УДК 517.972.2

ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА

Кадченко С.И., Торшина О.А., Рязанова Л.С.

ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», Магнитогорск, e-mail: olganica@mail.ru

Очевидно, что трудности возникающие в применении теории вихревых течений, во многом обусловлены самой вычислительной процедурой нахождения собственных чисел оператора Орра – Зоммерфельда, который относится к несамосопряженным операторам. В работах авторов статьи разработан численный метод вычисления первых собственных чисел дискретных полуограниченных операторов, который получил наименование метод регуляризованных следов (РС). В статье описана методика использования этого метода РС для определения собственных чисел соответствующей краевой задачи. Напрямую применять метод РС к решению прямой задачи Орра – Зоммерфельда нельзя. Поэтому с вспомогательной целью нами была поставлена спектральная задача, в которой просматривается аналогия с задачей Орра – Зоммерфельда в части совпадения собственных чисел. Получены новые оценки регуляризованных следов дискретного оператора. Найдены формулы, по которым можно вычислить поправки теории возмущений необходимого порядка. Для проведения вычислительных экспериментов в среде математического пакета Maple написаны программы, позволяющие находить приближенные значения первых собственных чисел исследуемой задачи. Выбор математической среды Maple обусловлен тем, что при численной реализации разработанного алгоритма необходимо производить операции с действительными числами с большой мантиссой.

Ключевые слова: спектральная теория, численные методы, собственные числа, регуляризованные следы, краевые задачи

EIGENVALUES CALCULATION OF ORR-SOMMERFELD SPECTRAL PROBLEM

Kadchenko S.I., Torshina O.A., Ryazanova L.S.

Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, e-mail: olganica@mail.ru

It is known that difficulties appearing in the linear theory of viscous fluid flow stability are much interconnected with computational problems of finding eigenvalues of non-self-adjoint operators including Orr-Sommerfeld operator. The numerical calculation method of the first eigenvalues of discrete semibounded operators has been developed in the works of the article authors. This method has been called regularized tracks method (RT). The technique of this method usage for findingapproximate values of the first eigenvalues of Orr-Sommerfeld boundary-value problem is described in the article. This method (RT) cannot be used directly to solve Orr-Sommerfeld direct task. Consequently the auxiliary spectral task has been built where the array of eigenvalues coincide with the array of eigenvalues of Orr-Sommerfeld task. New regularized tracks estimations of discrete operator have been obtained. Formulae to calculate amendments to the theory of necessary order perturbation have been found. For conducting calculation experiments in mathematical package medium Maple the programs that allow to find approximate values of the first eigenvalues of Orr-Sommerfeld spectral task have been written. The choice of mathematical medium Maple has been made due to the necessity to make operations with real numbers with large mantissa.

Keywords: spectral theory, numerical methods, eigenvalues, regularized traces, boundary value problems

В работах [1, 2] был обоснован метод вычисления первых собственных чисел дискретного оператора. Суть метода состоит в следующем. В сепарабельном гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1)$ для оператора T, являющегося дискретным и полуограниченным, зададим $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа, $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированные собственные функции. Предположим, P – ограниченный оператор в пространстве H, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа $T+P$, $d_n = \mu_{n+1} - \mu_n$, $n = \overline{1,\infty}$. Пусть для $n_0 \in N$ выполняется $O_1(P) = \dfrac{2\,\|P\|}{d_{n_0}} < 1$, а для $s_0 \in N$ оператор $\left(R_\mu(T)\right)^{s_0}$ – ядерный. Тогда для нахождения $\{\beta_n\}_{n=1}^{n_o}$ имеет место система [3]

$$\sum_{n=1}^{n_0} \beta_n^p = \sum_{n=1}^{n_0} \mu_n^p + \sum_{k=1}^{t_p} \alpha_k^p(n_0) + \varepsilon_{t_p}^p(n_0), \quad t_p \ge s_0, \quad p = \overline{1, n_0}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_{t_p}^p(n_0) = \dfrac{p}{2\pi i} \sum\limits_{m=t_p+1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{m+1}}{m} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \left[P R_\mu(T) \right]^m d\mu$; T_{n_0} – круг комплексной плоскости с радиусом $\rho_{n_0} = \left|\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}\right| / 2$; $R_\mu(T)$ – резольвента оператора T; $\alpha_k^p(n_o)$ – поправки теории возмущений. В статье [4] была получена оценка чисел $\varepsilon_{t_p}^p(n_0)$

$$\left|\varepsilon_{t_p}^p(n_0)\right| \le p\, n_o\, \rho_{n_0}^p \frac{O_1(P)^{t_p+1}}{1 - O_1(P)}. \tag{2}$$

Для изучения упомянутых поправок $\alpha_k^p(n_0)$ выведены формулы

$$\alpha_k^p(n_0)=\frac{(-1)^{k+1}p}{2\pi i k}Sp\int_{T_{n_o}}\mu^{p-1}\left[P\,R_\mu(T)\right]^k d\mu=$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}p}{k}\sum_{n=1}^{n_o}\sum_{j_1,j_2,\dots,j_k}\left(\prod_{m=1}^{k}V_{j_m j_s}\right)\underset{\mu_n}{res}\left(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{m=1}^{k}\left(\mu-\mu_{j_m}\right)}\right),\quad \forall k,p\in N. \tag{3}$$

Здесь $s=\begin{cases}m+1, & m<k\\ 1, & m=k\end{cases}$, а $V_{km}=\int_0^1\overline{\Omega_k(x)}\,P\left(\Omega_m(x)\right)dx$.

Используя основную теорему о вычетах в случае полюса [5], найдем

$$\underset{\mu_n}{res}\left(\frac{\mu^{p-1}}{\prod_{m=1}^{k}\left(\mu-\mu_{j_m}\right)}\right)=\begin{cases}0, & j_m\neq n,\ \forall m=\overline{1,k},\\[2ex] \dfrac{1}{(l-1)!}\dfrac{d^{l-1}}{d\mu_n^{l-1}}\left(\dfrac{\mu_n^{p-1}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ j_m\neq n}}^{k}\left(\mu_n-\mu_{j_m}\right)}\right),\end{cases} \tag{4}$$

где l – число совпадений $j_m=n,\ \forall m=\overline{1,k}$.

Формула (3) позволяет вычислять поправки теории возмущений $\alpha_k^p(n_0)$ любого порядка. Производные, входящие в (4), можно вычислять с помощью универсального алгоритма численного дифференцирования.

Представим явно несколько поправок

$$\alpha_1^p(n_0)=p\sum_{n=1}^{n_0}\mu_n^{p-1}V_{nn},\quad \alpha_2^p(n_0)=-\frac{p}{2}\sum_{n=1}^{n_0}\mu_n^{p-2}\left[(p-1)V_{nn}^2+2\mu_n\sum_{i\neq k}\frac{V_{ni}V_{in}}{\mu_n-\mu_i}\right],$$

$$\alpha_3^p(n_0)=\frac{p}{3}\sum_{n=1}^{n_0}\mu_n^{p-3}\left\{\frac{1}{2}(p-1)(p-2)V_{nn}^3+3\mu_n\sum_{i\neq k}\frac{V_{ni}}{\mu_n-\mu_i}\left[\frac{V_{nn}V_{in}}{\mu_n-\mu_i}\left((p-1)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(\mu_n-\mu_i)-\mu_n\right)+\mu_n\sum_{j\neq n}\frac{V_{ij}V_{jn}}{\mu_n-\mu_j}\right]\right\},$$

$$\alpha_4^p(n_o)=-\frac{p}{4}\sum_{n=1}^{n_o}\mu_n^{p-4}\left\{\frac{1}{6}(p-1)(p-2)(p-3)V_{nn}^4+2\mu_n\sum_{i\neq k}\frac{V_{ni}}{\mu_n-\mu_i}\left[\frac{V_{nn}^2V_{in}}{(\mu_n-\mu_i)^2}\times\right.\right.$$

$$\times\left\langle(p-1)(p-2)(\mu_n-\mu_i)^2-2\mu_n(p-1)(\mu_n-\mu_i)+2\mu_n^2\right\rangle+\mu_n\sum_{j\neq n}\frac{1}{\mu_n-\mu_j}\times$$

$$\left.\left.\times\left\langle\frac{V_{ij}\left(2V_{ij}V_{nn}+V_{in}V_{nj}\right)}{(\mu_n-\mu_i)(\mu_n-\mu_j)}\left((p-1)(\mu_n-\mu_i)(\mu_n-\mu_j)-\mu_n\left(2\mu_n-\mu_i-\mu_j\right)\right)+2\mu_n\sum_{m\neq n}\frac{V_{im}V_{mn}}{\mu_n-\mu_m}\right\rangle\right]\right\}.$$

Цель исследования: разработать алгоритм нахождения методом регуляризованных следов собственных чисел прямой спектральной задачи. Сравнить полученные результаты вычисления собственных чисел методом РС с опубликованными примерами вычислений собственных чисел в научной литературе.

Материалы и методы исследования

Применим описанный метод в приложении к поставленной задаче

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)^2\varphi - i\alpha R\left[u(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)-\frac{d^2u(x)}{dx^2}\right]\varphi = -i\alpha R\beta\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)\varphi,\quad 0\le x\le 1, \tag{7}$$

$$\varphi(0)=\frac{d\varphi(0)}{dx}=\varphi(1)=\frac{d\varphi(1)}{dx}, \tag{8}$$

где $u(x)$ – скорость течения, β – комплексный параметр, λ – длина волнового возмущения, $\alpha=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, R – число Рейнольдса,

$$u(x)=\frac{4U_c}{U_0+U_c}x(1-x)+\frac{U_0}{U_0+U_c}x,$$

U_o – относительная скорость верхней плоскости, U_c – скорость между неподвижными плоскостями в средней части промежутка между ними.

Рассмотрим оператор F

$$F\varphi=\frac{1}{\alpha}\left[\int_0^x sh(\alpha(x-s))\varphi(s)ds-\frac{sh(\alpha x)}{sh\alpha}\int_0^1 sh(\alpha(1-s))\varphi(s)ds\right],$$

который является обратным для оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}-\alpha^2$ и находится при решении краевой задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)f(x)=\varphi(x),$$

$$f(0)=f(1)=0.$$

Умножим слева уравнение (7) на оператор F и рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$(T+P)\varphi=\beta\varphi, \tag{9}$$

$$\frac{dF\varphi(0)}{dx}=\frac{dF\varphi(1)}{dx}. \tag{10}$$

Здесь $P\varphi=u(x)\varphi+\dfrac{8U_c}{U_0+U_c}\left[\int_0^x sh(\alpha(x-s))\varphi(s)ds-\dfrac{sh(\alpha x)}{sh\alpha}\int_0^1 sh(\alpha(1-s))\varphi(s)ds\right]$,

$T=\dfrac{i}{\alpha R}\left(\dfrac{d^2}{dx^2}-\alpha^2\right)$. Собственные функции задачи (7), (8) преобразуются к собственным функциям задачи (9), (10) с помощью $\dfrac{d^2}{dx^2}-\alpha^2$, собственные числа которых равны. Для оператора P выполняется следующая оценка

$$\|P\|\le u_m+\frac{8U_c}{(1+\alpha^2)(U_0+U_c)}, \tag{11}$$

$$u_m=\begin{cases}|U_0|, & U_c=0,\\ \max\limits_{0\le x\le 1}\left\{|U_0|,\dfrac{(4U_0+U_c)^2}{(1+\alpha^2)(U_0+U_c)}\right\}, & U_c\ne 0.\end{cases}$$

Собственные функции $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ самосопряженной спектральной задачи

$$T\Omega=\mu\Omega, \tag{12}$$

$$\frac{d\,F\,\Omega(0)}{d\,x}=\frac{d\,F\,\Omega(1)}{d\,x} \qquad (13)$$

запишутся в виде

$$\Omega_n(x)=(1+i)\;\omega_n(x)=(1+i)\left[\,a_{1n}\sin\left(q_n x\right)+a_{2n}\cos\left(q_n x\right)\right],\quad n=\overline{1,\infty},$$

где $a_{1n}=-\alpha\dfrac{1+e^{-2\alpha}-2\,\alpha\cos\,q_n}{q_n-q_n e^{-2\alpha}-2\,\alpha\, e^{-\alpha}\sin q_n}a_{2n}$. Константы a_{2n} выбираются из условия нормировки $\left(\Omega_k\,,\overline{\Omega_m}\right)=\delta_{k\,m}\,(k,m=\overline{1,\infty})$ собственных функций. Числа q_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$4\,\alpha e^{-\alpha}\,q_n-2\,\alpha\left(1+e^{-2\alpha}\right)q_n\cos\,q_n+\left(1-e^{-2\alpha}\right)\left(\alpha^2-q_n^2\right)\sin q_n=0\,, \qquad (14)$$

а собственные числа мнимые и определяются по формулам

$$\mu_n=-\frac{\nu_n}{\alpha R}i,\quad \nu_n=\alpha^2+q_n^2,\quad n=\overline{1,\infty}. \qquad (15)$$

В этом случае

$$V_{k\,m}=2\left\{\int_0^1\omega_k(x)\,u(x)\,\omega_m(x)\,dx-\frac{8U_c}{\left(U_0+U_c\right)\left(\alpha^2+q_m^2\right)}\left[\delta_{k\,m}-\frac{1}{\alpha^2+q_k^2}\Big\langle\,\omega_m(1)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\alpha\,cth\,\alpha\,\omega_k(1)+q_k\left(a_{2k}\sin\,q_k-a_{1k}\cos\,q_k\right)-\frac{\alpha}{sh\,\alpha}a_{2k}\right)-\frac{\alpha}{sh\,\alpha}a_{2m}\,\omega_k(1)+ \qquad (16)$$

$$\left.\left.+q_k\,a_{1k}\,a_{2m}+\alpha\,a_{2k}\,a_{2m}\,cth\,\alpha\Big\rangle\right]\right\},\quad k,m=\overline{1,\infty}.$$

Отметим, что для задачи Орра – Зоммерфельда числа q_n, собственные функции Ω_n и V_{km} не зависят от числа Рейнольдса любых $k,m\in N$.

Лемма. Поправки теории возмущений $\alpha_k^p(n_0)$ краевой задачи (9), (10) вычисляются по формуле

$$\alpha_k^p(n_0)=\frac{(-1)^{\,p+1}p}{k}\left(\frac{i}{\alpha R}\right)^{p-k}\gamma_k^p(n_0\,,\alpha),$$

где

$$\gamma_k^p(n_0\,,\alpha)=\sum_{n=1}^{n_o}\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_k}\left(\prod_{m=1}^{k}V_{j_m\,j_s}\right)\begin{cases}0, & j_m\neq n,\forall\,m=\overline{1,k}\,,\\[2ex] \dfrac{1}{(l-1)!}\dfrac{d^{\,l-1}}{d\,\nu_n^{l-1}}\left(\dfrac{\nu_n^{p-1}}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ j_m\neq n}}^{k}\left(\nu_n-\nu_{j_m}\right)}\right).\end{cases} \qquad (17)$$

Используя лемму и систему нелинейных уравнений (1) для приближенного нахождения первых собственных чисел $\left\{\beta_n\right\}_{n=1}^{n_0}$ задачи Орра – Зоммерфельда (9), (10) можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{n_0}\beta_n^p=\left(\frac{-i}{\alpha R}\right)^p\left\{\sum_{n=1}^{n_0}\nu_n^p+p\sum_{k=1}^{t_p}\frac{i^{\,k}}{k}(\alpha R)^k\,\gamma_k^p(n_0,\alpha)\right\},\quad p=\overline{1,n_0}\,. \qquad (18)$$

Каждое уравнений (18) записано приближенно с абсолютными погрешностями [6] $\delta_{t_p}^p(n_0,\alpha R)$, вычисляемыми по формулам

$$\delta_{t_p}^p(n_0,\,\alpha R)=n_0\,p(\alpha R)^{t_p+1}\frac{O_2\left(P,n_0\right)^{t_p+1}}{1-\alpha R\,O_2\left(P,n_0\right)}\left(\frac{q_{n_0+1}^2+q_{n_0}^2+2\,\alpha^2}{2}\right)^p,\quad\forall\,p,t_p,n_0\in N\,. \qquad (19)$$

Здесь $O_2\left(P,n_0\right)=\dfrac{2\|P\|}{q_{n_0+1}^2-q_{n_0}^2}$. Для любых $n,p,k\in N$ величины ν_n^p и $\gamma_k^p\left(n_0,\alpha\right)$, входящие в систему нелинейных уравнений (18), не содержат [7] числа Рейнольдса R, следовательно, для различных R можно использовать их значения для вычисления собственных чисел. Нужно принимать во внимание, чтобы при нахождении собственных чисел зависящая от R абсолютная ошибка имела предусмотренные пределы.

Сведем определение решений означенной системы уравнений (18) к вычислению корней многочлена порядка n_0

$$f\left(\beta\right)=\beta^{n_0}+a_1\beta^{n_0-1}+a_2\beta^{n_o-2}+\ldots+a_{n_0-1}\beta+a_{n_0}. \qquad (20)$$

Здесь $a_k=\left(-1\right)^k\sigma_k$, $\sigma_k=\dfrac{\left(-1\right)^{k+1}}{k}\left[s_k+\sum\limits_{m=1}^{k-1}\left(-1\right)^m s_{k-m}\sigma_k\right]$, $k=\overline{1,n_0}$, s_k – правые части уравнений (18). Для этого используем формулы Ньютона и теорию симметрических многочленов [8]. При вычислении коэффициентов многочлена $f(\beta)$ абсолютные погрешности находятся по формулам

$$\delta_{a_k}=\frac{1}{k}\left[\delta_{s_k}+\sum_{m=1}^{k-1}\left(\left|\sigma_m\right|\delta_{s_{k-m}}+\left|s_{k-m}\right|\delta_{a_m}\right)\right],\ k=\overline{1,n_0}.$$

Сложив *условную погрешность* δ_u и *безусловную погрешность* δ_b, получим полную погрешность δ_p вычисления собственного числа β_0. Безусловная погрешность δ_b вычисляется по формуле

$$\delta_b=\frac{1}{\left|f'\left(\beta_0\right)\right|}\sum_{m=0}^{n_0-1}\left|\beta_0\right|^m\delta_{a_m}.$$

Она связана с точностью нахождения коэффициентов многочлена (20). Условная погрешность δ_u определяется формулой Ньютона

$$\delta_u=\left|\frac{f\left(\beta_0\right)}{f'\left(\beta_0\right)}\right|.$$

Она равна разности между полученным решением и точным решением, взятой по модулю.

Количество собственных чисел n_0, подлежащих определению при решении системы (1), должно быть минимальным и устанавливается неравенством $\dfrac{2\|P\|}{d_{n_0}}<1$. Для задачи Орра – Зоммерфельда оно имеет вид

$$R<\frac{q_{n_o+1}^2-q_{n_o}^2}{2\alpha\|P\|}.$$

При $q_n\to\infty$ из (15) получим $\sin q_n\to 0$. Поэтому $q_n\approx\pi\left(n+1\right)$, и тогда

$$n_0>0{,}1\alpha R\|P\|.$$

Для рассматриваемой задачи $\|P\|<10$, значит $n_0>\alpha R$.

Результаты исследования и их обсуждение

Применение предлагаемого метода для изучения течений с большими αR предусматривает нахождение $\alpha_k^p(n_0)$ высокого порядка по формулам (3) и определение корней многочлена большой степени (20), что можно осуществить численно. При численной реализации описанного алгоритма необходимо производить операции с действительными числами с большой мантиссой, что позволяет сделать среда математического пакета Maple.

Результаты некоторых численных расчетов вычисления первых собственных чисел спектральной задачи (7), (8) $\left\{\beta_n\right\}_{n=1}^{n_0}$ приведены в табл. 1, 2.

Таблица 1

Первые собственные числа R = 45, R = 65

n	α = 0,1; U_0 = 1; U_c = 1			
	R = 45		R = 65	
	β_n	δ_p	β_n	δ_p
1	0,3555 – 8,7723 i	0,00016	0,3554 – 6,0741 i	0,00012
2	0,4884 – 17,9481 i	0,000043	0,4884 – 12,4256 i	0,000030
3	0,5264 – 35,0894 i	0,000023	0,5264 – 24,2924 i	0,000019
4	0,5512 – 53,0490 i	0,0000084	0,5512 – 36,7261 i	0,0000058
5	0,5580 – 78,9545 i	0,00000088	0,5580 – 54,6607 i	0,00000064

Таблица 2

Первые собственные числа R = 500, R = 1000

n	α = 0,1; U_0 = 1; U_c = 0			
	R = 500		R = 1000	
	β_n	δ_p	β_n	δ_p
1	0,4977 –0,8322 i	0,000029	0,4471 – 0,4799 i	0,000022
2	0,5048 – 1,6019 i	0,0000066	0,5935 – 0,7748 i	0,0000035
3	0,4959 – 3,1523 i	0,0000043	0,4322 – 1,5743 i	0,0000023

Выводы

Проведенные многочисленные вычисления показывают высокую вычислительную эффективность нахождения значений первых собственных чисел оператора Орра – Зоммерфельда.

Список литературы

1. Кадченко С.И. Вычисление спектральных характеристик возмущенных самосопряженных операторов методами регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Дифференциальные уравнения. Спектральная теория. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 141, ВИНИТИ РАН. – М., 2017. – С. 61–78.

2. Кадченко С.И. Численные методы регуляризованных следов спектрального анализа: монография / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 206 с.

3. Вычисление первых собственных чисел дискретного оператора / В.В. Дубровский [и др.] // Электромагнитные волны & электромагнитные системы. – 1998. – Т. 3, № 2. – С. 4–8.

4. Садовничий В.А. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретного оператора / В.А. Садовничий, В.В. Дубровский // Труды семинара им. И.П. Петровского. – 1994. – № 17. – С. 244–248.

5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Маркер, 2010. – 275 с.

6. Лин Цао – цзяо. Теория гидродинамической устойчивости / Лин Цао – цзяо. – М.: Маркер, 2011. – 254 с.

7. Малеко Е.М. О резольвенте дискретного оператора и вычислении его спектра. Некоторые приложения: монография / Е.М. Малеко. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск, гос. тех. ун-та им. Г.И. Носова, 2017. – 143 с.

8. Штерн В.Н. Устойчивость плоского течения Куэтта / В.Н. Штерн. – Красноярск: СибГТУ, 2015. – 219 с.