the basis of the differential heat equation with a volumetric distributed heat source. In compiling the mathematical model, the classical equations of thermo-physics are used, which do not require proof of reliability. The article also discusses the classical boundary conditions of the first, second, third, and fourth genera. The reliability of the calculation results was estimated by the experimental method on a fragment of a concrete wall with a given shape thickness and outdoor temperature. Processing of experimental data was performed using standard methods of mathematical statistics. The graphs of changes in temperature differences on the form at different step linear heaters. The optimum rate of temperature rise of thermo-active formwork was determined for medium massive monolithic structures.

**Keywords:** winter concreting, thermosiphon, thermal conductivity, mathematical modeling, formwork, heat treatment

С учетом климатических условий северной строительной-климатической зоны Российской Федерации, монолитное бетонирование в большинстве случаев проводится при отрицательных температурах [1]. Например, в районах Арктической зоны Российской Федерации в зимнее время производится порядка 50–75 % бетонных работ [2].

Как известно, при бетонировании любых строительных конструкций, независимо от принятого способа производства работ, в бетоне возникает напряженное состояние, связанное с неравномерностью температурного поля по всему телу кон-

струкции [3]. Поэтому особым условием является обеспечение такого термонапряженного состояния конструкции, при котором в бетоне не возникают деструктивные процессы [4].

Одним из наиболее технологичных и эффективных методов зимнего бетонирования является способ контактного обогрева забетонированных конструкций [5]. Реализация данного метода достигается обогревом бетона и железобетона в термоактивной опалубке с принципиально новой системой распределения тепла на основе тепловых труб, работающих от любого источника тепловой энергии.

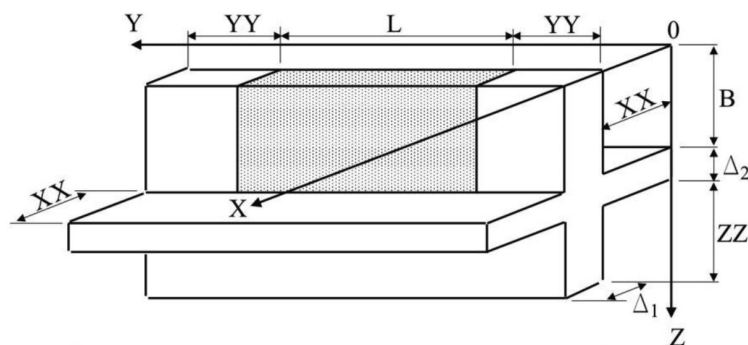


Рис. 1. Идеализованная конструктивная схема участка стены с учетом ранее построенных фрагментов конструкций здания

Анализ существующих методов зимнего бетонирования выявил эффективность метода электрообогрева монолитных конструкций с использованием различных вариантов термоактивных опалубочных форм [4–6]. В качестве греющего элемента предлагается использовать разновидность тепловой трубы – двухфазный термосифон. Двухфазный термосифон представляет собой оборудование для транспортировки теплоносителя, в котором теплота постепенно передается посредством суммарного эффекта скрытого образования пара по всему объему стенок труб. Это объясняется испарением жидкости теплоносителя в зоне подключения тепла и конденсации ее паров в зоне отвода. При этом полностью замкнутую циркуляцию теплоносителя приводит в действие сила тяжести.

До настоящего времени разновидности двухфазных термосифонов в строительной индустрии не нашли должного использования. Наиболее перспективное практическое применение двухфазных термосифонов открывается при бетонировании сборных и монолитных железобетонных (бетонных) строительных конструкций при отрицательной температуре наружного воздуха. С учетом рассмотренных выше положений следует отметить о необходимости дополнительного всестороннего исследования двухфазных термосифонов с использованием методологии строительной теплофизики и теплотехники.

Цель исследования: разработка метода расчетного обоснования параметров энергосберегающего и щадящего режима тепловой обработки бетона с помощью двухфазного термосифона.

#### Материалы и методы исследования

В математическом моделировании использованы классические уравнения теплофизики, не требующие доказательства достоверности [7, 8]: дифференциаль-

ное уравнение теплопроводности; условие Стефана; классические граничные условия I (задана температура бетона на границе), II (задана интенсивность теплового потока на границе), III (теплообмен на границе по закону Ньютона), IV (условие теплового примыкания двух твердых тел) рода. Обработка расчетных и экспериментальных данных выполнена на программах MathCAD 2001i и Microsoft Office EXCEL.

#### Результаты исследования и их обсуждение

Дифференциальные уравнения теплопроводности (1) и (2) аппроксимированы по методу неявной разностной схемы дробных шагов, разработанной профессором Н.Н. Яненко [8]. По качественным и количественным параметрам глубины проникновения теплового потока на плиту перекрытия, в уравнении (2) следует учесть граничные условия III рода. Такой подход не приводит к значительному усложнению дифференциальных уравнений, а также математической модели в целом.

Идеализованная конструктивная схема участка стены с учетом ранее построенных фрагментов конструкций здания показана на рис. 1.

Сегменты конструкции стен (рис. 1) являются пространственным сооружением (бетонируемая стена, ранее возведенные участки стены и плит перекрытий), что приводит к решению так называемой трехмерной задачи. Конструктивная схема участка стены имеет толщину  $\Delta_1$ , а плита перекрытия –  $\Delta_2$ . Область теплового влияния на ранее возведенные фрагменты стен по осям Y и Z – YY и ZZ. XX – это тепловые потоки, заданные молекулярной теплопроводностью бетона в ранее уложенной плите перекрытия.

В работе [9] автором ранее был рассмотрен фрагмент другой конструкции здания. По аналогии с которым в разрабатываемой модели следует также учесть

потоки тепла, исходящие от ранее возведенных участков конструкции стены, так и от плиты перекрытия. Вышерассмотренные условия предопределяют возможность построения трехмерной математической модели:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_{\phi}}{C_{\phi}} \left[ \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right] + \frac{\omega(\tau)}{C_{\phi}}, \\ x \in \Delta \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z \in B \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $t_{\phi}$ ,  $\lambda_{\phi}$ ,  $C_{\phi}$  – температура, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость опалубки с двухфазными термосифонами.

(1) – дифференциальное уравнение теплопроводности с объемно распределенным источником тепла для бетонизируемого фрагмента конструкции.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t_6(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_6}{C_6} \left[ \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right], \\ [x \in \Delta \wedge y \in YY \wedge z \in (B + ZZ)] \wedge [x \in \Delta \wedge (YY \leq y \leq (YY + L))] \wedge \\ \wedge [B \leq z \leq (B + ZZ)] \wedge [x \in \Delta \wedge ((YY + L) \leq y \leq (2YY + L)) \wedge z \in (B + ZZ)] \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $t_6$ ,  $\lambda_6$ ,  $C_6$  – температура, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость тяжелого бетона.

(2) – дифференциальное уравнение теплопроводности для ранее возведенных участков конструкции.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial t_{y,n}(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\lambda_{y,n}}{C_{y,n}} \left[ \frac{\partial^2 t_{y,n}(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_{y,n}(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_{y,n}(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right] + \\ + \frac{q_1}{\Delta y \cdot \Delta z \cdot C_{y,n}}, \\ ((x = 0 \vee x = \Delta) \wedge (x = X_f, f = 1, \dots, u)) \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z \in B \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_{\phi} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial t_n(x, y, z, \tau)}{\partial x} = 0, \\ (x = 0 \vee x = \Delta) \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z \in B \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda_n \frac{\partial t_n(x, y, z, \tau)}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial t_y(x, y, z, \tau)}{\partial x} = 0, \\ (x = 0 \vee x = \Delta) \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z \in B \end{array} \right. \quad (5)$$

(3), (4), (5) – уравнения теплового примыкания опалубки к телу бетонизируемого фрагмента в случае, когда линейный источник тепла  $q_1$  нельзя приводить к условно плоскому источнику тепла  $q_{on}(\tau)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \pm \lambda_{\phi} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial x} = q_{on}(\tau) + K_{np} [t_{\phi}(x, y, z, \tau) - \theta_3(\tau)], \\ (x = 0 \vee x = \Delta) \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z \in B \end{array} \right. \quad (6)$$

(6) – то же в случае, когда можно линейный источник тепла привести к условно плоскому, является комбинацией граничных условий II и III родов.

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda_{\phi} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial x} &= \alpha_n [t_{\phi}(x, y, z, \tau) - \theta_s(\tau)], \\ [(x = 0 \vee x = \Delta) \wedge y \in YY \wedge z \in (B = ZZ)] \wedge [(x = 0 \vee x = \Delta) \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge \\ \wedge (B \leq z \leq (B + ZZ))] \wedge [(x = 0 \vee x = \Delta) \wedge (YY + L) \leq y \leq (2YY + L) \wedge z \in (B + ZZ)] \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda_{\phi} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial z} + \lambda_{\phi} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial z} &= 0, \\ x \in \Delta \wedge (y \in YY \vee (YY + L) \leq y \leq (2YY + L)) \wedge z = B \\ x \in \Delta \wedge (y = YY \vee y = (YY + L)) \wedge z \in B \end{aligned} \right. \quad (8)$$

(7), (8) – граничные условия IV рода на границах теплового контакта возводимого фрагмента и ранее возведенных участков конструкции.

$$\left\{ \begin{aligned} -\lambda_{\phi} \frac{\partial t_{\phi}(x, y, z, \tau)}{\partial z} &= K_{np2} (t_{\phi}(x, y, z, \tau) - \theta_s(\tau)), \\ x \in \Delta \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z = 0 \end{aligned} \right. \quad (9)$$

(9) – граничные условия III рода на боковых поверхностях бетонируемого фрагмента.

$$\left\{ \begin{aligned} t_{\phi}(x, y, z, \tau) &= \text{const} = \theta_s(\tau), \\ \{ [x \in \Delta \wedge y \in YY \wedge z \in (B + ZZ)] \wedge [x \in \Delta \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge B \leq z \leq (B + \\ + ZZ)] \wedge [x \in \Delta \wedge ((YY + L) \leq y \leq (2YY + L)) \wedge z \in (B + ZZ)] \}, \tau = 0 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} t_{\phi}(x, y, z, \tau) &= \text{const} = t_n, \\ x \in \Delta \wedge (YY \leq y \leq (YY + L)) \wedge z \in B \wedge \tau = 0 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

(10), (11) – начальные условия.

$$\left\{ \begin{aligned} t(x, y, z, \tau) &= \text{const} = \theta_s(\tau), \\ [x \in \Delta \wedge (y = 0) \vee (y = (L = 2YY)) \wedge z \in (B + ZZ)] \wedge [x \in \Delta \wedge y \in (L + 2YY) \wedge z = (B + ZZ)] \end{aligned} \right. \quad (12)$$

(12) – граничные условия I рода в конце зон теплового влияния бетонируемого фрагмента.

$$\frac{\partial t_{\phi, \delta}(x = \Delta/2, y, z, \tau)}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

(13) – условие тепловой симметрии при  $x = \Delta/2$ .

Численное решение дифференциальных уравнений (1–13) выполнено с помощью специального алгоритма на сертифицированном программном обеспечении. Следующим этапом расчета является аппроксимация уравнения (1) по неявной разностной схеме дробных шагов Н.Н. Яненко [8]:

$$\begin{aligned} \frac{t_{i,j,k}^{n+1/3} - t_{i,j,k}^n}{1/3\Delta\tau} &= \frac{\lambda}{c} [\Lambda_{xx}(t_{i,j,k}^{n+1/3}) + \Lambda_{yy}(t_{i,j,k}^{n+1/3}) + \Lambda_{zz}(t_{i,j,k}^{n+1/3})] + \frac{1}{3}\Delta\tau\varphi \\ \frac{t_{i,j,k}^{n+2/3} - t_{i,j,k}^{n+1/3}}{1/3\Delta\tau} &= \frac{\lambda}{c} [\Lambda_{xx}(t_{i,j,k}^{n+1/3}) + \Lambda_{yy}(t_{i,j,k}^{n+2/3}) + \Lambda_{zz}(t_{i,j,k}^n)] + \frac{1}{3}\Delta\tau\varphi \\ \frac{t_{i,j,k}^{n+1} - t_{i,j,k}^{n+1/3}}{1/3\Delta\tau} &= \frac{\lambda}{c} [\Lambda_{xx}(t_{i,j,k}^{n+1/3}) + \Lambda_{yy}(t_{i,j,k}^{n+2/3}) + \Lambda_{zz}(t_{i,j,k}^{n+1})] + \frac{1}{3}\Delta\tau\varphi \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнений (14) имеет вид

$$\begin{cases} t_{i,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{i,j,k} t_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{i,j,k} \\ t_{i,j,k}^{n+2/3} = \vartheta_{i,j,k} t_{i+1,j,k}^{n+2/3} + \gamma_{i,j,k} \\ t_{i,j,k}^{n+1} = \varphi_{i,j,k} t_{i,j,k+1}^{n+1} + \psi_{i,j,k} \end{cases} \quad (15)$$

По аналогии с (15) запишем

$$\begin{cases} t_{i-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{i-1,j,k} t_{i-1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{i-1,j,k} \\ t_{i,j-1,k}^{n+2/3} = \vartheta_{i,j-1,k} t_{i,j-1,k}^{n+2/3} + \gamma_{i,j-1,k} \\ t_{i,j,k-1}^{n+1} = \varphi_{i,j,k-1} t_{i,j,k-1}^{n+1} + \psi_{i,j,k-1} \end{cases} \quad (16)$$

Решая совместно уравнения (15) и (16), находим

$$\begin{cases} t_{i-1,j,k}^{n+1/3} = \alpha_{i,j,k} \alpha_{i-1,j,k} t_{i+1,j,k}^{n+1/3} + \beta_{i,j,k} \alpha_{i-1,j,k} + \beta_{i-1,j,k} \\ t_{i,j-1,k}^{n+2/3} = \vartheta_{i,j,k} \vartheta_{i,j-1,k} t_{i,j+1,k}^{n+2/3} + \gamma_{i,j,k} \vartheta_{i,j-1,k} + \gamma_{i,j-1,k} \\ t_{i,j,k-1}^{n+1} = \varphi_{i,j,k} \varphi_{i,j,k-1} t_{i,j,k+1}^{n+1} + \psi_{i,j,k} \varphi_{i,j,k-1} + \psi_{i,j,k-1} \end{cases} \quad (17)$$

После подстановки соответствующих выражений (15–17) имеем

$$\begin{cases} t_{i-1,j,k}^{n+1/3} = \frac{A_1 + B_1 \alpha_{i,j,k} \alpha_{i-1,j,k} t_{i+1,j,k}^{n+1/3}}{C_1} + \frac{B_1 \beta_{i,j,k} \alpha_{i-1,j,k} + B_1 \beta_{i-1,j,k} + F_1 + \frac{1}{3} \Delta \tau \varphi}{C_2} \\ t_{i,j-1,k}^{n+2/3} = \frac{A_2 + B_2 \vartheta_{i,j,k} \vartheta_{i,j-1,k} t_{i,j+1,k}^{n+2/3}}{C_2} + \frac{B_2 \gamma_{i,j,k} \vartheta_{i,j-1,k} + B_2 \gamma_{i,j-1,k} + F_2 + \frac{1}{3} \Delta \tau \varphi}{C_2} \\ t_{i,j,k-1}^{n+1} = \frac{A_3 + B_3 \varphi_{i,j,k} \varphi_{i,j,k-1} t_{i,j,k+1}^{n+1}}{C_3} + \frac{B_3 \psi_{i,j,k} \varphi_{i,j,k-1} + B_3 \psi_{i,j,k-1} + F_3 + \frac{1}{3} \Delta \tau \varphi}{C_3} \end{cases} \quad (18)$$

Сравнивая соответствующие уравнения (15) и (18), находим прогоночные коэффициенты:

$$\begin{cases} \alpha_{i,j,k} = \frac{A_1}{C_1 - B_1 \alpha_{i-1,j,k}}; \beta_{i,j,k} = \frac{B_1 \beta_{i-1,j,k} + F_1 + 1/3 \Delta \tau \varphi}{C_1 - B_1 \alpha_{i-1,j,k}} \\ \vartheta_{i,j,k} = \frac{A_2}{C_2 - B_2 \vartheta_{i,j-1,k}}; \gamma_{i,j,k} = \frac{B_1 \gamma_{i,j-1,k} + F_2 + 1/3 \Delta \tau \varphi}{C_2 - B_2 \vartheta_{i,j-1,k}} \\ \varphi_{i,j,k} = \frac{A_3}{C_3 - B_3 \varphi_{i,j,k-1}}; \psi_{i,j,k} = \frac{B_1 \psi_{i,j,k-1} + F_3 + 1/3 \Delta \tau \varphi}{C_3 - B_3 \varphi_{i,j,k-1}} \end{cases} \quad (19)$$

Проверка теоретических данных осуществлялась экспериментально на фрагментах бетонной стены размерами 1,2×1,2×0,2 м с толщиной стальной формы 3 и 6 мм при шагах нагревателей от 100 до 300 мм (удельной мощности 200–1200 Вт/м²) и температуре наружного воздуха от –10 до –30 °С.

Полученные экспериментальные данные обработаны с использованием стандартных методов математической статистики и показаны в виде номограммы для

определения оптимального шага расположенных вплотную линейных нагревателей и на расстоянии 30 мм к форме толщиной от 1 до 6 мм, обеспечивающего температурные градиенты на поверхности формы в пределах 0,8–5 °С (рис. 2).

По результатам измерений были построены графики изменения температурных полей на форме при различном шаге нагревателей и расстоянии между формой и нагревателем (рис. 3).



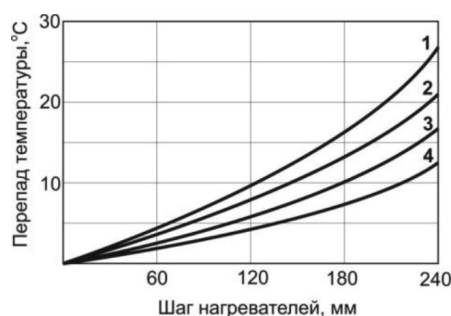


Рис. 2. Номограмма для определения основных характеристик линейных нагревателей

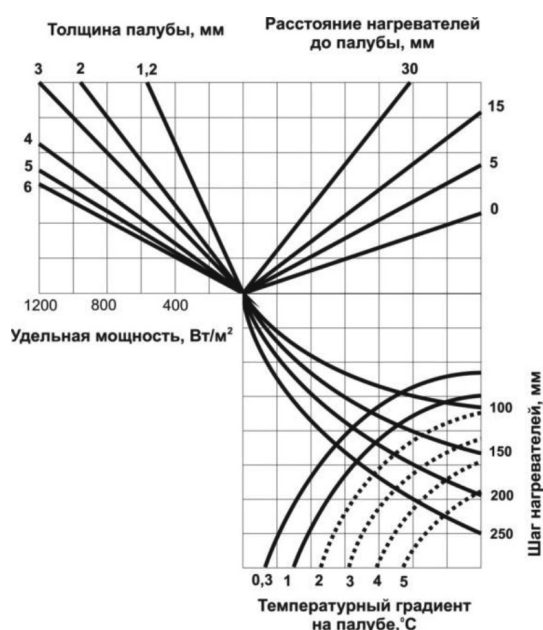


Рис. 3. Графики изменения температурных перепадов на форме при различном шаге линейных нагревателей: 1 – вплотную к форме; 2, 3 и 4 – на расстоянии 5, 14 и 30 мм от формы

Данные графиков и номограммы показывают причинно-следственную взаимосвязь между изменениями удельной мощности, толщиной формы, расстоянием нагревателей до стенки формы, шагом нагревателей, а также температурным градиентом. На основании вышеперассмотренных положений и расчетов оптимальная скорость подъема температуры для среднemasивных монолитных конструкций составляет не более 10 град/час. Приведенными расчетами выявлено, что возможность энергосбережения разработанным методом составляет 20% при гарантированном отсутствии деструктивных процессов в бетоне, ранее установленные С.Н. Шпанко [10].

## Выводы

1. Предложен способ термообработки монолитных бетонных конструкций при бетонировании стены с нагревателями из двухфазных сифонов (разновидность тепловых труб), работающих от любых видов тепловой энергии.

2. Теоретически обоснована и экспериментально подтверждена математическая модель температурных полей, исходящих от конструкции стены, примыкающей к ранее уложенным участкам стены и плит перекрытий.

3. Разработанная математическая модель дает возможность заменить линейный источник тепла на условно цилиндрический, что, в свою очередь, заметно упрощает процесс написания программного кода на языке программирования.

4. Разработана методика графического расчета для определения оптимального шага линейных нагревателей при различном расположении их на форме.

5. При внедрении данного способа подтверждена возможность энергосбережения до 20% с гарантированным качеством выполнения бетонных работ при отрицательных температурах, ранее установленных С.Н. Шпанко.

## Список литературы

1. Головнев С.Г. Зимнее бетонирование: этапы становления и развития // Вестник ВГАСУ. Серия: строительство и архитектура. 2013. № 31–2. С. 529–534.
2. Гнам П.А., Кивихарью Р.К. Технологии зимнего бетонирования в России // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2016. № 9. С. 7–25.
3. Семенов К.В., Барабанщиков Ю.Г. Термическая стойкость массивных бетонных фундаментных плит и ее обеспечение в строительный период зимой // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2014. № 2. С. 125–135.
4. Гныря А.И., Титов М.М., Кузнецов С.М. Организационно-технологическая надежность устройств для электропрогрева бетонных смесей // Механизация строительства. 2011. № 3. С. 2–5.
5. Минаков Ю.А., Кононова О.В., Анисимов С.Н., Грязина М.В. Управление кинетикой твердения бетона при отрицательных температурах // Фундаментальные исследования. 2013. № 4–2. С. 307–311.
6. Дудин М.О., Ватин М.И., Барабанщиков Ю.Г. Моделирование набора прочности бетона в программе ELCUT при прогреве монолитных конструкций проводом // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 2. С. 33–45. DOI: 10.5862/MCE.54.4.
7. Ляшков В.И. Теоретические основы теплофизики. М.: Изд-во Машиностроение-1, 2005. 260 с.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Б.и., 1966. 255 с.
9. Mestnikov A.E., Turantaev G.G., Fedorov V.I. Mathematical model of the thermodynamic system during winter concreting of bored piles. E3S Web of Conferences. 2019. vol. 97. P. 1–6. DOI: 10.1051/e3sconf/20199706014.
10. Завалишина Т.В., Шпанко С.Н. Энергосберегающий режим электрообогрева при зимнем бетонировании строительных конструкций // Изв. ВУЗ-ов. Строительство. 2000. № 9–10. С. 65–75.