УДК 536.24:621.396

АНАЛИЗ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Мадера А.Г.

ФГУ ФНЦ «Научно-исследовательский институт системных исследований» Российской академии наук, Москва, e-mail: alexmadera@mail.ru

Предложен метод анализа тепловых процессов в технических системах, основанный на псевдорешении уравнений математической модели, описывающей нестационарные и нелинейные тепловые процессы. Метод позволяет определять наилучшее решение уравнений математической модели по критерию минимума суммы квадратов разности правой и левой частей уравнений. Метод разработан для тепловой модели тепловых процессов в технических системах, основанной на концепции системы изотермических тел, находящихся в тепловом взаимодействии между собой и окружающей средой. В этой концепции объемная конструкция технической системы и протекающие в ней тепловые процессы представляются направленным графом, содержащим N узлов, моделирующих изотермические тела, и M ветвей, моделирующих теплообмен между ними и окружающей средой. В состав ветвей тепловой модели могут входить элементы с тепловыми проводимостями, теплоемкостями, внешними зависимыми и независимыми источниками тепловых потоков. С помощью тепловой модели естественным образом моделируются технические системы любой сложности и пространственной конфигурации, стационарные, нестационарные и нелинейные тепловые процессы со сложным теплообменом (кондукцией, конвекцией и излучением), включая различные физические эффекты, такие, например, как тепловая обратная связь, интервально-стохастическая неопределенность факторов теплообмена, течение жидкостной и воздушной среды. Возможность применения псевдорешения при моделировании тепловых процессов основана на том, что матрица уравнений математической модели теплообмена в технических системах, представима в виде разложения $H = AGA^T$ с прямоугольной матрицей инциденций A и диагональной матрицей тепловых проводимостей G. Метод псевдорешения позволяет также моделировать стохастические тепловые процессы и эффект тепловой обратной связи, что невозможно осуществлять другими методами. Проведено сравнение точных и псевдорешений, показавшее свою адекватность и достаточную для инженерной практики точность.

Ключевые слова: тепловые процессы, техническая система, моделирование, псевдорешение, псевдообратная матрица

ANALYSIS OF THE THERMAL PROCESSES IN TECHNICAL SYSTEMS BY THE PSEUDO-INVERSE MATRIX METHOD

Madera A.G.

FSE FSC Scientific Research Institute for System Studies of the Russian Academy of Sciences, Moscow, e-mail: alexmadera@mail.ru

A method for analyzing thermal processes in technical systems based on a pseudo-solution of the equations of a mathematical model describing nonstationary and nonlinear thermal processes is proposed. The method allows to determine the best solution of the equations of the mathematical model by the criterion of minimum sum of squares of the difference between the right and left parts of the equations. The method is developed for the thermal model of thermal processes in technical systems based on the concept of a system of isothermal bodies that are in thermal interaction with each other and with the environment. In this concept, the complex design of the technical system and the thermal processes flowing in it are represented by a directed graph containing N nodes simulating isothermal bodies and M branches simulating heat exchange between them and the environment. The branches of the thermal model can include elements with thermal conductivities, heat capacities, external dependent and independent sources of heat fluxes. With the help of the thermal model, technical systems are naturally modeled for any complexity and spatial configuration, stationary, nonstationary and nonlinear heat processes with complex heat exchange (conduction, convection and radiation), including various physical effects, such as thermal feedback, interval stochastic uncertainty of heat transfer factors, flow of liquid and air. Ability to use pseudo-solution for modeling thermal processes is based on the fact that the matrix equations of the mathematical model of heat exchange in technical systems, are represented as a decomposition $H = AGA^T$ with a rectangular matrix incidence A and thermal conductivities diagonal matrix G. The method also allows to model the stochastic thermal processes and the effect of thermal feedback, which can’t be carried out by other methods. Comparison of exact and pseudo-solution is carried out showing it adequacy and sufficient accuracy for practice.

Keywords: thermal processes, technical system, simulation, pseudo-solution, pseudo-inverse matrix

Тепловая модель тепловых процессов в технических системах (ТС), основанная на концепции системы изотермических тел [1], находящихся в тепловом взаимодействии между собой и окружающей средой, является в настоящее время наиболее универсальным и эффективным методом теплового моделирования. В этой концепции объемная конструкция ТС и протекающие в ней тепловые процессы представляются направленным графом, содержащим N узлов, моделирующих изотермические тела, и M ветвей, моделирующих теплообмен между ними и окружающей средой. В состав ветвей тепловой модели могут входить элементы с тепловыми проводимостями, теплоемкостями, внешними зависимыми и независимыми источниками тепловых потоков. С помощью тепловой модели естественным образом моделируются ТС любой сложности и пространственной конфигурации, стационарные, нестационарные и нелинейные тепловые процессы со сложным теплообменом (кондукцией, конвекцией и излучением), включая различные физические эффекты, такие, например, как тепловая обратная связь в ТС, интервально-стохастическая неопределенность факторов теплообмена, течение жидкостной и воздушной среды в ТС.

Математическая модель, описывающая нестационарные, нелинейные тепловые процессы в ТС, представленной тепловой моделью, представляет собой матричное дифференциальное уравнение в обыкновенных производных первого порядка [1]:

$$C\frac{dT(t)}{dt} + AG(T,t)A^T \cdot T(t) = = J(T,t) + AG(T,t)\cdot T_a(t),$$

$$T(0) = T_0, \qquad (1)$$

где $T(t)$ – N-вектор-столбец искомых нестационарных температур в узлах графа тепловой модели ТС; A – $N\times M$-матрица инциденций графа тепловой модели; G – $M\times M$-диагональная матрица тепловых проводимостей ветвей графа тепловой модели; C – $N\times N$-диагональная матрица тепловых емкостей изотермических элементов тепловой модели; J – N-вектор независимых источников тепловых потоков в тепловой модели; T_a – N-вектор-столбец известных температур в узлах графа тепловой модели; T_0 – N-вектор начальных температур в узлах графа тепловой модели.

Стационарные и нелинейные тепловые процессы в тепловой модели ТС описываются математической моделью в виде системы нелинейных алгебраических уравнений

$$AG(T)A^T \cdot T = J(T) + AG(T)\cdot T_a, \qquad (2)$$

а линейные тепловые процессы, с независящими от температуры проводимостями в матрице G и независимыми источниками тепловых потоков векторе J, – математической моделью в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$AGA^T \cdot T = J + AG\cdot T_a. \qquad (3)$$

Решение матричных уравнений (2) или (3) относительно неизвестного вектора температур T, как правило, осуществляется методом итерации. Для применения итерационного метода исходную систему уравнений предварительно подготавливают, разлагая диагональные элементы h_{ii} ($i = 1, 2, \ldots, N$) матрицы $H = AGA^T$ на сумму $h_{ii} = h_{ii}^* + 1$, так что матрица H становится равной $H = H^* + I$ с единичной диагональной матрицей I. Тогда исходная система (2) или (3) приводится к удобному для итерационного метода виду, а именно, к $T = -H^*\cdot T + J + AG\cdot T_a$. Вместе с тем теорема сходимости процесса итерации [2] накладывает довольно жесткие ограничения на матрицу H^*, требуя выполнение соотношения $\|H^*\| < 1$ для какой-либо из ее норм $\|\cdot\|$, которое довольно редко выполняется на практике и чаще вообще не выполняется. Поэтому разработка методов решения как линейных, так и в особенности нелинейных систем уравнений, свободных от подобного рода требований, чрезвычайно актуальна.

Цель исследования: разработка метода, позволяющего определять решение как линейных, так и нелинейных систем алгебраических уравнений вида (2) и (3), моделирующих тепловые процессы в технических системах с приемлемой для практики точностью [3]. Метод основан на так называемом псевдорешении и псевдообратной матрице [4, 5], которое дает решение хотя и приближенное, однако наилучшее в смысле минимума суммы квадратов невязки правой и левой частей уравнений. Применение метода псевдорешения в рассматриваемом случае оказывается возможным ввиду специального вида исходной матрицы системы, а именно, $H = AGA^T$. Представление матрицы тепловой и математической моделей теплообмена как $H = AGA^T$ позволяет применить к поиску решения системы уравнений аппарат псевдообратной матрицы, оказавшийся чрезвычайно гибким и эффективным. Его применение позволяет моделировать тепловые процессы в сложных конструкциях электронных систем [6], стохастические процессы теплообмена [1] и учитывать воздействие эффекта тепловой обратной связи в ТС.

Метод псевдообратной матрицы и псевдорешения

Рассмотрим матричное нелинейное алгебраическое уравнение (2). Умножим обе его части слева на транспонированную матрицу инциденций A^T, получим

$$A^T AG(T)A^T \cdot T = A^T J(T) + A^T AG(T)\cdot T_a. \qquad (4)$$

Матрица $B = A^TA$ равна произведению двух прямоугольных матриц, $M\times N$-матрицы A^T и $N\times M$-матрицы A, причем для тепловых моделей реальных ТС выполняется соотношение $N < M$. Ранг матрицы B равен $r = \min\{N, M\}$ и ее представление в виде произведения двух прямоугольных матриц A^T и A является ее скелетным разложением [5]. Поскольку ранг квадратной матрицы

B удовлетворяет условию $r < M$, то матрица B является вырожденной и, следовательно, обратной матрицы не имеет. Вместе с тем существует ее псевдообратная матрица B^+, обладающая тем замечательным свойством, что для системы уравнений $Bx = y$ (x и y – N-векторы) с прямоугольной или вырожденной матрицей B норма невязки

$$y - Bx^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| y_i - \sum_{j=1}^{M} b_{ij} x_{ij} \right|^2$$

достигает своего наименьшего среди всех других векторов X значения на, так называемом псевдорешении $X^+ = B^+Y$, выражающемся через псевдообратную матрицу B^+, причем вектор X имеет при этом и наименьшую длину [4, 5].

Если для вырожденной матрицы B построено ее скелетное разложение $B = A^TA$, то псевдообратная матрица B^+, может быть выражена в виде [4, 5]

$$B^+ = A^T (AA^T)^{-1} (AA^T)^{-1} A. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (4) запишется как

$$G(T) A^T \cdot T = B^+ A^T (J(T) + AG(T) \cdot T_a). \qquad (6)$$

Матрица $G(T) = diag\{g_k(T)\}_1^M$, будучи диагональной, имеет обратную диагональную же матрицу, с легко вычисляемыми элементами, то есть $G^{-1}(T) = diag\{g(T)_k^{-1}\}_1^M$. Умножая обе части матричного выражения (6) слева на обратную матрицу $G^{-1}(T)$, получим

$$A^T \cdot T = G^{-1}(T) B^+ A^T (J(T) + AG(T) \cdot T_a). \qquad (7)$$

Умножим теперь обе части матричного выражения (7) слева на матрицу A. Матрица $C = AA^T$ является квадратной, симметричной и невырожденной, поскольку ее ранг $r = N$ совпадает с ее размерностью и, следовательно, матрица $C = AA^T$ имеет обратную матрицу $C^{-1} = (AA^T)^{-1}$. Заметим, что матрица инциденций A не зависит от температуры и состоит только из элементов 0, +1 и –1.

Окончательное явное псевдорешение T^+ уравнения (7) будет равно

$$T^+ = (AA^T)^{-1} AG^{-1}(T^+) B^+ A^T \left(J(T^+) + AG(T^+) \cdot T_a \right),$$

или после подстановки в него выражения (5) для псевдообратной матрицы B^+, искомое псевдорешение составит

$$T^+ = (AA^T)^{-1} AG^{-1}(T^+) A^T (AA^T)^{-1} \left(J(T^+) + AG(T^+) \cdot T_a \right).$$

Учитывая, наконец, что вид матрицы $C = AA^T$, получим окончательно:

$$T^+ = C^{-1} AG^{-1}(T^+) A^T C^{-1} \left(J(T^+) + AG(T^+) \cdot T_a \right). \qquad (8)$$

Преимущество определения псевдорешения T^+ (8) перед обычным решением $T = H^{-1} \cdot (J(T) + AG(T) \cdot T_a)$, следующим из (4), состоит в том, что во втором случае требуется постоянное обращение матрицы $H^{-1} = (AG(T)A^T)^{-1}$ при различных значениях температур T, в то время как в первом случае требуется только вычисление диагональной обратной $G^{-1}(T)$, записанной в явном виде относительно температур T, элементы которой легко вычисляются.

Оценка адекватности псевдорешения и сравнение с точным

Проведем оценку и сравнение обычного и псевдорешения между собой и рассмотрим для этого матричное уравнение $AGA^T \cdot x = y$ для двух конкретных случаев.

А) Матрицы и векторы рассматриваемой системы уравнений $AGA^T \cdot x = y$ равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Точное решение уравнения $AGA^T \cdot x = y$ и псевдорешение, вычисленное согласно полученному выражению (8), а именно, $x^+ = C^{-1} AG^{-1} A^T C^{-1} \cdot y$ равны соответственно

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}111111 \\ 1{,}861111 \end{pmatrix}, \; x^+ = \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}111111 \\ 1{,}911111 \end{pmatrix}.$$

Сравнение точного x и псевдорешения x^+ показывает их практически полное совпадение: первые элементы решений равны 1,111111 и совпадают полностью, а вторые элементы $x_2 = 1{,}861111$ и $x_2^+ = 1{,}911111$ различаются между собой с абсолютной погрешностью $\Delta = 0{,}05$ и относительной погрешностью $\delta = 2{,}7\%$.

В) Матрицы и векторы уравнения $AGA^T{\cdot}x = y$ равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 8{,}7 \\ 1{,}8 \\ 3 \\ 0{,}3 \\ 2{,}6 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}03 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}17 \end{pmatrix}.$$

Точное решение равно:

$$x = (323{,}6\ \ 294{,}9\ \ 293{,}4\ \ 164\ \ 279)^T,$$

псевдорешение:

$$x^+ = (352{,}2\ \ 294{,}5\ \ 303{,}6\ \ 164\ \ 280{,}6)^T.$$

Сравнение точного и псевдорешений между собой показывает, что

– вектор абсолютных погрешностей составляет

$$\Delta = (28{,}6\ \ 0{,}44\ \ 10{,}24\ \ 5{,}97\cdot10^{-13}\ \ 1{,}68)^T,$$

– вектор относительных погрешностей

$$\delta = (8{,}84\ \ 0{,}15\ \ 3{,}49\ \ 3{,}64\cdot10^{-13}\ 0{,}6)^T, \%.$$

Значения относительных погрешностей сравнения точного и псевдорешения показывают, что они не превышают величины 8,9%, что находится в пределах допускаемых при инженерных расчетах тепловых режимов ТС.

Выводы

В работе предложен новый метод моделирования и анализа тепловых процессов в сложных технических системах. Математической моделью тепловых процессов в стационарном случае являются системы алгебраических уравнений: нелинейных для температурозависимых процессов теплообмена и линейных в случае их независимости от температуры. Созданию нового метода решения уравнений математической модели и посвящена данная статья.

Разработанный здесь метод позволяет определять решение как линейных, так и нелинейных систем алгебраических уравнений математической модели (2) и (3) с приемлемой для практики точностью. Метод основан на псевдорешении матричных уравнений и псевдообратной матрице, которое определяет приближенное решение, которое является наилучшим с точки зрения критерия минимума суммы квадратов разности между правой и левой частями матричных уравнений модели. Возможность применения метода псевдорешения и псевдообратной матрицы в рассматриваемом случае обусловливается специальной структурой исходной матрицы системы уравнений, имеющей вид $H = AGA^T$, в котором матрица A и транспонированная ей матрица A^T является матрицей инциденций графа тепловой модели, а матрица G – диагональной матрицей тепловых проводимостей тепловой модели. Представление матрицы тепловой и математической моделей, представляющих тепловые процессы в технической системе как $H = AGA^T$, делает возможным применение аппарата псевдообратной матрицы к поиску решения системы уравнений. Этот подход показал свою гибкость и эффективность, а также многофункциональность, позволяющую моделировать тепловые процессы в сложных конструкциях электронных систем, стохастические процессы теплообмена и учитывать при этом воздействие эффекта тепловой обратной связи в электронных и микроэлектронных системах.

Отметим также, что норма матрицы H^* в разложении исходной матрицы $H = AGA^T$ системы уравнений $H = H^* + I$, необходимом для проведения итерационного процесса при определении решения системы уравнений $H{\cdot}x = y$ в первом из рассмотренных случаев равна 21, а во втором – 1,6. Иначе говоря, требование чтобы $\|H^*\| < 1$, необходимое для сходимости итерационного процесса, не выполняется, что свидетельствует о том, что применение метода итераций для решения матричных уравнений (2) и (3) математической модели, в обоих рассмотренных случаях невозможно.

Сравнение точного и псевдорешения общей линейной системы уравнений

$AGA^T \cdot x = y$ на конкретных примерах показывает, что наибольшее значение относительной погрешности составляет 8,9 % и находится в пределах – не более 15 % – допускаемых при инженерных расчетах тепловых процессов технических систем.

Список литературы

1. Мадера А.Г. Моделирование теплообмена в технических системах. М.: Науч. фонд «Первая исслед. лаб. им. акад. В.А. Мельникова», 2005. 208 с.

2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2011. 640 с.

3. Ellison G.N. Thermal computations for electronics. Conductive, radiative, and convective air cooling. N.Y.: CRC Press, 2011. 415 p.

4. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Лань, 2008. 496 с.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с.

6. Мадера А.Г., Кандалов П.И. Моделирование трехмерных температурных полей в электронных модулях // Программные продукты и системы. 2010. № 2. С. 29–33.