

УДК 519.6:532.546.2

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ЧАСТИЦ  
НА ВЫХОДЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ****Галагуз Ю.П., Сафина Г.Л.***Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет,  
Москва, e-mail: yuri.galaguz@gmail.ru*

Исследование фильтрации жидкости с твердыми частицами в пористой среде является неотъемлемой задачей в подземной гидромеханике, при проектировании туннелей, гидротехнических сооружений, подземных хранилищ радиоактивных отходов. При прохождении потока суспензии через пористую горную породу часть твердых частиц застревает в порах и образует осадок. В работе рассматривается механико-геометрический механизм захвата частиц: твердые частицы свободно проходят через большие поры, размеры которых превосходят диаметр частиц, и застревают на входе малых пор с поперечным сечением, меньше размеров частиц, причем одна частица может блокировать одну малую пору, одна малая пора может захватить одну твердую частицу. Предполагается, что осажденная частица не может быть выбита из поры другими частицами или потоком жидкости. Рассматривается модель фильтрации монодисперсной суспензии в однородной пористой среде с переменными пористостью и проницаемостью. Математическая модель фильтрации состоит из двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, описывающих движение твердых частиц в пористой среде. Известными служат концентрации взвешенных и осажденных частиц. Первое уравнение связано с законом сохранения массы частиц, второе задает скорость роста осадка. Коэффициент пропорциональности между скоростью роста осадка и концентрацией взвешенных частиц называется коэффициентом фильтрации. На выходе пористой среды построены асимптотические решения концентраций взвешенных и осажденных частиц 1, 2 и 3-го порядков. Вычисления показывают, что асимптотика высокого порядка очень близка численному решению.

**Ключевые слова:** фильтрация, пористая среда, фронт концентраций, коэффициент фильтрации, асимптотика

**MODELING OF PARTICLES FILTRATION AT THE POROUS MEDIUM OUTLET****Galaguz Yu.P., Safina G.L.***National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, e-mail: yuri.galaguz@gmail.ru*

The study of filtration of fluid with solid particles in a porous medium is an integral problem in underground hydromechanics, in the design of tunnels, hydraulic structures, underground storage of radioactive waste. As the suspension flows through the porous rock, a part of the solid particles get stuck in the pores and form a deposit. The mechanical-geometric mechanism of particle capture: solid particles pass freely through large pores larger than the diameter of the particles and get stuck at the inlet of small pores with a cross section smaller than the particle sizes is considered. At that one particle blocking one small pore, one small pore can capture one solid particle. It is assumed that the retained particles can not be knocked out of the pore by other particles or a fluid flow. The model of deep bed filtration of a monodisperse suspension in a homogeneous porous medium with variable porosity and permeability is considered. The mathematical model of filtration consists of two first-order partial differential equations determining the motion of solid particles in a porous medium. The concentrations of suspended and retained particles are unknown. The first equation is related to the mass balance of particles, the second determines the growth rate of the deposit. The proportionality coefficient between the growth rate of the deposit and the suspended particles concentration is called the filtration coefficient. At the outlet of the porous medium, asymptotic solutions of the concentrations of suspended and retained particles of 1, 2, and 3 orders of magnitude are constructed. The calculations show that the high order asymptotics are very close to the numerical solution.

**Keywords:** filtration filtration, porous medium, concentration front, filtration coefficient, asymptotic

Фильтрация жидкости с твердыми примесями в пористой среде – важная задача подземной гидромеханики, актуальная при строительстве туннелей, гидротехнических сооружений, подземных хранилищ радиоактивных отходов [1–3]. Фильтрация суспензии в пористой среде описывает транспортировку и осаждение твердых частиц на скелете пористой среды. Образование осадка существенно меняет пористость, проницаемость и прочность пористой среды [4].

При движении потока суспензии в пористой среде имеется множество различных механизмов образования осадка:

силы Ван-дер-Ваальса, электростатическое взаимодействие, адсорбция, гидродинамические силы и т.п. Если распределения размеров пор и взвешенных частиц пересекаются, то определяющим является механико-геометрический механизм захвата частиц: твердые частицы свободно проходят через большие поры, размеры которых превосходят диаметр частиц, и застревают на входе малых пор с поперечным сечением меньше размеров частиц [5]. Рассматривается физическая модель одиночного запираания пор и захвата частиц: одна частица может блокировать одну малую пору, одна малая пора может

захватить одну твердую частицу. Предполагается, что осажденная частица не может быть выбита из поры другими частицами или потоком жидкости.

Математическая модель фильтрации суспензии включает уравнение баланса масс взвешенных и осажденных частиц и кинетическое уравнение роста осадка [6]. Основные характеристики пористой среды – пористость и проницаемость, меняются в процессе фильтрации. Взвешенные частицы движутся с переменной скоростью, зависящей от величины осадка. В кинетическом уравнении коэффициент пропорциональности между скоростью роста осадка и концентрацией взвешенных частиц называется коэффициентом фильтрации. Коэффициент фильтрации является убывающей функцией концентрации осадка. Если коэффициент фильтрации достигает нуля, то он называется блокирующим. Корень коэффициента фильтрации соответствует максимальному значению концентрации осадка, при которой все малые поры заблокированы частицами [7].

Цель исследования: построение асимптотики задачи фильтрации на выходе пористой среды, сравнение асимптотической модели различных порядков с численным решением, проведение анализа экспериментальных данных и нахождение временных интервалов применимости полученных результатов.

### Материалы и методы исследования

Математическая модель одномерной задачи фильтрации монодисперсной суспензии в пористой среде с переменной пористостью и проницаемостью описывается квазилинейной гиперболической системой уравнений

$$\frac{\partial(g(S)C + S)}{\partial t} + \frac{\partial(f(S)C)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)C. \quad (2)$$

Здесь  $C(x, t)$ ;  $S(x, t)$  – объемные концентрации взвешенных и осажденных частиц,  $\Lambda(S)$  – коэффициент фильтрации, функции  $g(S)$ ,  $f(S)$ ,  $\Lambda(S)$  гладкие и положительные при  $S \geq 0$ .

Система уравнений (1), (2) рассматривается в области  $\Omega = \{0 < x < 1, t > 0\}$ .

Краевые условия для системы (1), (2) ставятся на входе пористой среды  $x = 0$  и в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$C(x, t)|_{x=0} = 1; \quad (3)$$

$$C(x, t)|_{t=0} = 0; \quad (4)$$

$$S(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

При проведении лабораторных исследований в полую пористую среду (условия 4, 5) впрыскивается суспензия постоянной концентрации (условие 3), и измеряется концентрация взвешенных частиц  $C$  на выходе пористой среды  $x = 1$ . Для сравнения теоретических расчетов с экспериментом наиболее важна асимптотика решения  $C(x, t)|_{x=1}$ .

Взвешенные частицы переносятся потоком несущей жидкости со скоростью  $v = \frac{f(S)}{g(S)}$  и постепенно

заполняют пористую среду. Фронт концентраций взвешенных и осажденных частиц – подвижная двухфазная граница  $\Gamma$  движется с постоянной скоростью

$$v_0 = \frac{f(0)}{g(0)}.$$

В плоскости  $x, t$  фронт концентраций является отрезком прямой линии  $\{(x, t) : t = \alpha x, 0 \leq x \leq 1\}$ ;

$\alpha = \frac{g(0)}{f(0)}$ , который делит область  $\Omega$  на две подобласти

$$\Omega_s = \{0 < x < 1, t > x\}; \quad \Omega_0 = \{0 < x < 1, 0 < t < x\}.$$

В области  $\Omega_0$  решение нулевое:  $C = 0$ ;  $S = 0$ ; в области  $\Omega_s$  решение положительно:  $C > 0$ ;  $S > 0$ . Решение  $C(x, t)$  разрывно на фронте концентраций  $\Gamma$ ; решение  $S(x, t)$  непрерывно в  $\Omega$ .

Точное решение задачи (1)–(5) на фронте концентраций имеет вид [8]

$$C(x, t)|_{\Gamma} = \frac{1}{(\alpha f_1 - g_1) + (1 + g_1 - \alpha f_1)e^{\frac{\lambda_0 x}{\lambda_0 x}}}; \quad (6)$$

$$S(x, t)|_{\Gamma} = 0.$$

Предположим, что в окрестности точки  $S = 0$  функции  $s(S)$ ,  $f(S)$ ,  $\Lambda(S)$  можно представить в виде

$$g(S) = g_0 + g_1 S + g_2 S^2 + \dots, \quad g_0 > 0; \quad (7)$$

$$f(S) = f_0 + f_1 S + f_2 S^2 + \dots, \quad f_0 > 0; \quad (8)$$

$$\Lambda(S) = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \dots, \quad \lambda_0 > 0. \quad (9)$$

В области  $\Omega_s$  вблизи фронта концентраций асимптотическое решение задачи строится в виде рядов по степеням малого параметра  $t - \alpha x$ :

$$C(x, t) = c_0(x) + (t - \alpha x)c_1(x) + (t - \alpha x)^2 c_2(x) + \dots \quad (10)$$

$$S(x, t) = (t - \alpha x)s_0(x) + (t - \alpha x)^2 s_1(x) + (t - \alpha x)^3 s_2(x) + \dots \quad (11)$$

Здесь главный член асимптотики взвешенных частиц задан формулой (6):

$$c_0(x) = C(x, t)|_{\Gamma}.$$

Подставляем разложения (10), (11) в уравнение (1) и приравниваем к нулю выражения при одинаковых степенях  $(t - \alpha x)$ . Получаем уравнения

$$(t - \alpha x)^0 : g_1 s_0(x) c_0(x) + s_0(x) + c_0'(x) f_0 - \alpha f_1 s_0(x) c_0(x) = 0; \quad (12)$$

$$(t - \alpha x)^1 : 2 [g_1 s_0(x) c_1(x) + g_1 s_1(x) c_0(x) + g_2 s_0^2(x) c_0(x) + s_1(x)] + \\ + [f_1 s_0'(x) c_0(x) + f_1 s_0(x) c_0'(x) + f_0 c_1'(x)] - \\ - 2\alpha [f_1 s_1(x) c_0(x) + f_2 s_0^2(x) c_0(x) + f_1 s_0(x) c_1(x)] = 0; \quad (13)$$

$$(t - \alpha x)^2 : 3 (g_1 s_0(x) c_2(x) + g_1 s_1(x) c_1(x) + g_2 s_0^2(x) c_1(x) + \\ + g_1 s_2(x) c_0(x) + 2g_2 s_0(x) s_1(x) c_0(x) + g_3 s_0^3(x) c_0(x) + s_2(x)) + \\ + (f_1 s_1'(x) c_0(x) + f_1 s_1(x) c_0'(x) + 2f_2 s_0(x) s_0'(x) c_0(x) + f_2 s_0^2(x) c_0'(x) + \\ + f_1 s_0'(x) c_1(x) + f_1 s_0(x) c_1'(x) + f_0 c_2'(x)) - \\ - 3\alpha (f_1 s_2(x) c_0(x) + 2f_2 s_0(x) s_1(x) c_0(x) + f_3 s_0^3(x) c_0(x) + f_1 s_1(x) c_1(x) + \\ + f_2 s_0^2(x) c_1(x) + f_1 s_0(x) c_2(x)) = 0. \quad (14)$$

Подстановка (10), (11) в уравнение (2) дает алгебраические соотношения

$$(t - \alpha x)^0 : s_0 = \lambda_0 c_0; \quad (15)$$

$$(t - \alpha x)^1 : 2s_1 = \lambda_0 c_1 + \lambda_1 s_0 c_0; \quad (16)$$

$$(t - \alpha x)^2 : 3s_2 = \lambda_0 c_2 + \lambda_1 (s_0 c_1 + s_1 c_0) + \lambda_2 s_0^2 c_0. \quad (17)$$

Единственность решений  $c_i(x)$  дифференциальных уравнений (12)–(14) определяется граничными условиями, которые следуют из (3):

$$c_i(x) \Big|_{x=0} = 0. \quad (18)$$

Старшие члены асимптотики определяются из уравнений (12), (13), (15), (16). Получаем асимптотические разложения

$$C(x, t) = c_0(x) + (\lambda_0 \alpha_2 (1 - e^{2kx}) + (1 + \alpha_1) (\lambda_1 - 2kf_1) e^{kx} (1 - e^{kx})) c_0^3(x) (t - \alpha x); \quad (19)$$

$$S(x, t) = \lambda_0 c_0(x) (t - \alpha x) + \\ + \frac{\lambda_0}{2} (\alpha_1 e^{kx} (2(\lambda_1 - kf_1) - (\lambda_1 - 2kf_1) e^{kx}) + \lambda_0 \alpha_2 (1 - e^{2kx}) - \lambda_1 \alpha_1) c_0^3(x) (t - \alpha x). \quad (20)$$

Здесь  $\alpha_1 = g_1 - \alpha f_1$ ,  $\alpha_2 = g_2 - \alpha f_2$ ,  $k = \lambda_0 / f_0$  являются константами.

Следующие члены асимптотики не могут быть выписаны в общем виде из-за громоздкости выражений. Однако их можно вычислить для конкретных коэффициентов уравнений (1), (2) при  $x = 1$ .

### Результаты исследования и их обсуждение

Коэффициенты, полученные Z. You на основе лабораторных экспериментов для частиц трех размеров [8], собраны в таблицу.

Анализ коэффициентов фильтрации показал, что функция  $\Lambda_1(S)$  убывает до точки минимума  $S_0 = 1,95$ , а затем возрастает. Точное решение на входе пористой среды при  $x = 0$  [9]

$$\int_0^{S(0,t_0)} \frac{dS}{\Lambda(S)} = t_0 \quad (21)$$

позволяет определить момент достижения концентрации  $S_0$ :  $t_0 = 19,6$ . С учетом времени  $\Delta t = 1$  движения фронта концентраций от входа пористой среды к выходу получаем временной интервал применимости экспериментальных данных для частиц типа 1 при  $x = 1$ :  $0 \leq t \leq 20,6$ .

Коэффициенты фильтрации  $\Lambda_2(S)$ ,  $\Lambda_3(S)$  убывают до нуля, следовательно, экспериментальные данные для частиц 2 и 3 типов применимы при  $1 \leq t < \infty$ .

Численный расчет решения выполнен методом конечных разностей по явной разностной схеме с шагами, согласованными на фронте концентраций  $t = \alpha x$ :  $h_x = 0,001$ ;  $h_t = \alpha h_x$  аналогично [10]. Расчет асимптотики концентрации взвешенных и осажденных частиц 1, 2 и 3 типа на выходе пористой среды  $x = 1$  до третьего порядка произведен при помощи программного комплекса Wolfram Mathematica:

$$C_1(1, t) = 0,8958 + 0,001261(t - 0,9988) - 6,5051 \cdot 10^{-6}(t - 0,9988)^2;$$

$$S_1(1, t) = 0,09854(t - 0,9988) - 0,0005269(t - 0,9988)^2 + 1,4578 \cdot 10^{-6}(t - 0,9988)^3;$$

$$C_2(1, t) = 0,5988 + 0,001446(t - 0,9795) - 1,1264 \cdot 10^{-6}(t - 0,9795)^2;$$

$$S_2(1, t) = 0,3054(t - 0,9795) - 0,0001759(t - 0,9795)^2 - 8,1664 \cdot 10^{-7}(t - 0,9795)^3;$$

$$C_3(1, t) = 0,1811 + 0,0006315(t - 0,8413) + 8,8487 \cdot 10^{-7}(t - 0,8413)^2;$$

$$S_3(1, t) = 0,2808(t - 0,8413) + 0,0004016(t - 0,8413)^2 + 1,6298 \cdot 10^{-7}(t - 0,8413)^3.$$

Коэффициенты уравнений, полученные в ходе лабораторных исследований

Тип	Радиус частицы, мк	Коэффициенты уравнений
1	$r_1 = 1,5675$	$g_1(S) = 0,9987 + 9,1 \cdot 10^{-13} S - 3,73 \cdot 10^{-8} S^2 + 6,1 \cdot 10^{-5} S^3$
		$f_1(S) = 0,9999 + 1,8 \cdot 10^{-5} S - 2,05 \cdot 10^{-7} S^2 + 2,848 \cdot 10^{-4} S^3$
		$\Lambda_1(S) = 0,11 - 0,01351 \cdot S + 4,49 \cdot 10^{-5} S^2 + 1,163 \cdot 10^{-3} S^3$
2	$r_1 = 2,179$	$g_2(S) = 0,9743 - 8,88 \cdot 10^{-14} S + 1,27 \cdot 10^{-11} S^2 - 1,24 \cdot 10^{-9} S^3$
		$f_2(S) = 0,9947 + 6,27 \cdot 10^{-5} S - 2,9 \cdot 10^{-8} S^2 + 6,21 \cdot 10^{-10} S^3$
		$\Lambda_2(S) = 0,51 - 5,956 \cdot 10^{-3} S + 2,29 \cdot 10^{-6} S^2 + 1,35 \cdot 10^{-8} S^3$
3	$r_3 = 3,168$	$g_3(S) = 0,7635 + 2,44 \cdot 10^{-15} S + 3,2 \cdot 10^{-14} S^2 + 3,6 \cdot 10^{-13} S^3$
		$f_3(S) = 0,9075 + 2,315 \cdot 10^{-4} S + 2,27 \cdot 10^{-8} S^2 - 3,42 \cdot 10^{-8} S^3$
		$\Lambda_3(S) = 1,551 - 3,467 \cdot 10^{-3} S - 1,16 \cdot 10^{-6} S^2 - 1,16 \cdot 10^{-7} S^3$

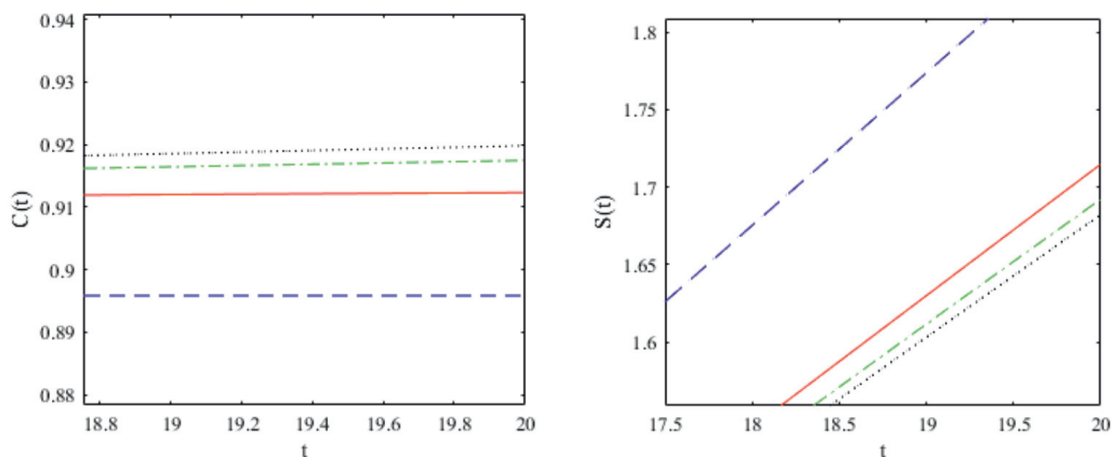


Рис. 1. Тип 1 а) укрупненный вид  $C_i(x, t)|_{x=r}$  б) укрупненный вид  $S_i(x, t)|_{x=l}$

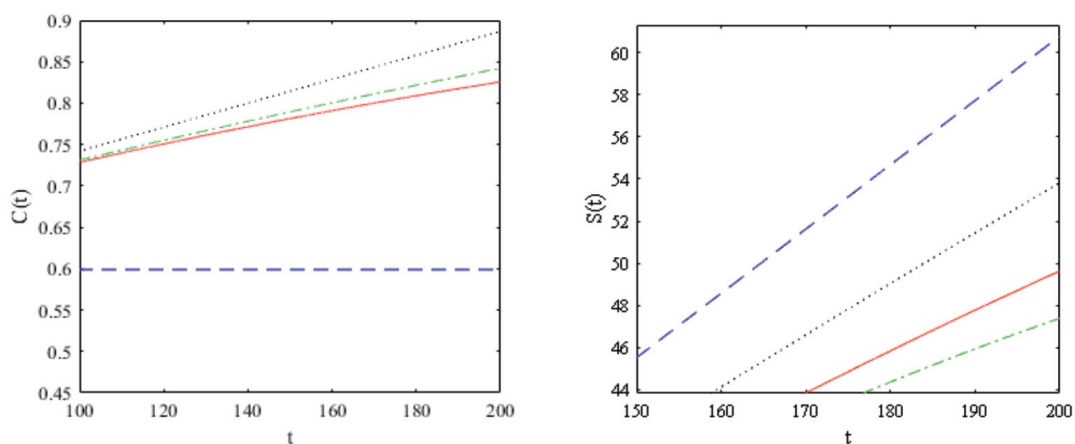


Рис. 2. Тип 2 а) укрупненный вид  $C_2(x, t)|_{x=r}$  б) укрупненный вид  $S_2(x, t)|_{x=l}$

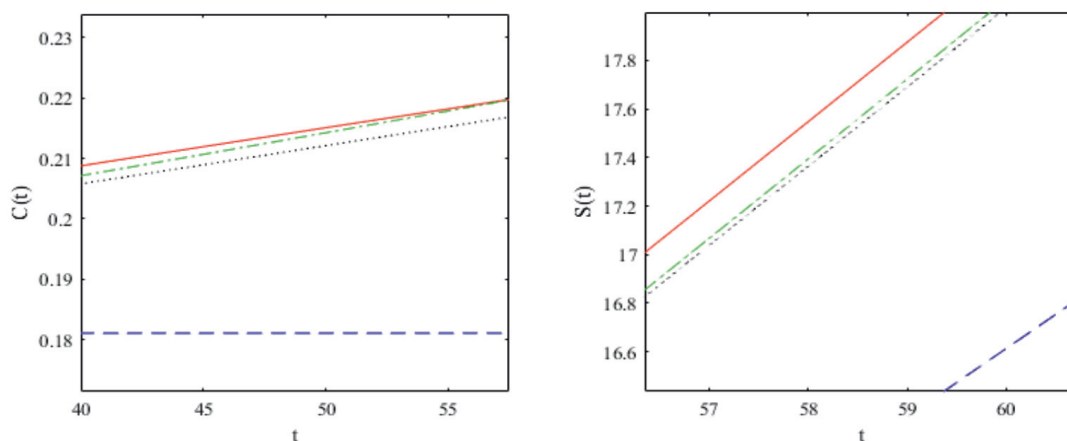


Рис. 3. Тип 3 а) укрупненный вид  $C_3(x, t)|_{x=r}$  б) укрупненный вид  $S_3(x, t)|_{x=l}$

На рис. 1–3 изображены графики численного решения и асимптотики 1, 2 и 3-го порядков концентраций взвешенных и осажденных частиц отдельно для частиц 1, 2 и 3-го типов.

На рис. 1–3 показано, что асимптотики быстро приближаются к численному решению с возрастанием их порядка. Разница между численным решением и асимптотикой третьего порядка составляет менее 2% на всем временном интервале.

### Заключение

Анализ экспериментальных данных показал, что модель фильтрации (1)–(5) применима для частиц 1 типа в ограниченном временном интервале  $0 \leq t \leq 20,6$ ; для частиц 2 и 3 типов временной интервал неограничен.

Для задачи фильтрации в пористой среде с переменными пористостью и проница-

емостью члены асимптотики 2 и 3 порядков не могут быть выписаны в общем виде из-за громоздких выражений. Однако для конкретных значений параметров на выходе пористой среды асимптотические формулы принимают компактный вид и могут использоваться для приближенного вычисления решения.

Для задачи фильтрации монодисперсной суспензии на выходе из пористой среды построены асимптотические решения различных порядков. Показано, что с увеличением числа членов асимптотика становится ближе к решению. Наилучшее приближение дает асимптотическое решение 3 порядка.

### Список литературы

1. Li S., Liu R., Zhang Q., Zhang X. Protection against water or mud inrush in tunnels by grouting: a review. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2016. vol. 8. P. 753–766.

2. Tsuji M., Kobayashi S., Mikake S., Sato T., Matsui H. Post-Grouting Experiences for Reducing Groundwater Inflow at 500 m Depth of the Mizunami Underground Research Laboratory, Japan. *Procedia Engineering*. 2017. vol. 191. P. 543–550.
3. Yoon J., Mohtar C.S.El. Groutability of Granular Soils Using Bentonite Grout Based on Filtration Model. *Transport in Porous Media*. 2014. vol. 102. no. 3. P. 365–385.
4. Civan F. Reservoir Formation Damage: Fundamentals, Modeling, Assessment and Mitigation. Amsterdam: Gulf Professional Publishing. 2016. 1044 p.
5. Santos A., Bedrikovetsky P., Fontoura S. Analytical micro model for size exclusion: Pore blocking and permeability reduction. *Journal of Membrane Science*. 2008. vol. 308. P. 115–127.
6. You Z., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media. *Abstract and Applied Analysis*. 2013. ID 680693.
7. Kuzmina L.I., Osipov Yu.V. Asymptotic solution for deep bed filtration with small deposit. *Procedia Engineering*. 2015. vol. 111. P. 491–494.
8. You Z., Osipov Y., Bedrikovetsky P., Kuzmina L. Asymptotic model for deep bed filtration. *Chemical Engineering Journal*. 2014. vol. 258. P. 374–385.
9. Vyazmina E.A., Bedrikovetskii P.G., Polyaniin A.D. New classes of exact solutions to nonlinear sets of equations in the theory of filtration and convective mass transfer. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2007. vol. 41. no 5. P. 556–564.
10. Galaguz Y.P., Safina G.L. Modeling of fine migration in a porous medium. *MATEC Web of Conferences*. 2016. vol. 86. ID 03003.