УДК 519.86

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫПУСКОВ В МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА – ХИКСА

Грибанов Е.Н., Победаш П.Н.

ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачёва», Кемерово, e-mail: e.gribanow@yandex.ru, pobed_pnp@mail.ru

В данной работе исследуется математическая модель экономического роста Самуэльсона – Хикса, используемая для описания закономерностей, связанных с колебаниями деловой активности в условиях экономического роста. Решается следующая задача параметрической оптимизации: найти значения параметров фактора акселерации и склонности к потреблению, при которых валовый выпуск (задаваемый разностным уравнением второго порядка) в фиксированный момент времени будет наибольшим. При этом рассматривается случай, когда дискриминант соответствующего характеристического уравнения равен нулю (то есть уравнение имеет кратный корень). Применяя дифференциальное и интегральное исчисление, удалось доказать, что валовый выпуск возрастает как по непрерывному фактору акселерации, так и по дискретному моменту времени. Это дает возможность решить еще более общую оптимизационную задачу определения значений указанных параметров, максимизирующих валовый выпуск на заданном горизонте планирования, и получить его аналитическое выражение. Последний результат, в свою очередь, позволяет найти оценку сверху на данный экономический показатель при произвольных значениях параметров фактора акселерации и склонности к потреблению в модели Самуэльсона – Хикса для рассмотренного частного случая, когда дискриминант соответствующего характеристического уравнения равен нулю.

Ключевые слова: задача параметрической оптимизации, валовый выпуск, горизонт планирования

PARAMETRIC OPTIMIZATION ISSUES IN THE MODEL OF SAMUELSON-HICKS

Gribanov E.N., Pobedash P.N.

Kuzbass State technical University named after T.F. Gorbachev, Kemerovo, e-mail: e.gribanow@yandex.ru, pobed_pnp@mail.ru

In this paper we study the mathematical model of Samuelson-Hicks economic growth, used to describe the patterns associated with fluctuations in business activity in terms of economic growth. The following problem of parametric optimization is solved: to find the values of the parameters of the acceleration factor and the propensity to consumption, in which the gross output (given by the difference equation of the second order) at a fixed time will be the greatest. The case when the discriminant of the corresponding characteristic equation is zero (i.e. the equation has a multiple root) is considered. Using differential and integral calculus, it was possible to prove that the gross output increases both in continuous acceleration factor and in discrete time. This makes it possible to solve an even more General optimization problem of determining the values of these parameters that maximize gross output on a given planning horizon, and to obtain its analytical expression. The latter result, in turn, allows you to find an upper bound for this economic indicator, for arbitrary values of the parameters of the factor of acceleration and the propensity to consume in the model of Samuelson-Hicks for the considered particular case when the discriminant of the corresponding characteristic equation is equal to zero.

Keywords: parametric optimization problem, gross output, planning horizon

Экономический кризис последнего десятилетия заставляет более детально исследовать экономико-математические модели, примеры которых представлены в различных источниках [1–4]. Кроме того, очевидно, необходимо уделить особое внимание методам исследования подобных моделей для получения обоснованности получаемых на их основе научных выводов. В связи с вышеизложенным, трудно переоценить актуальность исследования в частности, динамических моделей экономического роста, описывающих подъемы и спады в развитии экономики как модели делового цикла. К числу таких экономико-математических моделей относится исследуемая далее в данной статье модель Самуэльсона – Хикса, связывающая такие макроэкономические показатели, как валовый выпуск, потребление и инвестиции, с параметрами модели – фактором акселерации, склонностью к потреблению и базовым потреблением [5].

Целью исследования в представленной работе является обоснование монотонного роста валового выпуска в зависимости от фактора акселерации для любого фиксированного момента времени и, как следствие, нахождение соответствующего максимального валового выпуска. Предлагаемое далее исследование опирается на строгие математические методы решения линейных разностных уравнений и математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление) [6, 7]. При этом валовый выпуск рассматривается как непрерывная функция меняющегося параметра, а момент времени считается, наоборот, заданным.

Рассмотрим экономику, в которой изменение национального дохода (валового выпуска) происходит под действием следу-

ющего принципа акселерации: объемы инвестирования зависят от изменения спроса на конечную продукцию или валового выпуска.

Математическая модель национальной экономики может быть представлена уравнениями

$$I^{t+2} = \nu(Y^{t+1} - Y^t),\ C^{t+1} = aY^t + b,$$

$$Y^t = I^t + C^t \quad (t = 0,1,...), \qquad (1)$$

где I^t, Y^t и C^t – соответственно инвестиции, валовый выпуск и потребление в период t, $\nu > 0$ – фактор акселерации, $0 < a < 1$ – склонность к потреблению, $b > 0$ – базовое потребление. Первое из них означает, что инвестиции пропорциональны приросту валового выпуска, второе задает потребление как линейную функцию от выпуска, а третье – условие бюджетного баланса (равенство спроса и предложения). Модель (1), известная в литературе как модель Самуэльсона – Хикса, используется при описании закономерностей, связанных с колебаниями деловой активности [5]. Исключая I^t и C^t из уравнений (1), получаем уравнение динамики валового выпуска в виде следующего линейного разностного уравнения второго порядка:

$$Y^{t+2} = (a+\nu)Y^{t+1} - \nu Y^t + b \quad (t = 0,1,...), \qquad (2)$$

являющееся линейным неоднородным разностным уравнением второго порядка. Согласно [6], решение уравнения (2) сводится к характеристическому уравнению

$$\beta^2 - (a+\nu)\beta + \nu = 0 \quad (0 < a < 1, \nu > 0) \qquad (3)$$

и зависит от знака его дискриминанта $D = (a+\nu)^2 - 4\nu$. В данной работе исследуем оптимизационную задачу: найти значения параметров a и ν, при которых валовый выпуск Y^t в некоторый момент времени t максимален. Рассмотрим случай, когда $D = 0$, предполагая базовое потребление b неизменным. Полагаем (не нарушая общности анализа), что выпуски $Y^0 = 0; Y^1 = 0$. Тогда математическая постановка сформулированной задачи записывается как

$$Y^t(\nu, a) \to \max,\ b = \text{const},$$

$$D = 0,\ Y^0 = 0,\ Y^1 = 0. \qquad (4)$$

В соответствии с алгоритмом, изложенным в [6], решение уравнения (2) имеет вид

$$Y^t = (C_1 + C_2 t)\beta^t + \frac{b}{1-a},\ t = 0,1,..., \qquad (5)$$

где $\beta = \beta_1 = \beta_2 = (a+\nu)/2$ – единственный корень уравнения (3), а коэффициенты

$$C_1 = Y^0 - b/(1-a),$$

$$C_2 = \left(Y^1 - \beta Y^0 + (\beta - 1)b/(1-a)\right)/\beta.$$

В силу нулевых начальных условий,

$$C_1 = -b/(1-a),\ C_2 = \frac{(\beta-1)b}{(1-a)\beta}. \qquad (6)$$

Поскольку $a > 0$ и $\nu > 0$, то $a + \nu > 0$ и условие $D = (a+\nu)^2 - 4\nu = 0$ равносильно тому, что

$$a = 2\sqrt{\nu} - \nu. \qquad (7)$$

Так как $a > 0$, то из (7) получим $2\sqrt{\nu} - \nu > 0$ или $0 < \nu < 4$. Таким образом, множество содержательных значений параметров a, ν описывается линией вида (7), где $0 < \nu < 4$ (рисунок). Так как $a < 1$, то $2\sqrt{\nu} - \nu < 1 \Leftrightarrow (\sqrt{\nu} - 1)^2 > 0$ или $\nu \neq 1$. Поэтому формально следует исключить значение $\nu = 1$, которому, согласно (7), соответствует значение $a = 2\sqrt{1} - 1 = 1$, т.е. исключить точку (1;1) кривой, представленной на рис. 1, – точку максимума. Однако для разрешимости задачи параметрической оптимизации (4), в соответствии с теоремой Вейерштрасса о достижении непрерывной функцией на отрезке своей верхней и нижней грани [7], потребуем замкнутости множества значений параметров a, ν, включив крайние их значения и указанную точку максимума, т.е. полагаем, что $0 \le \nu \le 4$ и $0 \le a \le 1$. Очевидно, это множество непусто, а его ограниченность следует из условий $0 < \nu < 4$, $0 < a < 1$. В силу формулы (7) корень уравнения (3)

$$\beta = (a+\nu)/2 = \sqrt{\nu}$$

и

$$1 - a = 1 - 2\sqrt{\nu} + \nu = (1 - \sqrt{\nu})^2,$$

поэтому константы (6) преобразуются к виду

$$C_1 = -b/(1-\sqrt{\nu})^2,$$

$$C_2 = \frac{(\sqrt{\nu}-1)b}{(1-\sqrt{\nu})^2\sqrt{\nu}} = \frac{b}{(\sqrt{\nu}-1)\sqrt{\nu}}.$$

При этом выражение (5) для валового выпуска определяется формулой

$$Y^t = \left(-b/(1-a) + \frac{(\beta-1)b}{(1-a)\beta}t\right)\beta^t + \frac{b}{1-a} = \frac{b}{1-a}\left[\left(\frac{\beta-1}{\beta}t - 1\right)\beta^t + 1\right],\ t = 0,1,...,\ \text{или}$$

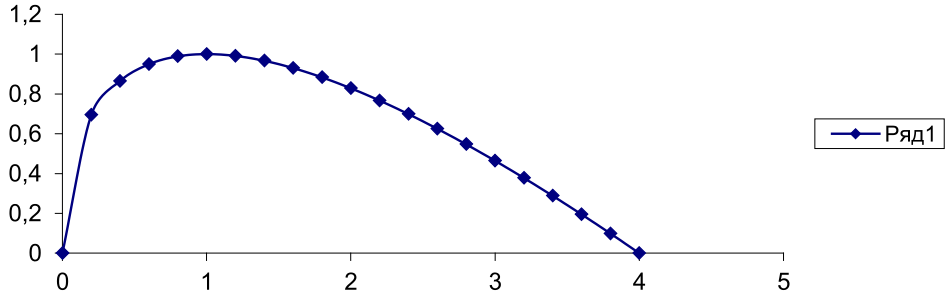

График параметрической зависимости $a = 2\sqrt{v} - v,\ 0 \le v \le 4$

$$Y^t(v) = \frac{b}{(1-\sqrt{v})^2}\left[\left(\frac{\sqrt{v}-1}{\sqrt{v}}t - 1\right)\sqrt{v}^t + 1\right],\ t = 0,1,...$$

Тогда задача (4) равносильна следующей

$$Y^t(v) = \frac{b}{(1-\sqrt{v})^2}\left[\left(\frac{\sqrt{v}-1}{\sqrt{v}}t - 1\right)\sqrt{v}^t + 1\right] \to \max,\ 0 \le v \le 4,\ t = 2,3,... \tag{8}$$

Обозначим

$$\lambda = \sqrt{v},\ R^t(\lambda) = Y^t(v)/b. \tag{9}$$

Так как функция $\lambda = \sqrt{v}$ возрастает по v, от задачи (8) перейдем к эквивалентной задаче

$$R^t(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)^2}\left[\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}t - 1\right)\lambda^t + 1\right] \to \max,\ 0 \le \lambda \le 2,\ t = 2,3,... \text{ или}$$

$$R^t(\lambda) = \frac{1}{(\lambda-1)^2} - \frac{\lambda^t}{(\lambda-1)^2} + \frac{t\lambda^{t-1}}{\lambda-1} \to \max,\ 0 \le \lambda \le 2,\ t = 2,3,... \tag{10}$$

Исследуем на экстремум $R^t(\lambda)$ из (10) как функцию от непрерывного параметра λ:

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{2}{(\lambda-1)^3} - \frac{t\lambda^{t-1}(\lambda-1)^2 - 2\lambda^t(\lambda-1)}{(\lambda-1)^4} + \frac{t[(t-1)\lambda^{t-2}(\lambda-1) - \lambda^{t-1}]}{\lambda-1} =$$

$$= \frac{(t-1)(t-2)\lambda^t - 2t(t-2)\lambda^{t-1} + t(t-1)\lambda^{t-2} - 2}{(\lambda-1)^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = \frac{(t-1)(t-2)\lambda^t - 2t(t-2)\lambda^{t-1} + t(t-1)\lambda^{t-2} - 2}{(\lambda-1)^3}. \tag{11}$$

Обозначая

$$Q^t(\lambda) = (t-1)(t-2)\lambda^t - 2t(t-2)\lambda^{t-1} + t(t-1)\lambda^{t-2} - 2, \tag{12}$$

можем переписать формулу (11) в виде

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = \frac{Q^t(\lambda)}{(\lambda-1)^3}. \tag{13}$$

Дифференцируем (12) по λ:

$$\frac{dQ^t(\lambda)}{d\lambda} = (t-1)(t-2)t\lambda^{t-1} - 2t(t-2)(t-1)\lambda^{t-2} + t(t-1)(t-2)\lambda^{t-3} =$$

$$= t(t-1)(t-2)\lambda^{t-3}[\lambda^2 - 2\lambda + 1] = t(t-1)(t-2)\lambda^{t-3}[\lambda - 1]^2\ (t = 3,4...).$$

Таким образом, получили

$$\frac{dQ^t(\lambda)}{d\lambda} = t(t-1)(t-2)\lambda^{t-3}(\lambda-1)^2 \ (t = 3,4...), \tag{14}$$

из которого следует: $\frac{dQ^t(\lambda)}{d\lambda}$ кратно $[\lambda-1]^2$. Интегрируя (14) по λ, получим

$$Q^t(\lambda) = t(t-1)(t-2)\int \lambda^{t-3}[\lambda-1]^2 d\lambda + C.$$

Сделаем замену $x = \lambda - 1 \Rightarrow dx = d\lambda; \lambda = x+1$. Тогда

$$Q^t(\lambda) = t(t-1)(t-2)\int (x+1)^{t-3}x^2dx + C = t(t-1)(t-2)\int \sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k x^k x^2 dx + C =$$

$$= t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{x^{k+3}}{k+3} + C = t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{(\lambda-1)^{k+3}}{k+3} + C.$$

В итоге

$$Q^t(\lambda) = t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{(\lambda-1)^{k+3}}{k+3} + C \ (t = 3,4...), \tag{15}$$

откуда при λ = 1 имеем $Q^t(1) = C$. С другой стороны, из (12) получим

$$Q^t(1) = (t-1)(t-2) - 2t(t-2) + t(t-1) - 2 = (t-1)\cdot 2(t-1) - 2t(t-2) - 2 = 2[(t-1)^2 - t(t-2) - 1] = 0.$$

Таким образом, $C = Q^t(1) = 0$, поэтому (15) окончательно запишем в виде

$$Q^t(\lambda) = t(t-1)(t-2)(\lambda-1)^3 \sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{(\lambda-1)^k}{k+3} \ (t = 3,4...). \tag{15'}$$

Заметим, что из (15') следует: $Q^t(\lambda)$ кратно $(\lambda-1)^3$. Подставляя (15') в (13), имеем

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{(\lambda-1)^k}{k+3} \ (t = 3,4...). \tag{16}$$

Кроме того, объединяя выражения (11) и (16), получим тождество

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = \frac{(t-1)(t-2)\lambda^t - 2t(t-2)\lambda^{t-1} + t(t-1)\lambda^{t-2} - 2}{(\lambda-1)^3} = t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{(\lambda-1)^k}{k+3} (t = 3,4...), \tag{17}$$

из которого следует, что λ = 1 – точка устранимого разрыва $\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda}$. Действительно, при $\lambda \to 1$ из левой части (17) по правилу Лопиталя, с учетом (13) и (14), найдем

$$\lim_{\lambda\to 1}\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\lambda\to 1}\frac{(t-1)(t-2)\lambda^t - 2t(t-2)\lambda^{t-1} + t(t-1)\lambda^{t-2} - 2}{(\lambda-1)^3} = \lim_{\lambda\to 1}\frac{dQ^t(\lambda)}{d\lambda}\Big/\left[3(\lambda-1)^2\right] =$$

$$= \lim_{\lambda\to 1}\frac{t(t-1)(t-2)\lambda^{t-3}(\lambda-1)^2}{3(\lambda-1)^2} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3}.$$

С другой стороны, из правой части (17) имеем

$$\frac{dR^t(1)}{d\lambda} = t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3} C_{t-3}^k \frac{(\lambda-1)^k}{k+3}\Big|_{\lambda=1} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3},$$

т.е. $\lim\limits_{\lambda\to 1}\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = \frac{dR^t(1)}{d\lambda}$. Тогда $\frac{dR^t}{d\lambda}$ доопределим выражением $\frac{t(t-1)(t-2)}{3}$, считая ее непрерывной в точке λ = 1, т.е.

$$\frac{dR^t(1)}{d\lambda} = \frac{t(t-1)(t-2)}{3}\ (t = 3,4...). \tag{18}$$

На основе формулы (16) несложно доказать следующую лемму.

Лемма. Если для уравнения динамики (2) справедливы условия

$$b = \text{const}, D = 0, Y^0 = 0; Y^1 = 0, \tag{19}$$

то

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} > 0\ (0 \le \lambda \le 2; t = 3,4...). \tag{20}$$

Доказательство. При $1 \le \lambda \le 2$ неравенство (20) очевидно в силу (16), (18) и условий $C_{t-3}^k > 0; k+3 > 0\ \forall k = 0,...,t-3\ (t = 3;4;...)$. Поэтому достаточно доказать указанное неравенство для 0 ≤ λ < 1. Применяя бином Ньютона к формуле (16), перепишем ее в виде

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = t(t-1)(t-2)\sum_{k=0}^{t-3}\frac{C_{t-3}^k}{k+3}\sum_{m=0}^{k} C_k^m(-1)^{k-m}\lambda^m. \tag{21}$$

Рассмотрим двойную сумму более общего вида, чем правая часть (21):

$$\sum_{k=0}^{t-3}\alpha_{k,t}\sum_{m=0}^{k}\beta_{k,m}\lambda^m = \alpha_{0,t}\beta_{0,0} + \alpha_{1,t}[\beta_{1,0} + \beta_{1,1}\lambda] + \alpha_{2,t}[\beta_{2,0} + \beta_{2,1}\lambda + \beta_{2,2}\lambda^2] + ... +$$

$$+\alpha_{t-3,t}[\beta_{t-3,0} + \beta_{t-3,1}\lambda + ... + \beta_{t-3,t-3}\lambda^{t-3}]$$

или, упорядочивая слагаемые по степеням λ, имеем

$$\sum_{k=0}^{t-3}\alpha_{k,t}\sum_{m=0}^{k}\beta_{k,m}\lambda^m = (\alpha_{0,t}\beta_{0,0} + \alpha_{1,t}\beta_{1,0} + \alpha_{2,t}\beta_{2,0} + ... + \alpha_{t-3,t}\beta_{t-3,0}) + (\alpha_{1,t}\beta_{1,1} + \alpha_{2,t}\beta_{2,1} + ... +$$

$$+\alpha_{t-3,t}\beta_{t-3,1})\lambda + ... + \alpha_{t-3,t}\beta_{t-3,t-3}\lambda^{t-3} = \sum_{s=0}^{t-3}\alpha_{s,t}\beta_{s,0} + \sum_{s=1}^{t-3}\alpha_{s,t}\beta_{s,1}\lambda + ... + \alpha_{t-3,t}\beta_{t-3,t-3}\lambda^{t-3} = \sum_{m=0}^{t-3}\lambda^m\sum_{s=m}^{t-3}\beta_{s,m}\alpha_{s,t}.$$

Таким образом, доказано равенство $\sum\limits_{k=0}^{t-3}\alpha_{k,t}\sum\limits_{m=0}^{k}\beta_{k,m}\lambda^m = \sum\limits_{m=0}^{t-3}\lambda^m\sum\limits_{s=m}^{t-3}\alpha_{s,t}\beta_{s,m}$, в силу которого при $\alpha_{k,t} = \frac{C_{t-3}^k}{k+3}; \beta_{k,m} = C_k^m(-1)^{k-m}$, перепишем выражение (21) в виде

$$\frac{dR^t(\lambda)}{d\lambda} = t(t-1)(t-2)\sum_{m=0}^{t-3}\lambda^m\sum_{s=m}^{t-3}\frac{C_{t-3}^s}{s+3}C_s^m(-1)^{s-m}\ (t = 3;4;...). \tag{22}$$

Рассмотрим внутреннюю сумму по *s* в правой части (22):

$$\sum_{s=m}^{t-3}\frac{C_{t-3}^s}{s+3}C_s^m(-1)^{s-m} = \sum_{s=m}^{t-3}\frac{(t-3)!}{s!(t-3-s)!(s+3)}\cdot\frac{s!(-1)^{s-m}}{m!(s-m)!} = \frac{(t-3)!}{m!}\sum_{s=m}^{t-3}\frac{(-1)^{s-m}}{(s+3)(t-3-s)!(s-m)!}.$$

Сделаем в последней сумме замену $s-m=k \Rightarrow s=m+k; k=0,...,t-3-m$. Тогда

$$\sum_{s=m}^{t-3}\frac{C_{t-3}^{s}}{s+3}C_{s}^{m}(-1)^{s-m}=\frac{(t-3)!}{m!}\sum_{k=0}^{t-3-m}\frac{(-1)^{k}}{(k+m+3)(t-3-m-k)!k!}.$$

Делая в полученной сумме замену $t-3-m=\mu \Rightarrow t-3=m+\mu$, запишем

$$\sum_{s=m}^{t-3}\frac{C_{t-3}^{s}}{s+3}C_{s}^{m}(-1)^{s-m}=\frac{(m+\mu)!}{m!}\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}}{(k+m+3)(\mu-k)!k!}=$$

$$=\frac{(m+\mu)!}{m!\mu!}\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}\mu!}{(k+m+3)(\mu-k)!k!}=C_{m+\mu}^{m}\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}C_{\mu}^{k}}{k+m+3}.$$

В итоге получим

$$\sum_{s=m}^{t-3}\frac{C_{t-3}^{s}}{s+3}C_{s}^{m}(-1)^{s-m}=C_{m+\mu}^{m}\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}C_{\mu}^{k}}{k+m+3}. \quad (23)$$

Рассмотрим тождество, получаемое из бинома Ньютона $(z-1)^{\mu}=\sum_{k=0}^{\mu}C_{\mu}^{k}z^{k}(-1)^{\mu-k}\ (\forall z)$ или

$$\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^{\mu-k}C_{\mu}^{k}z^{k}=(z-1)^{\mu}\ (\forall z). \quad (23')$$

Умножая его на $(-1)^{\mu}z^{m+2}$ и учитывая, что $(-1)^{2\mu}=1; (-1)^{-k}=(-1)^{k}$, запишем

$$\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^{k}C_{\mu}^{k}z^{k+m+2}=(1-z)^{\mu}z^{m+2}\quad (m=0,...,t-3;\forall z).$$

Интегрируя полученное тождество по z на интервале от 0 до 1, имеем

$$\int_{0}^{1}\left(\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^{k}C_{\mu}^{k}z^{k+m+2}\right)dz=\sum_{k=0}^{\mu}(-1)^{k}C_{\mu}^{k}\int_{0}^{1}z^{k+m+2}dz=\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}C_{\mu}^{k}}{k+m+3}=\int_{0}^{1}(1-z)^{\mu}z^{m+2}dz.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}C_{\mu}^{k}}{k+m+3}=\int_{0}^{1}(1-z)^{\mu}z^{m+2}dz\ (m=0,...,t-3). \quad (24)$$

Так как функция $f(z)=(1-z)^{\mu}z^{m+2}>0\ (m=0,...,t-3;\forall z\in(0;1))$, то справедлива оценка [7]:

$$\int_{0}^{1}(1-z)^{\mu}z^{m+2}dz>0\ (m=0,...,t-3),$$

из которой, с учетом (24), следует, что $\sum_{k=0}^{\mu}\frac{(-1)^{k}C_{\mu}^{k}}{k+m+3}>0\ (m=0,...,t-3)$. Отсюда, в силу (23) и $C_{m+\mu}^{m}>0\ (\forall\mu,m)$, имеем неравенство

$$\sum_{s=m}^{t-3}\frac{C_{t-3}^{s}}{s+3}C_{s}^{m}(-1)^{s-m}>0\ (t=3,4...,\forall m),$$

означающее, что коэффициенты при λ^{m} в выражении (22) положительны. Поэтому справедливо неравенство (20) при $\lambda\geq 0$ и, в частности, при $0\leq\lambda\leq 2$, так как $t(t-1)(t-2)>0\ (t=3;4;...)$ и $\lambda^{0}=1>0$. При $\lambda=1$ (20) также верно в силу (18).

Из леммы следует, что функция $R^t(\lambda)$ монотонно возрастает по λ $(\forall \lambda \in [0;2]; t = 3,4...)$. Поэтому, в силу соотношений (9), валовый выпуск в момент t также монотонно возрастает по параметру v. Следовательно, наибольшее значение $R^t(\lambda)$ может достигать лишь на границах отрезка $\lambda \in [0;2]$:

$$\max_{\lambda \in [0;2]} R^t(\lambda) = \max\left[R^t(0); R^t(2)\right] (t = 3,4...). \quad (25)$$

При $t = 2$ из (10) имеем $R^2(\lambda) = \frac{1-\lambda^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{2\lambda}{\lambda-1} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda-1)^2} = 1\,(0 \le \lambda \le 2; \lambda \ne 1)$, т.е. $\lambda = 1$ – точка устранимого разрыва. Тогда полагаем

$$R^2(\lambda) = 1\,(0 \le \lambda \le 2). \quad (26)$$

С другой стороны, по формуле (10) при $\lambda = 0; 2$ соответственно найдем $R^t(0) = 1$; $R^t(2) = (t/2-1)2^t + 1\,(t = 3,4...)$, откуда, в силу (26) и неравенства $(t/2-1)2^t \ge 0\ \forall t = 2;3;...$, имеем $R^t(2) \ge R^t(0)\,(\forall t = 2;3;...)$, т.е., согласно (25), $\max_{\lambda \in [0;2]} R^t(\lambda) = R^t(2)$. В итоге $\max_{\lambda \in [0;2]} R^t(\lambda) = R^t(2) = (t/2-1)2^t + 1\,(t = 2;3;...)$. Тогда, с учетом (9), при условиях (19) найдем наибольший валовый выпуск в момент t по формуле

$$Y^t_{\max} = \max_{v \in [0;4]} Y^t(v) = b \max_{\lambda \in [0;2]} R^t(\lambda) = bR^t(2) = Y^t(4) = b\left[(t/2-1)2^t + 1\right] (t = 2;3;...). \quad (27)$$

При этом наибольший валовый выпуск в момент t соответствуют значения параметров $v = 4$; $a = 0$.

Таким образом, используя методы решения линейных разностных уравнений, а также дифференциальное и интегральное исчисление, удалось показать, что валовый выпуск в момент t является монотонно возрастающим по параметру фактора акселерации при условиях нулевых валовых выпусков и наличии кратного корня у характеристического уравнения, соответствующего разностному уравнению, описывающему указанный экономический показатель. Это, в свою очередь, позволило получить выражение для максимального валового выпуска в заданный момент времени. Найденное выражение задает оценку сверху на любой валовый выпуск в произвольный момент времени $t \ge 2$ в модели роста Самуэльсона – Хикса.

Список литературы

1. Нижегородцев Р.М. Факторы экономического роста российских регионов: регрессионно-кластерный анализ / Р.М. Нижегородцев, М.Ю. Архипова // Вестник УГТУ ЮПИ. – 2009. – № 3. – С. 94–110.

2. Колемаев В.А. Математические методы и модели исследования операций / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ ДАНА, 2012. – 592 с.

3. Хуснутдинов Р.Ш. Экономико-математические методы и модели / Р.Ш. Хуснутдинов. – М.: ООО «Научно-издательский центр ИНФРА-М», 2013. – 224 с.

4. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учебное пособие / И.В. Орлова, В.А. Половников. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 389 с.

5. Математическая экономика на персональном компьютере / под ред. М. Кубонива. – М.: Финансы и статистика, 1991. – 304 с.

6. Коврижных А.Ю. Дифференциальные и разностные уравнения: учеб. пособие / А. Ю. Коврижных, О.О. Коврижных. – Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 2014. – 148 с.

7. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Том 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды / Л.Д. Кудрявцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.