

УДК 519.85:65.012.122

ПЛАНИРОВАНИЕ РЕМОНТА УЧАСТКА ДОРОГИ КАК ЗАДАЧА РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА

Печников А.А., Абрамов Е.В.

*Институт прикладных математических исследований – обособленное подразделение
ФГБУН Федерального исследовательского центра «Карельский научный центр
Российской академии наук», Петрозаводск, e-mail: pechnikov@krc.karelia.ru*

В любой стране состояние автомобильных дорог всегда было и остается важным показателем экономики. Считается, что экономическая отдача средств, вложенных в ремонт и содержание дорог, в два-три раза превышает экономический эффект от каждого рубля, вложенного в строительство новых дорог, поэтому оценка состояния дорожно-транспортных сетей и планирование ремонтных работ является важной проблемой, имеющей большое экономическое значение в масштабах района, региона, страны. В данной статье мы считаем, что задача оценки состояния дороги решена, и мы имеем некоторую карту дефектов дороги, содержащую достаточное количество информации для постановки оптимизационной задачи. Более точно, рассматривается задача ямочного ремонта выбоин, позволяющая по заданной карте дефектов сформировать план ремонтных работ, ведущий к наименьшим затратам ресурсов. В качестве математической модели используется модель комбинаторной оптимизации, заключающаяся в поиске оптимального объекта в конечном множестве объектов. Описаны содержательная и формальная постановки задачи, сформулированной как задача нахождения оптимального разбиения множества на непересекающиеся подмножества при заданных ограничениях на допустимые разбиения. Подробно рассматривается пример, демонстрирующий возможности модели. Оценивается сложность задачи, определяются дальнейшие направления исследований.

Ключевые слова: ямочный ремонт дороги, маска дорожного покрытия, карта ремонта, комбинаторная оптимизация, разбиение множества

PLANNING THE REPAIR OF THE ROAD SECTION AS PARTITION OF SET PROBLEM

Pechnikov A.A., Abramov E.V.

*Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy
of Sciences, Petrozavodsk, e-mail: pechnikov@krc.karelia.ru*

In every country, the state of the road infrastructure has always been and will remain an important economic indicator. Return of investments into road repair and maintenance is believed to be two to three times higher than the economic effect of each ruble invested in the construction of new roads. That is why assessing the state of road and transport networks, as well as planning repair works are important issues that have a major economic impact on a district, region or country. In this paper, it is assumed that the task of assessing road conditions has already been completed, and a road defect map containing enough information to formulate an optimization problem already exists. In particular, the article focuses on the problem of pothole patching using the given defect map to design a repair plan ensuring the lowest cost of resources. A combinatorial optimization model aimed at finding an optimal object from a finite set of objects is used as the mathematical model. The informal and formal statements of the problem, formulated as the problem of finding the optimal partition of a set into disjoint subsets under given partition constraints, are described. The author gives a detailed description of an example demonstrating the model capabilities, evaluates the task complexity and outlines directions for further research.

Keywords: road patching, road surfacing mask, repair map, combinatorial optimization, partition of a set

Автомобильный транспорт является одним из самых удобных видов перевозок. В любой стране состояние автомобильных дорог всегда было и остается важным показателем экономики. Очевидно, что плохие дороги отрицательно влияют на состояние экономики. Важно не только строительство и реконструкция дорог, требующие капитальных затрат, но и проведение комплекса работ и мероприятий по ремонту и содержанию дорог. В работе [1] говорится, что «...экономическая отдача средств, вложенных в ремонт и содержание дорог, в два-три раза превышает экономический эффект от каждого рубля, вложенного в строительство новых дорог». Поэтому оценка состояния дорожно-транспортных сетей и планирова-

ние ремонтных работ является важной задачей, имеющей большое экономическое значение в масштабах района, региона, страны.

Огромное количество факторов определяют характер эксплуатации автомобильной дороги. Их необходимо учитывать при организации работ по ремонту и содержанию. Оценка состояния дорог производится с применением программно-аппаратных комплексов, использующих записи видеокамер, видеосъемку, показания систем позиционирования и сканирования, с последующей обработкой результатов наблюдений в автоматизированном режиме. Для решения задачи оценки состояния дорог на базе собранной информации применяются различные подходы, такие как статистиче-

ские методы [2], машинное обучение [3], кластерный анализ [4] и др.

Другой стороной проблемы является необходимость оптимизировать затраты. Всем российским автомобилистам известно, что данная статья расходов хронически недофинансируется, особенно на уровне региональных и муниципальных дорог. Соответственно, рациональное использование имеющихся ресурсов приобретает ещё большее значение.

В данной работе мы исходим из того, что задача оценки состояния дороги решена с помощью одного из указанных выше подходов, и мы уже имеем карту дефектов дороги, содержащую достаточное количество информации для постановки оптимизационной задачи.

Задачи непрерывной оптимизации работ при ресурсных ограничениях с применением к ремонту автодорог рассматриваются в работах [5, 6]. Она исследуется с помощью построения ограниченной неотрицательной непрерывной функции $f(x,y)$, характеризующей в каждой точке участка дороги $M(x,y)$ значимость дефекта. Затем решается задача условной минимизации.

В отличие от непрерывного подхода в нашем случае в качестве математической модели применяется дискретная модель комбинаторной оптимизации, заключающейся в поиске оптимального объекта в конечном множестве объектов [7]. В данной статье приводятся содержательная и формальная постановки задачи, рассматривается небольшой пример, показывающий возможности модели, с помощью известного аппарата оценивается сложность задачи и определяются дальнейшие актуальные направления исследований.

Цель исследования, результаты которого изложены в настоящей статье, заключается в разработке дискретной математической модели комбинаторной оптимизации применительно к задаче планирования дорожных ремонтных работ, решение которой позволяет выбрать наиболее дешевый план по критерию общей стоимости ямочного ремонта заданного участка дороги.

Содержательная формулировка задачи и связанные с ней ограничения

Пусть имеется ограниченный по длине и одинаковый по ширине участок дороги с асфальтовым покрытием, для которого известна объективная оценка участка, например, в виде маски дорожного покрытия с указанием границ дефектов и их максимальной глубины [5]. Здесь в качестве дефектов будем рассматривать только выбоины, то есть местные разрушения дорожного

покрытия, имеющие вид углублений с резко выраженными краями [1].

Необходимо провести ямочный ремонт данного участка для восстановления его основных качеств. Цитируя [1], в этом случае «...традиционный способ предусматривает обрубку кромок выбоины с приданием ей прямоугольного очертания, очистку ее от асфальтобетонного лома и грязи, подгрунтовку дна и кромок выбоины, заполнение её ремонтным материалом и уплотнение. <...> В качестве ремонтного материала преимущественно используют асфальтобетонные смеси...»

Достаточно часто несколько соседних выбоин вырубается таким образом, что образуют одну единственную яму прямоугольного очертания, для обозначения которой используется термин «карта ремонта» [1]. Далее мы будем использовать его также и для обозначения ямы, возникающей на месте одной выбоины. Таким образом, карта ремонта – это яма прямоугольного очертания, подготовленная для укладки ремонтного материала после вырубки одной или нескольких соседних выбоин. Будем считать, что стороны любой карты ремонта имеют такую же ориентацию, как и участок дороги, что в основном соответствует практике ремонтных работ.

Кроме того, считаем, что один шаг ямочного ремонта – заделка единой заплатой одной или нескольких соседних выбоин, состоит из двух укрупненных этапов: подготовка карты ремонта и ее заполнение и уплотнение.

Поскольку карта ремонта имеет прямоугольное очертание, так называемая «дорожная заплатка» (или просто «заплата»), получаемая в результате заполнения и уплотнения ремонтного материала, – это прямоугольный параллелепипед (кубоид). Если, как в [5], исходить из того, что стоимость заделки ямы пропорциональна объему необходимых для этого работ, то с точки зрения минимизации затрат наиболее рациональным является подход «одна выбоина – одна заплатка».

Однако ситуация может измениться, если считать, что стоимость единицы работ первого этапа убывает с увеличением объема заплатки. Иными словами, подготовка двух отдельных выбоин объемом по 1 м^3 стоит дороже, чем подготовка одной выбоины объемом 2 м^3 . При этом будем считать, что стоимость второго этапа, как в [5], пропорциональна объему. В этом случае можно предположить, что за счет удешевления подготовительных работ окажется, что заделывать несколько соседних выбоин одной заплатой будет выгоднее, чем делать на каждую выбоину свою заплату.

Математическая модель, построенная ниже и продемонстрированная на простом примере, показывает, что подобная ситуация вполне реальна. Следовательно, можно говорить о том, что существует некоторое множество планов карт ремонта для заданного участка дороги с известной маской дорожного покрытия, из которых можно выбрать наиболее дешевый план по критерию общей стоимости ямочного ремонта данного участка.

Формализация задачи

Пусть рассматриваемый ограниченный участок дороги является прямоугольником, имеющим длину L и ширину W . Глубина дорожного покрытия в нашем случае не столь важна, чтобы ее определять отдельным символом, поскольку далее будет иметь значение только глубина выбоин. Выбоины представляют собой ограниченные односвязные непересекающиеся множества (не обязательно выпуклые), отделённые друг от друга неповрежденными участками. Пронумеруем все выбоины и будем считать, что их номера представляют собой множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

Карта ремонта выбоины – это минимальный прямоугольный параллелепипед (кубоид), в который вписывается данная выбоина. Кубоид для выбоины i обозначим $C(\{i\})$. Уже на этом этапе формальной постановки задачи вместо выбоин можно рассматривать соответствующие им кубоиды. Каждому кубоиду $C(\{i\})$ можно поставить в соответствие пятерку $(x_i^1, y_i^1, x_i^2, y_i^2, d_i)$, где пара (x_i^1, y_i^1) – координаты нижнего левого угла четырехугольника карты ремонта на плоскости X-Y (обозначим его $R(\{i\})$),

$(x_i^2, y_i^1), (x_i^2, y_i^2), (x_i^1, y_i^2)$ – координаты остальных трёх углов в порядке обхода против часовой стрелки, а d_i – максимальная глубина выбоины. Здесь мы рассматриваем случай, когда $\forall i, j: R(\{i\}) \cap R(\{j\}) = \emptyset$ (в случае невыполнения этого условия выбоины i и j заранее объединяются в одну). Пример, на котором демонстрируются введенные понятия и обозначения, представлен на рис. 1.

Назовем разбиением множества N такое множество подмножеств $\Omega_k = \{\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_r^k, \dots, \omega_{|\Omega_k|}^k\}$, каждый элемент которого есть подмножество $\omega_r^k \subseteq N$, $\forall r, t \in N: \omega_r^k \cap \omega_t^k = \emptyset$ и $\bigcup_{i=1, |\Omega_k|} \omega_i^k = N$.

Здесь $|\Omega_k|$ означает количество подмножеств ω в разбиении Ω_k , которое может варьироваться от 1 до N . При этом не каждое разбиение является допустимым. Например, на рис. 1 заделке всех выбоин поодиночке соответствует допустимое разбиение $\Omega_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, еще одно допустимое разбиение – $\Omega_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$, а разбиение $\Omega_3 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ не является допустимым, поскольку карты ремонта в этом случае будут накладываться друг на друга. В более общем виде можно записать, что из всего множества разбиений $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots\}$ множества N разбиение $\Omega_k = \{\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_r^k, \dots, \omega_{|\Omega_k|}^k\}$ является допустимым, если для $\forall r, t: R(\omega_r^k) \cap R(\omega_t^k) = \emptyset$.

Посмотрим, чему равен объем $V(\omega)$ для кубоида $C(\omega)$, построенного на некотором допустимом подмножестве ω . Если $\omega = \{i\}, \forall i \in N$, то понятно, что $V(\omega) = V(\{i\}) = (x_i^2 - x_i^1) * (y_i^2 - y_i^1) * d_i$. В случае, когда $\omega_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, i_k \in N$, несложно показать, что

$$V(\omega_k) = (\max\{x_{i_1}^2, \dots, x_{i_k}^2\} - \min\{x_{i_1}^1, \dots, x_{i_k}^1\}) * (\max\{y_{i_1}^2, \dots, y_{i_k}^2\} - \min\{y_{i_1}^1, \dots, y_{i_k}^1\}) * \max\{d_{i_1}, \dots, d_{i_k}\}.$$

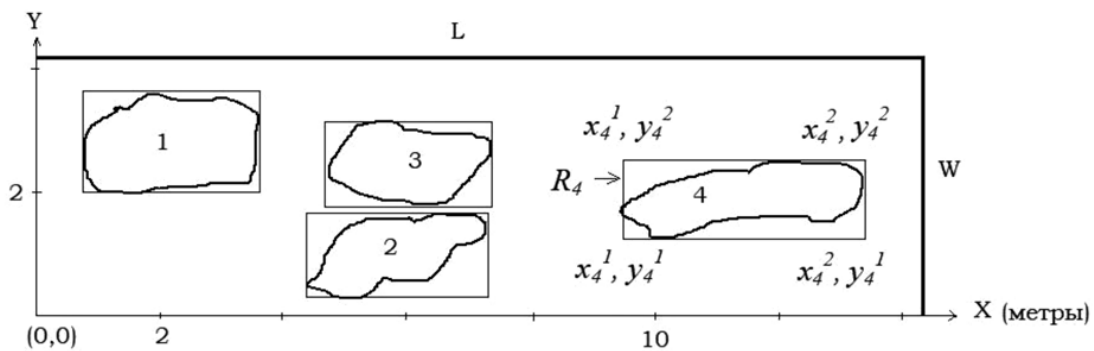


Рис. 1. Пример участка дороги (на плоскости X-Y)

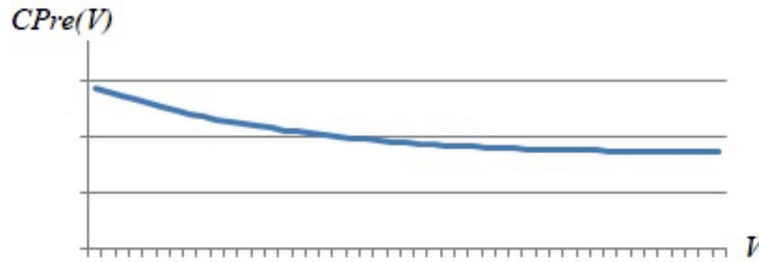


Рис. 2. График функции стоимости выполнения единицы объема первого этапа

Теперь оценим стоимость двух этапов ремонта, а именно подготовки карты ремонта и ее заполнения и уплотнения. Как было отмечено ранее, считаем, что стоимость выполнения единицы объема первого этапа является функцией, зависящей от объема выполняемых работ: чем больше объем кубоида, тем меньше стоимость единицы работ. Пусть V – вещественный аргумент больше 0, обозначим саму функцию $CPre(V)$. Для $CPre(V)$ из содержательных соображений можно сформулировать следующие свойства:

1. $CPre(V)$ невозрастающая функция:
 $CPre(V + \Delta V) \leq CPre(V), \Delta V > 0$.

2. $CPre(V)$ ограничена снизу,
 $\exists C_0 > 0, \forall V : CPre(V) \geq C_0$.

Содержательно C_0 означает значение, ниже которого стоимость единицы работ опуститься не может при самых больших объемах работ. Примерный график $CPre(V)$, который соответствует функции $CPre(V) = C_0 * (1 + \alpha^V)$, где коэффициент $0 < \alpha < 1$, приведен на рис. 2.

Для второго этапа будем считать, что стоимость заполнения и уплотнения единицы объема не зависит от общего объема выработки; обозначим эту константу $CFill$. Для заданного разбиения $\Omega_k = \{\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_r^k, \dots, \omega_{|\Omega_k|}^k\}$ общая стоимость работ есть функция от разбиения, которая равна

$$F(\Omega_k) = \sum_{i=1}^{|\Omega_k|} CPre(V(\omega_i^k)) * V(\omega_i^k) + CFill * \sum_{i=1}^{|\Omega_k|} V(\omega_i^k),$$

или после незначительных преобразований имеем

$$F(\Omega_k) = \sum_{i=1}^{|\Omega_k|} (CPre(V(\omega_i^k)) + CFill) * V(\omega_i^k).$$

Таким образом, на множестве всех допустимых перестановок Ω надо найти перестановку, минимизирующую функцию $F(\Omega_k)$.

Оптимизационная задача имеет следующую форму (1–2):

$$F(\Omega_k) = \sum_{i=1}^{|\Omega_k|} (CPre(V(\omega_i^k)) + CFill) * V(\omega_i^k) \rightarrow \min_{\Omega_k \in \Omega} \quad (1)$$

$$\forall \Omega_k \in \Omega : \forall r, t = 1..|\Omega_k|, r \neq t : R(\omega_r^k) \cap R(\omega_t^k) = \emptyset, \quad (2)$$

где (1) – целевая функция, а (2) – ограничение на допустимость разбиения.

Пример

Рассмотрим пример, изображенный на рис. 1. Пятерки, соответствующие выбоинам, зададим численно, причем координаты вершин соответствуют изображению на рисунке, а глубину выбоин зададим самостоятельно:

- 1: (0,7; 2; 3,6; 3,6; 0,2),
- 2: (4,4; 0,3; 7,2; 1,7; 0,15),
- 3: (4,5; 1,8; 7,3; 3,3; 0,16),
- 4: (9,5; 1,2; 13,4; 2,5; 0,3).

Общее количество разбиений множества $N = \{1,2,3,4\}$ равно 15, но среди них только 7 являются допустимыми. Для конкретных значений (близких к реальным), а именно, $CFill = 35000$ руб/м³, $C_0 = 7000$ руб/м³, $\alpha = 0,6$ и $CPre(V) = C_0 * (1 + \alpha^V)$ оптимальное решение достигается при разбиении $\Omega_4 = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$, стоимость ремонта всего участка при этом равна 48469 руб. Следует поодиночке заделывать выбоины 1 и 4, и одной картой выбоины 2 и 3.

Решение $\Omega_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$, когда все выбоины заделываются поодиночке, стоит 49305 руб.

Решение $\Omega_{15} = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$, когда все выбоины заделываются одной картой, стоит 1820017 руб.

Некоторые оценки и возможные направления исследований

Число неупорядоченных разбиений n -элементного множества, обозначаемое

B_n , называется числом Белла (при этом формально полагают $B_0 = 1$). Для чисел Белла справедлива формула Добинского

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \quad [8].$$

Значения первых 15 чисел Белла (начиная с $n = 1$): 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975, 678 570, 4 213 597, 27 644 437, 190 899 322, 1 382 958 545, то есть решение задачи для 15 выбоин требует более 1,3 млрд операций генерации разбиений.

Естественно, что реальное количество дорожных дефектов гораздо больше, чем 15. Отсюда следуют два возможных взаимосвязанных направления для продолжения исследований:

1) распараллеливание задачи и решение её с использованием высокопроизводительных многопроцессорных [9] и/или грид-систем [10];

2) разбиение задачи на подзадачи, очевидно связанное с тем, что достаточно протяженный участок дороги может быть разбит на несколько участков, следующих один за другим.

Одним из возможных математических подходов здесь представляется последовательная кластеризация объектов на плоскости с заданным количеством кластеров (или объектов, попадающих в каждый кластер), что, в свою очередь, приводит к интересной оптимизационной задаче.

Заключение

В статье рассмотрены содержательная и формальная постановки задачи ямочного участка дороги, сформулированная в виде задачи комбинаторной оптимизации разбиения множества на непересекающиеся подмножества, и дающей оптимум в смысле минимальных затрат ресурсов на ремонт заданного участка. Подробно рассматрива-

ется пример, показывающий адекватность и возможности модели. С помощью чисел Белла оценивается сложность задачи, близкая к экспоненциальной, и определяются дальнейшие направления исследований, связанные с использованием высокопроизводительных вычислителей и разбиением задачи на подзадачи.

Список литературы

1. Справочная энциклопедия дорожника. Т. 2. Ремонт и содержание автомобильных дорог / Под ред. А.П. Васильева. М., 2004. 897 с.
2. Oliveira H., Correia P.L. Automatic road crack segmentation using entropy and image dynamic thresholding // Proc. European Signal Processing Conf. (EUSIPCO'09). 2009. P. 622–626.
3. Sudakov S. et al. Semantic segmentation of road images based on cascade classifiers // Proc. of the ISPRS XXI Congr. 2008. P. 601–604.
4. Sidorov D., Wong S.W., Vasilyev I., Salerno S. Automatic defects classification with p-median clustering technique // Proc. of 10th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2008 (ICARCV). P. 775–780.
5. Лемперт А.А., Сидоров Д.Н., Жуков А.В., Нгуен Г.Л. Комбинированная технология оптимизации работ при ресурсных ограничениях с приложением к ремонту автодорог // Автоматика и телемеханика. 2016. № 11. С. 4–17.
6. Лемперт А.А., Сидоров Д.Н., Жуков А.В. Об одном подходе к оптимизации ремонта автомобильных дорог в условиях ограниченного финансирования // Сб. трудов VII Международного симпозиума «Обобщенные постановки и решения задач управления» (GSSCP-2014). Геленджик; Дивноморское, 26–30 сентября 2014 г. С. 114–118.
7. Ватутин Э.И., Титов В.С., Емельянов С.Г. Основы дискретной комбинаторной оптимизации. М.: Аргамак-Медиа, 2016. 270 с.
8. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2006. 392 с.
9. Суперкомпьютерные технологии в науке, образовании и промышленности / Под ред.: В.А. Садовниченко, Г.И. Савина, Вл.В. Воеводина. М.: Изд-во Московского университета, 2009. 232 с.
10. Ivashko E. Enterprise Desktop Grids // BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development. Proceedings of the Second International Conference BOINC:FAST 2015 (Petrozavodsk, Russia, September 14–18). 2015. P. 16–21.