УДК 531.3

### АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВУЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА РОБОТА

#### Борисов А.В., Ермачкова В.В., Кончина Л.В.

Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ», Смоленск, e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

Настоящая статья посвящена исследованию систем дифференциальных уравнений движения плоских механизмов двух различных конструкций, движущихся по горизонтальной плоскости. В статье проводится линеаризация систем дифференциальных уравнений движения вблизи начального момента времени для двух моделей плоских механизмов: с абсолютно твердыми звеньями и со звеньями переменной длины. Модели имеют точечные контакты с опорной поверхностью в точках, где сосредоточены массы, два подвижных звена постоянной или переменной длины и управляющий момент в шарнире, соединяющем звенья. Для предложенных моделей получено аналитическое решение линеаризованной системы дифференциальных уравнений движения. Предложен новый алгоритм целенаправленного перемещения плоского механизма за счет изменения длины звена. При этом необходимо реализовать анизотропное трение в зоне контакта площадки с опорной поверхностью. Прямолинейное движение механизма реализуется с помощью продольных сил, действующих вдоль звена и продольного волнообразного движения звеньев механизма. Произвольное перемещение плоского механизма в любую заданную точку плоскости и поворот его корпуса относительно начального положения для механизма со звеньями переменной длины будут реализовываться в виде комбинации двух волнообразных движений, состоящих из продольных и поперечных волн, идущих соответственно вдоль и между звеньями. Управлением в плоском механизме со звеньями переменной длины являются момент, расположенный в шарнире, соединяющий звенья и обеспечивающий поворот звеньев относительно друг друга, и продольные силы, действующие вдоль звеньев и обеспечивающие изменение длин звеньев, то есть изменение расстояния между точечными массами вдоль прямой, соединяющей начало и конец звена. Технически данные управляющие воздействия могут быть реализованы в виде электродвигателей соответствующей конструкции.

Ключевые слова: плоский механизм, звено переменной длины, трение скольжения, анизотропное трение, управляющий момент, управляющая продольная сила, точки контакта, дифференциальные уравнения движения, линеаризация, аналитическое решение

# ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MOTION OF A PLANE TWO-SENSUAL MECHANISM OF THE ROBOT

#### Borisov A.V., Ermachkova V.V., Konchina L.V.

Branch of Federal State Budgetary Educational Institution Of Higher Education National Research University «MPEI», Smolensk, e-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

The present paper is devoted to the investigation of systems of differential equations of motion of plane mechanisms of two different structures moving along the horizontal plane. The linearization of systems of differential equations of motion near the initial time moment is carried out for two models of plane mechanisms; with absolutely rigid links and with links of variable length. Models have point contacts with the reference surface at points where the masses are concentrated, two movable links of constant or variable length, and a control moment in the hinge connecting the links. For the proposed models, an analytical solution of the linearized system of differential equations of motion is obtained. A new algorithm for the purposeful movement of a planar mechanism by changing the length of a link is proposed. In this case it is necessary to realize anisotropic friction in the zone of contact between the platform and the supporting surface. The linear motion of the mechanism is realized by means of longitudinal forces acting along the link and longitudinal wave-like motion of the links of the mechanism. The arbitrary movement of the planar mechanism to any given point in the plane and the rotation of its body relative to the initial position for the mechanism with links of variable length will be realized as a combination of two wave-like motions consisting of longitudinal and transverse waves, respectively, along and between the links. The control in a planar mechanism with links of variable length is the moment located in the hinge connecting the links and ensuring the rotation of the links relative to each other and the longitudinal forces acting along the links and providing a change in the lengths of the links, that is, changing the distance between the point masses along the straight line connecting the beginning and the end of the link. Technically, these control actions can be implemented in the form of electric motors of the appropriate design.

Keywords: plane mechanism, variable length link, sliding friction, anisotropic friction, control moment, controlling longitudinal force, contact points, differential equations of motion, linearization, analytical solution

Моделирование перемещения червей и гусениц в живой природе многозвенными системами со звеньями переменной длины и шарнирами является актуальным и востребованным вследствие широких возможностей для создания роботов, реализующих аналогичный принцип передвижения и способных перемещаться в ограниченном

пространстве. Однако в настоящее время большинство исследований плоских робототехнических систем базируется на модели абсолютно твердых звеньев [1–3]. Вопросы управления плоскими механизмами рассматриваются в работах [3, 4]. Общие вопросы управления и стабилизации движения механических систем исследуются в рабо-

тах [5–6]. Вопросы трения в зоне контакта с опорной поверхностью рассматриваются в работах [7–9]. Разработанные механизмы перемещаются за счет поперечного волнообразного движения тела. Роботов, перемещающихся за счет изменения длины звеньев тела, как у червя или гусеницы, продольного волнообразного переноса тела на данный момент, не выявлено. Таким образом, предложенная модель плоского робота опережает имеющиеся разработки и будет являться теоретическим фундаментом для дальнейшей практической реализации нового принципа перемещения ползающих роботов – волнообразного переноса корпуса робота за счет одновременного изменения длины звеньев и углов между звеньями.

Целью статьи является разработка нового способа перемещения плоских механизмов. Задача заключается в линеаризации системы дифференциальных уравнений движения плоского механизма и получении ее аналитического решения. Для этого необходимо составить системы дифференциальных уравнений движения, описывающих поведение рассматриваемых в статье механизмов. Следующий этап – создание нового алгоритма для синтеза целенаправленного движения плоского механизма со звеньями переменной длины. Создание нового алгоритма обусловлено новым способом перемещения на основе изменения длин звеньев и, соответственно, отсутствием переносимости результатов, полученных для моделей роботов с абсолютно твердыми звеньями. Новизна способа заключается в комбинации двух волнообразных движений звеньев робота в виде продольных и поперечных волн. В отличие от моделей с абсолютно твердыми звеньями, которые управлялись только одним моментом, создаваемым двигателем в шарнире, соединяющем звенья, для модели со звеньями переменной длины необходимы три управляющих воздействия. В добавление к моменту в шарнире необходимы еще две продольные силы, действующие вдоль звена и обеспечивающие изменение длин звеньев механизма. При этом необходимо наличие анизотропной силы трения, возникающей в зоне контакта площадок механизма, в которых сосредоточены точечные массы, с опорной поверхностью.

## Модель плоского механизма с абсолютно твердыми звеньями

Рассмотрим движение плоского механизма с двумя звеньями на опорной поверхности XOY, которая является плоскостью движения рассматриваемой системы. Модель имеет три сосредоточенные массы в точках A, B, C, которые обозначим следующим образом: в точке A расположена масса  $m_1$ , в шарнире  $B-m_0$ , в точке  $C-m_2$  (рис. 1).

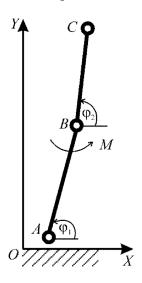


Рис. 1. Плоский механизм с тремя сосредоточенными массами и невесомыми звеньями под действием внутренних усилий и сил трения на плоскости

За обобщенные координаты, однозначно характеризующие положение механизма, выберем координаты точки B, которые обозначим x, y и углы  $\phi_1, \phi_2,$  которые составляют с осью OX звенья  $AB = l_1$  и  $BC = l_2$  соответственно. Все обобщенные координаты являются функциями времени.

Кинетическая энергия механизма складывается из кинетической энергии звеньев путем суммирования кинетических энергий каждой сосредоточенной на звене массы:

$$T = [(m_0 + m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2] + + \dot{x}(m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2) + \dot{y}(-m_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2).$$
(1)

Для выбранной модели дифференциальные уравнения движения, записанные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

$$(m_0 + m_1 + m_2)\dot{x} + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \cos \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_x, \tag{2}$$

$$(m_0 + m_1 + m_2)\dot{y} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \sin \varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_y,$$
(3)

$$m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1},$$
 (4)

$$-m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 = Q_{\omega_2}. \tag{5}$$

Здесь  $Q_{x}, Q_{y}, Q_{\phi 1}, Q_{\phi 2}$  – обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения и управляющим моментом в шарнире.

Модель плоского механизма со звеньями переменной длины с точечными площадками контакта

В этом случае звенья будем считать переменной длины, являющимися функциями времени:  $AB = l_1(t)$ ,  $BC = l_2(t)$ .

Кинетическая энергия механизма складывается из кинетической энергии звеньев путем суммирования кинетических энергий каждой сосредоточенной на звене массы.

$$T = \frac{1}{2} \left[ (m_0 + m_1 + m_2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_1(\dot{l}_1^2 + l_1^2 \dot{\phi}_1^2) + m_2(\dot{l}_2^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2) \right] + + \dot{x} (m_1 l_1 \sin \phi_1 \dot{\phi}_1 - m_2 l_2 \sin \phi_2 \dot{\phi}_2) + \dot{y} (-m_1 l_1 \cos \phi_1 \dot{\phi}_1 + m_2 l_2 \cos \phi_2 \dot{\phi}_2) - - m_1 \dot{l}_1 (\dot{x} \cos \phi_1 + \dot{y} \sin \phi_1) + m_2 \dot{l}_2 (\dot{x} \cos \phi_2 + \dot{y} \sin \phi_2).$$
 (6)

Для данной модели дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x} + m_1 l_1 \sin\varphi_1\ddot{\varphi}_1 - m_2 l_2 \sin\varphi_2\ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \cos\varphi_1\dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \cos\varphi_2\dot{\varphi}_2^2 +$$

$$+2m_{1}\sin\varphi_{1}\dot{l}_{1}\dot{\varphi}_{1}-2m_{2}\sin\varphi_{2}\dot{l}_{2}\dot{\varphi}_{2}-m_{1}\cos\varphi_{1}\ddot{l}_{1}+m_{2}\cos\varphi_{2}\ddot{l}_{2}=Q_{x},\tag{7}$$

$$(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{y} - m_1 l_1 \cos\varphi_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \cos\varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + m_1 l_1 \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1^2 - m_2 l_2 \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 -$$

$$-2m_1 \cos \varphi_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 + 2m_2 \cos \varphi_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 - m_1 \sin \varphi_1 \ddot{l}_1 + m_2 \sin \varphi_2 \ddot{l}_2 = Q_v, \tag{8}$$

$$m_1 l_1 \sin \varphi_1 \ddot{x} - m_1 l_1 \cos \varphi_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + 2 m_1 l_1 \dot{l}_1 \dot{\varphi}_1 = Q_{\varphi_1},$$
 (9)

$$-m_2 l_2 \sin \varphi_2 \ddot{x} + m_2 l_2 \cos \varphi_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2 + 2 m_2 l_2 \dot{l}_2 \dot{\varphi}_2 = Q_{\varphi_2}, \tag{10}$$

$$-m_1 \cos \varphi_1 \ddot{x} - m_1 \sin \varphi_1 \ddot{y} - m_1 l_1 \dot{\varphi}_1^2 + m_1 \ddot{l}_1 = F_1 - F_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (11)$$

$$m_2 \cos \varphi_2 \ddot{x} + m_2 \sin \varphi_2 \ddot{y} - m_2 l_2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 \ddot{l}_2 = F_2 - F_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$
 (12)

где  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $Q_{\phi^1}$ ,  $Q_{\phi^2}$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  — обобщенные силы, обусловленные силами сухого трения, управляющим моментом в шарнире, управляющими продольными силами, обеспечивающими изменение длины звена.

Рассмотрим разделенный на части механизм (рис. 2, слева). Покажем слева силы, действующие отдельно на звенья.

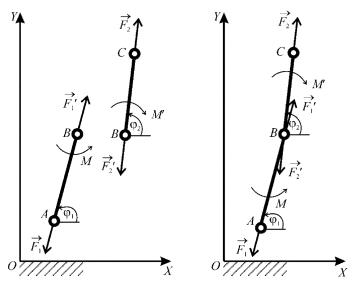


Рис. 2. Силы, обеспечивающие изменение длины звена

В соответствии с третьим законом Ньютона для звена AB при его удлинении, т.е. движении точки A от точки B, на точку A действует сила  $\vec{F_1}$ , а на точку B сила  $\vec{F_1}' = -\vec{F_1}$ . При удлинении звена BC, т.е. при движении точки C от точки B, на точку C действует сила  $\vec{F_2}$ , а на точку B сила  $\vec{F_2}' = -\vec{F_2}$ .

а на точку B сила  $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$ .

Рассмотрим соединенную модель механизма, представленную на правой части рис. 2.

Звено AB действует на звено BC в шарнире B проекцией силы  $\vec{F}_1'$  на направление звена BC, т.е.  $\vec{F}_1'\cos(\phi_2-\phi_1)$ . Соответственно, звено BC действует на звено AB с силой  $\vec{F}_2'\cos(\phi_2-\phi_1)$ .

Линеаризация систем дифференциальных уравнений движения и их аналитическое решение

Проведем линеаризацию систем дифференциальных уравнений движения рассмотренных механизмов с целью получения аналитического решения и оценки адекватности поведения механизмов на малом промежутке времени. Рассмотрим идеальные условия, при которых на механизм не действуют внешние силы. Пусть в таких условиях находится механизм, показанный на рис. 1, с точечными площадками контакта и двумя звеньями постоянной или переменной длины. При таких условиях правая сторона системы дифференциальных уравнений движения будет равна нулю. Линеаризованная система для модели с абсолютно твердыми звеньями принимает вид

$$m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} - m_1 l_1 \ddot{\phi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\phi}_2 = 0, -m_1 l_1 \ddot{y} + m_1 l_1^2 \ddot{\phi}_1 = 0,$$

$$m_2 l_2 \ddot{y} + m_2 l_2^2 \ddot{\phi}_2 = 0, m = \sum_{i=0}^{2} m_i.$$
(13)

Аналитическое решение системы (13) имеет вид

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, y = y_0 + \dot{y}_0 t, \varphi_1 = \varphi_{1_0} + \dot{\varphi}_{1_0} t, \varphi_2 = \varphi_{2_0} + \dot{\varphi}_{2_0} t.$$
(14)

Линеаризованная система для модели со звеньями переменной длины имеет вид

$$m\ddot{x} - m_{1}\ddot{l}_{1} + m_{2}\ddot{l}_{2} = 0, m\ddot{y} - m_{1}l_{1}\ddot{\varphi}_{1} + m_{2}l_{2}\ddot{\varphi}_{2} = 0,$$

$$-m_{1}l_{1}\ddot{y} + m_{1}l_{1}^{2}\ddot{\varphi}_{1} = 0, m_{2}l_{2}\ddot{y} + m_{2}l_{2}^{2}\ddot{\varphi}_{2} = 0, -m_{1}\ddot{x} + m_{1}\ddot{l}_{1} = 0,$$

$$m_{2}\cos\varphi_{2}\ddot{x} + m_{2}\ddot{l}_{2} = 0, m = \sum_{i=0}^{2} m_{i}.$$
(15)

Аналитическое решение системы (15) имеет вид:

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t, y = y_0 + \dot{y}_0 t, \varphi_1 = \varphi_{1_0} + \dot{\varphi}_{1_0} t, \varphi_2 = \varphi_{2_0} + \dot{\varphi}_{2_0} t,$$

$$l_1 = l_{1_0} + \dot{l}_{1_0} t, l_2 = l_{2_0} + \dot{l}_{2_0} t.$$
(16)

Таким образом, аналитическим решением системы линеаризованных дифференциальных уравнений движения являются уравнения равномерного движения с параметрами, зависящими от начального положения механизма. Если механизм в начальный момент времени находился в состоянии покоя, то он и будет сохранять это состояние неограниченно долго. Итак, показана адекватность системы дифференциальных уравнений движения.

Следующий этап – учет сил в правой части дифференциальных уравнений движения.

Целенаправленное движение механизма, обусловленное изменением длины его корпуса

Поступательное движение механизма реализуется за счет изменения длины звена и анизотропного покрытия нижней части

робота, непосредственно контактирующей с поверхностью (рис. 3).

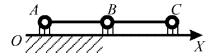


Рис. 3. Схематическая модель зон контакта, обеспечивающих анизотропное трение

Аналогия для подобной модели анизотропного трения может быть проведена с автомобильными шинами с направленным рисунком протектора, когда при движении автомобиля вперед сила трения больше, чем при движении назад. В данном случае, при движении в направлении оси *х* коэффициент трения меньше, чем при движении в обратном направлении. Таким образом, если проекция внутренней управляющей силы  $\vec{F}_i$  (i=1,2), действующая на соответствующую сосредоточенную массу положительна, то сила трения меньше, чем в случае, когда проекция силы отрицательна. То есть коэффициенты трения  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  являются переменными, зависящими от знака проекции внутренней управляющей силы  $\vec{F}_i$  (i=1,2).

Перемещение из состояния покоя происходит в три этапа.

На первом этапе перемещается вперед точечная масса C за счет удлинения звена BC под действием внутренней управляющей силы  $\vec{F}_2$  и того, что сила трения в направлении оси x меньше, чем в обратном. За счет этого достигается неподвижность точечных масс A и B.

На втором этапе точечная масса C, сместившаяся вперед, подтягивает точечную массу B за счет внутренних управляющих сил —  $\vec{F}_2$  и/или ее подталкивает внутренняя управляющая сила  $\vec{F}_1$ . При этом точечные массы A и C остаются неподвижными.

На третьем этапе сместившиеся вперед точечные массы B и C подтягивают точечную массу A за счет внутренней управляющей силы —  $\vec{F_1}$ .

Так достигается прямолинейное движение механизма только за счет изменения длины его звеньев. При таком алгоритме перемещения возможно реализовать прямолинейное движение механизма и при обычном трении только за счет небольших значений продольных сил, чтобы была обеспечена неподвижность двух точечных масс из трех. Однако этот вопрос требует дополнительного исследования.

Следует отметить, что это не единственный возможный алгоритм прямолинейного перемещения механизма. Например, при достаточно большой анизотропии трения первый этап может выглядеть следующим образом. Перемещаются вперед точечные массы B и C, за счет удлинения звена AB под действием внутренней управляющей силы  $F_1$  и/или еще дополнительное перемещение может получать точка C за счет внутренней управляющей силы  $\vec{F}_2$  . При этом силой трения должна обеспечиваться неподвижность точечной массы А. Или второй этап может выглядеть так. Сместившая вперед точечная масса С подтягивает остальную конструкцию, состоящую из точечных масс Aи B за счет действия продольных сил —  $F_1$ и/или  $-\vec{F}_{2}$ . Таким образом, будет достаточно двух этапов для организации целенаправленного движения.

Если будет возможность регулировать направление анизотропного сцепления с поверхностью, робот сможет не разворачиваясь двигаться в обратном направлении.

Повороты робота реализуются за счет момента в шарнире *B*. Повтором и комбинацией поступательных и вращательных движений робот может реализовывать целенаправленное движение и перемещаться по плоскости в любую заданную точку.

#### Заключение

В результате проведенного исследования рассмотрены две модели механизмов: с точечными массами и со звеньями переменной длины. Составлены системы дифференциальных уравнений движения, проведена линеаризация и получены их аналитические решения. Предложен и описан новый алгоритм целенаправленного перемещения плоского механизма со звеньями переменной длины.

#### Список литературы

- 1. Reshmin S.A. Properties of the time-optimal feedback control for a pendulum-like system / S.A. Reshmin, F.L. Chernousko // Journal of Optimization Theory and Applications. -2014. Vol. 163, N 1. P. 230–252.
- 2. Черноусько Ф.Л. Влияние сил трения на динамику двузвенного мобильного робота / Ф.Л. Черноусько, М.М. Шундерюк // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, Вып. 1. С. 22–36.
- 3. Черноусько Ф.Л. Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация / Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник. М.: Изд-во ИПМех РАН (Препринт № 1128), 2016. 154 с.
- 4. Черноусько Ф.Л. Методы управления нелинейными механическими системами. / Ф.Л. Черноусько, И.М. Ананьевский, С.А. Решмин. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
- 5. Мухарлямов Р.Г. Дифференциально-алгебраические уравнения программных движений лагранжевых динамических систем / Р.Г. Мухарлямов // Известия РАН. МТТ. 2011.-N 4. C.50—61.
- 6. Мухарлямов Р.Г. Управление динамикой связанных систем и обратные задачи динамики / Р.Г. Мухарлямов, Е.А. Горшков // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Математика. Информатика. Физика». 2015. № 1. С. 73–82.
- 7. Андронов В.В. Сухое трение в задачах механики / В.В. Андронов, В.Ф. Журавлев. Москва Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. 184 с.
- 8. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел / В.Ф. Журавлев // Успехи механики. 2005. № 3. С. 58—76.
- 9. Розенблат Г.М. Динамические системы с сухим трением / Г.М. Розенблат. Москва Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2006.-204 с.