УДК 517.956.2:519.624:66.011

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ВНУТРИ КАПЛИ, ОБТЕКАЕМОЙ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

Ахметов Р.Г., Милюкова А.В.

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы», Уфа, e-mail: akhmetov051@bk.ru

Рассматривается стационарная задача конвективной диффузии внутри капли, обтекаемой потоком жидкости при малых числах Рейнольдса, с учетом нелинейной объёмной химической реакции. Характерной особенностью задачи является наличие двух безразмерных параметров: константы скорости объёмной химической реакции k_v и числа Пекле Pe, которые определяют распределение концентрации в потоке. Отношение константы скорости объёмной химической реакции k_v и числа Пекле Pe есть величина постоянная. Рассматриваемая задача представляет собой краевую задачу для квазилинейного уравнения в частных производных эллиптического типа с малым параметром при старших производных. Малый параметр соответствует большим числам Пекле Pe. Предельное уравнение, когда малый параметр равен нулю, имеет особые точки типа седла. Внутри капли возникает несколько пограничных слоев. Асимптотическое разложение решения построено методом согласования асимптотических разложений. На границах между соседними областями задаются условия согласования для решений. В малой окрестности капли построены главные члены асимптотического решения. В окрестности седловой точки возникает дополнительный пограничный слой, где сформулирована краевая задача для эллиптического уравнения с дополнительными условиями согласования. Асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки построено как решение квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: конвективная диффузия, метод согласования асимптотических разложений, число Пекле, константа скорости объёмной химической реакции, вырождающееся параболическое уравнение, условие устойчивости явной схемы

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF CONVECTIVE DIFFUSION INSIDE DROPS WITH VOLUMETRIC CHEMICAL REACTION

Akhmetov R.G., Milyukova A.V.

Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla», Ufa, e-mail: akhmetov051@bk.ru

We consider a stationary problem of convective diffusion inside a droplet, which is streamlined by a liquid flow at low Reynolds numbers, taking into account a nonlinear volumetric chemical reaction. The characteristic feature of the problem is the presence of two dimensionless parameters: a constant of rate of the volumetric chemical reaction k_v, and Peclet number Pe which determine the concentration distribution in the flow. The quantity constant of rate of the volumetric chemical reaction k_v and Peclet number Pe assumed to have a constant value. It is a boundary value problem for a quasilinear partial elliptical equation with a small parameter multiplying in higher derivatives. In the small neighborhood of the drop, the principal terms of the asymptotics of the solution are constructed. In the vicinity of the saddle point, an additional boundary layer appears, where the boundary value problem for an elliptic equation with additional matching conditions is formulated. The asymptotic expansion of solution is constructed in the boundary layer near the rear stagnation point of the drop as the solution for the quasilinear ordinary differential equation.

Keywords: convective diffusion, method of matching asymptotic expansions, Peclet number, rate constant of volumetric chemical reaction, the degenerate parabolic equation, the stability condition of the explicit scheme

Исследованию тепло-массообмена между каплей и окружающей средой посвящены работы [1–3]. В работе [1] предполагается, что число Пекле *Pe* большое, а константа скорости объёмной химической реакции значительно меньше. Исследованию теплообмена с внутренними пограничными слоями посвящена работа [2]. При больших значениях константы скорости объёмной химической реакции (одного порядка с числом Пекле) основное изменение концентрации происходит вблизи поверхности капли [4, с. 77–83].

Рассмотрим стационарную диффузию внутри сферической капли радиуса a, обтекаемой поступательным потоком вязкой несжимаемой жидкости со скоростью U_0 вдали от капли при малых числах Рейнольдса в случае, когда вещество, диффундирующее внутри капли, испытывает химическое превращение. Распределение концентрации $c(r, \theta)$ в безразмерных переменных удовлетворяет уравнению [3, с. 198]

$$\Delta c = Pe \cdot \left(\bar{V}, \nabla\right) c + k_v F(c) \qquad (1)$$

поле скоростей соответствует сферическому вихрю Хилла [5] и определяется из выражений

$$\bar{V} = \left(v_r, v_\theta, 0\right), v_r = -\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta},$$

$$v_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r},$$

$$\Psi = \frac{r^2}{2}\left(1-r^2\right)\sin^2\theta,$$

$$Pe = \frac{1}{\varepsilon^2} = av_0 / D,\ v_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda U}{\lambda+\lambda_1},$$

где Pe – число Пекле; D – коэффициент диффузии вещества; λ и λ_1 – динамические вязкости жидкостей вне и внутри капли; k_v – константа скорости объемной химической реакции; Δ – оператор Лапласа; $\Psi(r,\ \theta)$ – функция тока; r, θ – сферические координаты (φ – const). Требуется найти асимптотику решения уравнения (1), удовлетворяющего граничному условию

$$c = 1 \text{ при } r = 1. \quad (2)$$

Будем считать, что функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F: R^1 \to R^1,\ F(0) = 0,$$

$$F'(u) > 0,\ F(u) \in c^\infty(R). \quad (3)$$

Цель работы состоит в построении асимптотического разложения решения задачи (1), (2) для больших чисел Пекле Pe в малой окрестности капли. Решение строится методом согласования асимптотических разложений.

Для решения задачи (1), (2) область внутри капли разбивается на несколько областей (эти области указаны на рисунке). В каждой области вводятся новые независимые переменные (см., напр., ниже пункт диффузионный пограничный слой, пункт эллиптический пограничный слой) затем уравнение (1) записывается в этих переменных, и находят такие решения полученных уравнений, которые сращиваются на границах области и удовлетворяют граничным условиям. В этом состоит идеология метода согласования (сращивания) асимптотических разложений.

При построении асимптотики удобно ввести малый параметр $\varepsilon = 1/\sqrt{Pe}$. Уравнение (1), с учетом обозначений и $\mu = k_v/Pe$, перепишем в виде

$$\varepsilon^2\Delta U - \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} - \frac{\partial U}{\partial\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) -$$

$$-\mu F(U) = 0. \quad (4)$$

Известно [3], что в предельных случаях $Pe >> 1$, k_v – const, и Pe – const, $k_v >> Pe$ решение задачи (1), (4) упрощается. В первом случае, $Pe >> 1$, k_v – const, задача исследована в работе [3, с. 196–205]. В данной работе предполагается, что $Pe \to \infty$, $k_v \to \infty$ (или достаточно большие), а величина $\mu_0 = k_v/Pe$ – постоянная. При таких же предположениях, но в случае объемной химической реакции первого порядка ($F(u) \equiv u$) асимптотика внутри капли исследована в работе [4, с. 77–83]. Задача вне капли исследовалась в работе [6], а вне цилиндра в работе [7]. В работах [8, 9] обсуждаются качественные особенности реакционно-диффузионных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Асимптотический анализ уравнения (1) показывает, что внутри капли можно выделить ядро потока e: $\left\{O(Pe^{-1/2}) \le \Psi\right\}$, область диффузионного пограничного слоя d:

$$\left\{1-r \le O\left(Pe^{-\frac{1}{2}}\right), O\left(Pe^{-\frac{1}{2}}\right) \le \theta, O\left(Pe^{-\frac{1}{2}}\right) \le \pi - \theta\right\}$$

и область диффузионного следа W:

$$\left\{O\left(Pe^{-\frac{1}{2}}\right) \le 1-r, \Psi \le O(Pe^{-1/2})\right\} \text{ (рисунок).}$$

В случае $Pe >> 1$, k_v – const, задача в области e исследована в работе [3, с. 196–205]. В данной работе задача исследована в областях d, w_3, когда числа $Pe >> 1$, $k_v >> 1$, а их отношение ограничено (именно этот наиболее трудный случай исследован в работе [4], линейный случай). В данной работе рассмотрен случай, когда функция $F(u)$ – нелинейная. В этом состоит новизна работы.

Диффузионный пограничный слой

Асимптотика решения задачи (1), (2) в диффузионном пограничном слое d строится в переменных $t = \varepsilon^{-1}(1-r), \theta$, решение ищется аналогично [7] в виде ряда

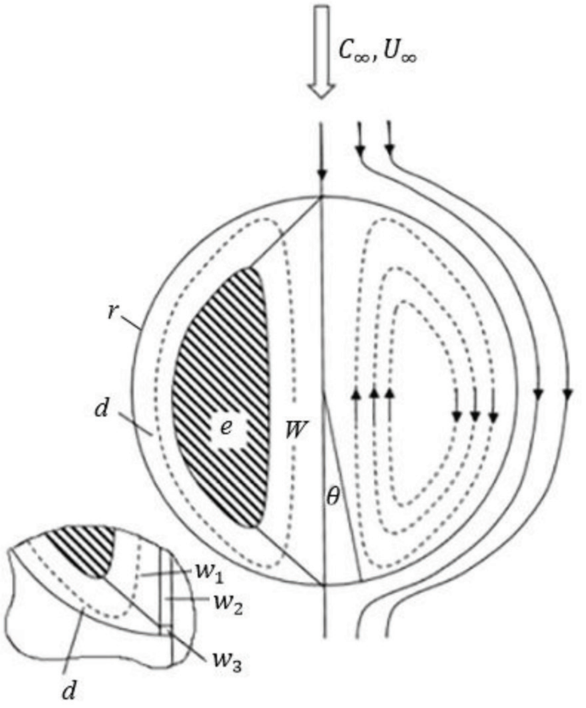
$$u_0(t,\theta,\varepsilon) = u_0(t,\theta) + O(\pi-\theta). \quad (5)$$

Функцию $F(u)$ заменим главными членами разложения в окрестности $u_0(x,\ \theta)$, функцию тока Ψ разложим в ряд около границы. Подставим полученные выражения, а также ряд (5) в уравнение (4), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Тогда для определения $u_0(t,\ \theta)$ в области $0 < \theta < \pi$, $0 < t$ получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - 2t\cos\theta\frac{\partial u_0}{\partial t} + \sin\theta\frac{\partial u_0}{\partial\theta} - \mu F(u_0) = 0, \quad (6)$$

$$u_0(0,\ \theta) = 1;\ u_0(t,\ \theta) \to 0 \text{ при } t \to \infty. \quad (7)$$

Уравнение (6) – это вырождающееся параболическое уравнение при $\theta = 0$, $\theta = \pi$.



Структура поля концентрации внутри капли: e – ядро потока, d – область диффузионного пограничного слоя, W – область диффузионного следа, w_1 – конвективно-погранслойная область диффузионного следа, w_2 – внутренняя область диффузионного следа, w_3 – область задней критической точки, r, θ – сферические координаты, r = 1 – соответствует поверхности капли

Алгоритм построения решения состоит в следующем. Сначала находим формальное решение в окрестности линии вырождения $\theta = \pi$ в виде ряда по четным степеням $(\pi - \theta)^2$ с коэффициентами, зависящими от t. Коэффициенты строятся как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u''_{2k}(t) + 2t \cdot u'_{2k}(t) - 2k \cdot u_{2k}(t) = f_{2k}(t),$$

где $k = 0, 1, 2,...$

Затем легко получить оценку

$$u_0(t,\theta) = u_{0,0}(t) + O\left((\pi - \theta)^2 exp\left(-\gamma t^2\right)\right)$$

для некоторого $\gamma > 0$, и отсюда следует оценка

$$\left|u_0(t,\theta)\right| \le M \exp\left(-\gamma t^2\right), M > 0.$$

В области $D = \left\{t,\theta : t \ge 0, \gamma_1 \varepsilon^{\nu} \le \theta \le \pi\right\}$ для некоторого

$$\nu \in (0,1) \text{ и } \gamma_1 > 0 .$$

Из условий (2) и из условий симметрии получим граничные условия

$$c_0(0,\theta) = 1; c_0(t,\theta) \to$$

$$\text{при } t \to \infty, \frac{\partial c_0}{\partial \theta}(t, \pi) = 0. \quad (8)$$

Структура асимптотики функции $u^{(0)}(t, \theta)$ при $\theta \to 0$ различна для малых и больших значений Ψ. При малых Ψ асимптотическое разложение строится в переменных t, θ, а при значениях, отделенных от нуля, в переменных Ψ_0, τ, где

$$\Psi_0 = t \sin\theta, \tau = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta).$$

Для определения коэффициентов главного члена асимптотического разложения при $\theta \to 0$, учитывая, что $u^{(0)}(t, \theta)$ ищется в виде $u_0(t) + o(\theta)$, получаем уравнение вида

$$\frac{\partial^2 u_0(t)}{\partial t^2} - 2t\frac{\partial u_0(t)}{\partial t} - \mu F(u_0(t)) = 0, \quad (9)$$

с условиями

$$u_0(0) = 1;\ u_0(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty. \quad (10)$$

Аналогично работе [6] сформулируем теорему.

Теорема. Пусть $F(u)$ удовлетворяет условию (3) и разлагается в ряд

$$F(u) = u + F_2 u^2 + F_3 u^3 + \dots,$$

тогда существует решение задачи (9)–(11), такое, что при $t \to +\infty$ решение задачи (9)–

(10) имеет следующее асимптотическое представление

$$u_0(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_{k,i}t^{-i\delta-2k}, \qquad (11)$$

где $\delta=\frac{\mu}{2}$ и $c_{k,i}$ следующие:

$$c_{0,1}=\text{const},\ c_{1,1}=-\frac{\delta^2+\delta}{4}c_{0,1},$$

$$c_{0,2}=F_2c_{0,1}^2,$$

$$c_{1,2}=\frac{1}{\delta+2}\left(2\delta F_2c_{0,1}c_{1,2}-\delta c_{0,2}\left(1+2\delta\right)\right),$$

$$c_{0,3}=\frac{1}{2}(2F_2c_{0,1}c_{0,2}+F_3c_{0,1}),\ \ldots \qquad (12)$$

В работе [6] коэффициенты $c_{k,i}$ найдены численно. Коэффициент $c_{0,1}$ при главном члене выбирается так, что построенное решение удовлетворяет первому из граничных условий (10).

В уравнении (7) путем разложения функции $F(u^{(0)})$ в ряд Тейлора с остаточным членом линейную часть оставим в левой, а остальные перенесем вправо. Тогда получим следующее уравнение

$$Lu^{(0)}-\mu_1u^{(0)}=f_0\left(u^{(0)}\right), \qquad (13)$$

$$Lu\equiv\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-2t\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t}+2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta},$$

$$\mu_1=\mu F'(0),$$

$$f_0=\mu\left(F(u)-F'(0)u\right)=\frac{\mu}{2}F''(\tilde{u})(u)^2. \qquad (14)$$

Для удобства положим $F'(0)=1$.

В уравнении (13) сделаем следующую замену функции и переменных [7, с. 8–12]

$$\Psi_0=t\sin^2\theta,\tau=\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{2}{3},u=gV=\left(\frac{1+v(\tau)}{1-v(\tau)}\right)^{-\mu/2}V. \qquad (15)$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$\frac{\partial^2V(\Psi_0,\tau)}{\partial\Psi_0^2}-\frac{\partial V(\Psi_0,\tau)}{\partial\tau}=q(\tau)g^{-1}(\tau)f_0\left(V(\Psi_0,\tau)\right). \qquad (16)$$

где $q(\tau)=O\left(\tau^{-1}\right)$ для $\tau\to 0,q(\tau)=O\left((1-\tau)^{-1}\right)$ при $\tau\to 1$ и $f_1=g^{-1}(\tau)f_0$.

А граничные условия имеют вид

$$V=\left(\frac{1+v(\tau)}{1-v(\tau)}\right)^{-\mu/2},\ \Psi_0\to 0,\ \tau>0, \qquad (17)$$

$$V\to 0 \text{ при } \Psi_0\to\infty, \qquad (18)$$

$$V-f\left(\Psi_0\right)\to 0,\ \tau\to 0,\ \Psi_0\neq 0. \qquad (19)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу при $f_0\left(V(\Psi_0,\tau)\right)\equiv 0$

$$\frac{\partial^2h(\Psi_0,\tau)}{\partial\Psi_0^2}-\frac{\partial h(\Psi_0,\tau)}{\partial\tau}=0.$$

Тогда функция $h(\Psi_0,\tau)$ при условиях (17)–(19) (для $h(\Psi_0,\tau)$) описывается выражением

$$h=\left(\frac{1+v(\tau)}{1-v(\tau)}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{f(\xi)}{\sqrt{\tau}}E(\xi,t,\tau)d\xi+\left(\frac{1+v(\tau)}{1-v(\phi)}\right)^{-\frac{\mu}{2}}\cdot$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\tau}\left(\frac{1+v(t)}{1+v(t)}\right)^{\mu/2}\frac{f(t)\Psi_0}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{\Psi_0^2}{4(\tau-t)}\right)dt,$$

$$E(\xi,t,\tau)=\exp\left(-\frac{(t-\xi)^2}{4\tau}\right)-\exp\left(-\frac{(t+\xi)^2}{4\tau}\right). \qquad (20)$$

Формула (20) получена в работе [5] в случае обтекания капли, когда функция $F(u)$ линейна. Отсюда получаем, что формула (20) является главным членом разложения решения задачи (16)–(19), тогда для достаточно малого ε и некоторых $\delta > 0$, $\gamma_0 > 0$ получаем

$$u^0(t,\Psi) = h(\theta_0,\tau) + O\left(\varepsilon^{2\delta-\gamma_0}\right)$$

$$\text{при } y = O\left(\varepsilon^{-\delta/4}\right). \qquad (21)$$

Для доказательства данной формулы достаточно применить интегральное представление для неоднородного уравнения теплопроводности (16) и, учитывая условия (17)–(19), воспользоваться теоремой и оценкой (14).

Эллиптический слой

В области W_3 задней критической точки решение строится в переменных $\xi = \frac{\theta}{\varepsilon}$, $t = \frac{1-r}{\varepsilon}$, для главного члена получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial \xi^2} - 2t\frac{\partial u^{(3)}}{\partial t} +$$

$$+\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial u^{(3)}}{\partial \xi} - \mu F\left(u^{(3)}\right) = 0, \qquad (22)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u^{(3)}(\xi,0) = 1; \frac{\partial u^{(3)}(\xi,t)}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = 0 \qquad (23)$$

и некоторым условиям согласования

$$u^{(3)}(t,\xi) - u_0(t) \to 0$$

$$\text{при } \xi \to \infty \text{ в области } W \cap d. \qquad (24)$$

Функция, определенная равенством $u^{(3)}(t,\xi) = u_0(t)$, есть решение задачи (22)–(23), где $u_0(t)$ имеет асимптотическое разложение (11) при $t \to +\infty$.

Численное решение

Для решения краевой задачи (9), воспользуемся теоремой о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров и построенным асимптотическим разложением в теореме. Следует заметить, что постоянная $c_{0,1}$ – произвольная. Для построения решения краевой задачи уравнение (9) перепишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{du_0(t)}{dt} = y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = 2t \cdot y(t) + \mu F(u_0(t)) \end{cases}. \qquad (25)$$

Устойчивость разностных схем проверяем так же, как и в работе [6]. Условие устойчивости явной схемы Рунге – Кутты, будет выполняться, если потребовать выполнения неравенств

$$|h\mu F'(v)| << 1, h < 0, |h| X_0 < 1. \qquad (26)$$

Это значит, что начальное условие следует задать при достаточно большом t_0 – и интегрировать назад, т.е. с шагом $h < 0$. Начальные условия для системы (25) имеют вид

$$u_0(t_0) = a, y(t_0) = b, \qquad (27)$$

где постоянные a и b определяются из выражения (11).

Рассмотрим случай, когда $F(u) = \sin u$. Находим последовательные приближения c_{0n}, $n = 2, 3, \ldots$, для c_0.

Далее приводим результаты численных расчётов для уравнения конвективной диффузии на промежутке (0,100):

при $\mu = 0{,}5$, получаем $c_{0,1} = 4{,}0915$, $u^{(0)}(0) = 0{,}9999$; $y(0) = -1{,}6507$;

при $\mu = 0{,}8$, получаем $c_{0,1} = 8{,}7293$, $u^{(0)}(0) = 1{,}0000$; $y(0) = -2{,}6495$;

при $\mu = 1$, получаем $c_{0,1} = 14{,}2551$, $u^{(0)}(0) = 1{,}0000$; $y(0) = -3{,}3221$.

Отсюда видим, что решение задачи (9)–(10) функция $u^{(0)}(t)$ удовлетворяет граничному условию в точке $t = 0$, а при $t \to +\infty$ справедлива оценка $O(t^{\delta})$.

Заключение

В настоящей работе исследована задача конвективной диффузии внутри сферической капли при больших числах Пекле и малых числах Рейнольдса. Предполагается, что поле скоростей известно. Ранее в работе [4] была исследована задача в случае, когда объёмная химическая реакция носит линейный характер. В нашей работе рассмотрен случай наличия нелинейной объёмной химической реакции. Но при этом главный член разложения в окрестности нуля носит линейный характер. В работе установлено, что в диффузионном пограничном слое d всюду за исключением окрестности задней критической точки порядка $O(\varepsilon)$ решение мало отличается (21) в первом приближении от случая линейной химической реакции. Однако в окрестности задней критической точки (в области w_3) решение существенно зависит от нелинейной объёмной химической реакции.

Список литературы

1. Favelukis M., Lavrenteva O.M. Mass transfer around oblate spheroidal drops in biaxial stretching motion. The Canadian Journal. 2013. vol. 92. no. 5. P. 964–972.

2. Zhao J.F., Zhang L., Li Z.D., Qin W.T. Topological structure evolvement of flow and temperature fields in deformable drop Marangoni migration in microgravity. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2011. vol. 54. no. 21. P. 4655-4663. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.06.012.

3. Гупало Ю.П., Полянин А.Д., Рязанцев Ю.С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. М.: Наука, 1985. 336 с.

4. Головин А.М., Животягин А.Ф. Влияние объёмной химической реакции на массоперенос внутри капли при больших числах Пекле // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика и механика. 1979. № 4. С. 77–83.

5. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947. 752 с.

6. Akhmetov R.G. The asymptotic expansions of the solution for the boundary value problem to a convective diffusion equation with volume chemical reaction near a spherical drop. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2011. no. 15. P. 2308–2312.

7. Akhmetov R.G., Maksimova N.V. Asymptotic Solution of the Problem to a Convective Diffusion Equation with a Chemical Reaction Around a Cylinder. Dynamical Systems: Modelling, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 2016. no. 181. P. 233–241.

8. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: математические модели и качественные особенности // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6. № 1. С. 41–55.

9. Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Реакционно-диффузионные уравнения с запаздыванием: численные методы и тестовые задачи // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2017. Т. 6. № 2. С. 126–142.

10. Ахметов Р.Г. Асимптотические решения задачи конвективной диффузии в диффузионном пограничном слое внутри капли с учётом нелинейной объёмной химической реакции // Международная математическая конференция по теории функций, посвящённая 100-летию чл.-кор. АН СССР А.Ф. Леонтьева (Уфа, 24–27 мая 2017 г.). Редакционно-издательский центр Башкирского государственного университета. 2017. С. 17.