УДК 004.9:517.958

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАЛЫХ ВНУТРЕННИХ ДВИЖЕНИЙ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Свиридова Е.Н.

Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, e-mail: sviridova.e.n@mail.ru

Исследуются двумерные малые внутренние движения невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости, которая находится в состоянии равномерного вращения вокруг вертикальной оси. Математическая модель данного физического процесса представляет из себя замкнутую систему уравнений в частных производных, состоящую из уравнений гидродинамики, в которых учтены сила Кориолиса и гравитационные силы. Предполагается, что функция плотности жидкости изменяется в направлении гравитационного поля по экспоненциальному закону. Это приводит к заключению о постоянстве частоты Вейсяля – Брента для рассматриваемой задачи. Колебания, которые учитывают силу Кориолиса и гравитационные силы, называются гравитационно-гироскопическими волнами. Уравнения записаны в системе координат, вращающейся вместе с жидкостью с постоянной угловой скоростью. Система уравнений дополнена необходимыми начальными и граничными условиями. Выписаны явные представления для главных членов асимптотик компонент вектора скорости частиц жидкости. Исследовано влияние различных физических параметров (параметр стратификации жидкости, угловая частота вращения жидкости) на асимптотики этих компонент. Приведены графики зависимости главных членов асимптотик компонент вектора скорости частиц жидкости от времени при различных значениях физических параметров, входящих в исследуемую систему.

Ключевые слова: стратифицированная вращающаяся жидкость, системы уравнений динамики жидкости, асимптотическое поведение, главные члены асимптотик

MATHEMATICAL MODELING OF SMALL INTERNAL MOTIONS IN NONVISCOUS INCOMPRESSIBLE STRATIFIED LIQUID

Sviridova E.N.

Military Educational and Scientific Center of the Air Force «N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin Air Force Academy», Voronezh, e-mail: sviridova.e.n@mail.ru

The two-dimensional small internal motions of the nonviscous incompressible stratified liquid are investigated. The liquid rotates uniformly around the vertical axis. Mathematical model of this physical process is a closed system of partial differential equations, consisting of equations of hydrodynamics, in which the Coriolis force and gravitational forces are taken into account. It is assumed that the liquid density function changes in the direction of the gravitational field according to the exponential law. This leads to the conclusion that the Brunt-Väisälä frequency is constant for the problem under consideration. Oscillations that take into account the Coriolis force and gravitational forces are called gravity-gyroscopic waves. Equations are presented in a coordinate system rotating together with a fluid. The angular velocity of rotation is constant. The system of equations is completed by necessary initial and boundary conditions. The dominant terms of the asymptotic form of the velocity vector components are obtained. The influence of various physical parameters on the asymptotic form of the velocity vector components are analyzed. Graphs of the dominant terms of the asymptotic form of the velocity vector components against time at varying values of the different physical parameters are given.

Keywords: stratified rotating liquid, fluid dynamic equations, asymptotic behavior, dominant terms of the asymptotic forms

Работа посвящена исследованию линейной задачи нестационарной теории внутренних волн, распространяющихся в стратифицированной жидкости.

Задачи о распространении внутренних волн и колебаний в стратифицированных жидкостях представляют собой большой интерес, а исследования в этой области имеют высокое практическое значение, так как позволяют прогнозировать и понимать природу обширного круга явлений, связанных с проблемами океана, физики атмосферы и геофизики.

Стратифицированной называется жидкость, у которой изменение физических свойств в стационарном состоянии происходит лишь в конкретном направлении. То есть функции, определяющие физические характеристики такой жидкости в стационарном состоянии, будут зависеть только от одной пространственной переменной. При этом свойства могут изменяться непрерывно либо скачкообразно.

Будем рассматривать стратификацию жидкости, вызванную силой тяжести. Распределение частиц, солей и взвешенных суспензий, создаваемое в жидкости этой силой, будет сопровождаться неоднородностью плотности жидкости в направлении гравитационного поля.

Постановка задачи

Рассмотрим движение невязкой несжимаемой стратифицированной жидкости, находящейся в состоянии равномерного вращения вокруг вертикальной оси. Введем декартову систему координат (x_1, x_2, x_3), вращающуюся вместе с жидкостью, причем ось Ox_3 направим вдоль оси вращения. Относительно этой системы невозмущенная жидкость является покоящейся. Малые движения этой жидкости в поле сил тяжести в отсутствие других внешних сил принято описывать следующей системой уравнений [1]:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho_0 \left[\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{V}\right] + grad\, p + \rho_1 g \mathbf{e_3} = 0, & (1.1) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\rho_1 - \omega_0^2(x_3)(\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{V})\rho_0 g^{-1} = 0, & (1.2) \\ div\, \mathbf{V} = 0, & (1.3) \\ \rho_0 = \rho_0(x_3), & (1.4) \end{cases}$$

где $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ – вектор скорости частиц жидкости; $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, \alpha)$ – вектор Кориолиса (α – удвоенная частота вращения); $\rho_1(x, t)$ – изменение плотности, вызванное движениями жидкости; p – динамическое давление; $\mathbf{e_3}$ – орт оси Ox_3; g – ускорение свободного падения. Вектор $g\mathbf{e_3}$ представляет из себя вектор ускорения свободного падения, включающий только гравитационную составляющую, тогда как составляющей, вызванной наличием центробежного ускорения, можно пренебречь [1]. Через $\omega_0^2(x_3)$ обозначен квадрат частоты Вейсяля – Брента, определяемый формулой

$$\omega_0^2(x_3) = -g\rho_0'(x_3)/\rho_0(x_3). \qquad (2)$$

Частота Вейсяля – Брента $\omega_0(x_3)$ является важнейшей характеристикой динамических свойств стратифицированной жидкости. Предполагается, что распределение плотности жидкости $\rho_0(x_3)$ удовлетворяет естественному физическому условию устойчивости стратификации: $\rho_0'(x_3) \le 0$. Стационарная плотность жидкости считается зависящей лишь от переменной x_3 [1].

В системе (1) уравнение (1.1) представляет собой закон сохранения импульса; уравнения (1.2) и (1.3) следуют из уравнения неразрывности сплошной среды и предположения о несжимаемости жидкости. Предположение о несжимаемости приводит к уравнению

$$div\, \mathbf{V} = 0,$$

а уравнение неразрывности, имеющее в линейном приближении вид

$$\partial\rho_1/\partial t + div(\rho_0 \mathbf{V}) = 0,$$

будучи переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + (\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{V})\rho_0'(x_3) + \rho_0(x_3)\, div\, \mathbf{V} = 0,$$

с учетом (1.3) приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_1 + (\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{V})\rho_0'(x_3) = 0,$$

которое с учетом представления (2) для частоты Вейсяля – Брента может быть переписано в виде (1.2).

Колебания, описываемые системой (1), которые учитывают силу Кориолиса и гравитационные силы, называются гравитационно-гироскопическими волнами [1–3].

Если рассмотреть явное выражение для частоты Вейсяля – Брента через стационарное распределение плотности (2), то легко видеть, что эта частота будет постоянной в случае, когда функция $\rho_0(x_3)$ является экспоненциальной, то есть $\rho_0(x_3) = A\exp(-2\beta x_3)$, где A, β – положительные константы. Практическая важность рассмотрения этого случая обусловлена тем, что распределение плотности по экспоненциальному закону является больцмановским распределением в однородном поле сил тяжести и тем самым оказывается одним из наиболее часто встречающихся в физике распределений.

Далее будем изучать систему (1) с учетом экспоненциальной стратификации жидкости и, как следствие, постоянства частоты Вейсяля – Брента:

$$\omega_0^2 = 2\beta g. \qquad (3)$$

Будем рассматривать двумерные движения вращающейся стратифицированной жидкости, то есть такие движения, которые описываются функциями $\mathbf{V}$ и p, не зависящими от одной из пространственных переменных x_1 или x_2, например, от переменной x_2 [1, 4]. Система (1) для таких движений с учетом (3) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial x_1} p = 0, \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{1}{\rho_0(x_3)}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial x_3} p = 0, \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь мы уже исключили функцию ρ_1.

Из физических и геометрических соображений ясно, что нетривиальные двумерные движения могут происходить лишь в областях типа цилиндров, то есть в областях вида $\{(x_1,x_2,x_3)\in\Omega\times\mathbb{R}:\ (x_1,x_3)\in\Omega,\ x_2\in\mathbb{R}\}$. Здесь (x_1,x_2,x_3) – вращающаяся система координат.

С помощью замены $\sigma = p\rho_0^{-1}(x_3) = A^{-1}p\,e^{2\beta x_3}$ приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial t} - \alpha V_2 + \dfrac{\partial \sigma}{\partial x_1} = 0; \\ \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \alpha V_1 = 0; \\ \dfrac{\partial^2 V_3}{\partial t^2} + \omega_0^2 V_3 + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x_3} - 2\beta\sigma\right) = 0; \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Система (4) дополняется следующими начальными и граничными условиями:

$$V_k(x,0)=0,\ k=1,2,3,\ \frac{\partial V_3}{\partial t}(x,0)=0,\ \sigma(x,0)=0,\ V_3(x_1,x_3,t)\big|_{x_3=0} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x_1,t). \tag{6}$$

Замечание 1. Граничное условие обусловлено существованием функции тока $\Psi=\Psi(x_1,x_3,t)$ (см., например, [1]), которую можно связать с компонентами вектора скорости частиц следующим соотношением: $\{V_1,V_3\}=\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_3},-\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right\}$.

Предполагается, что функция $\psi(x_1, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

Условие 1. При некотором $\delta>0$ равномерно по $x_1\in\mathbb{R}$ справедлива оценка $|\psi(x_1,t)|\le c\exp(-\delta t),\ t\to+\infty$.

Условие 2. В $L_1(\mathbb{R}\times(0;\infty))$ существуют следующие производные функции $\psi(x_1, t)$: $\chi_n(x_1,t)=\left(1-\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)^n\psi(x_1,t),\ n=2,3,4$.

Условие 3. Имеет место оценка $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x_1|)|\psi_1(x_1,t)|dx<\infty$.

Условие 4. Функция $\psi(x_1,t)$ финитна: $\psi(x_1,t)=0$ при $t>N$.

В работах [5, 6] доказано существование решения задачи (5)–(6) в пространствах интегрируемых функций С.Л. Соболева и выписано два члена асимптотических разложений компонент решения задачи при $t\to\infty$.

Явные представления для главных членов асимптотик компонент вектора скорости

В данной статье проводится исследование зависимости главных членов асимптотик компонент вектора скорости $\mathbf{V}=(V_1,V_2,V_3)$ от времени *t* при разных значениях физических параметров, входящих в систему (5). Непосредственно из работ [5, 6] следует справедливость теоремы о представлениях главных членов асимптотик компонент вектора скорости задачи (5)–(6):

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1, 2, 3, 4. Тогда при $t\to+\infty$ главные члены асимптотик компонент вектора скорости решения задачи (5)–(6) с точностью до постоянного множителя определяются следующими соотношениями:

$$V_1^{main}(x_3,t)=\frac{\alpha^{0.5}\exp(\beta x_3)}{\pi^{1.5}(\omega_0^2-\alpha^2)^{0.5}}\left(\frac{2^{0.5}}{x_3}-\frac{\beta}{2^{0.5}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\alpha\right)t^{-3/2};$$

$$V_2^{main}(x,t)=\alpha\beta\exp(\beta x_3)F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\hat\psi(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right]-$$

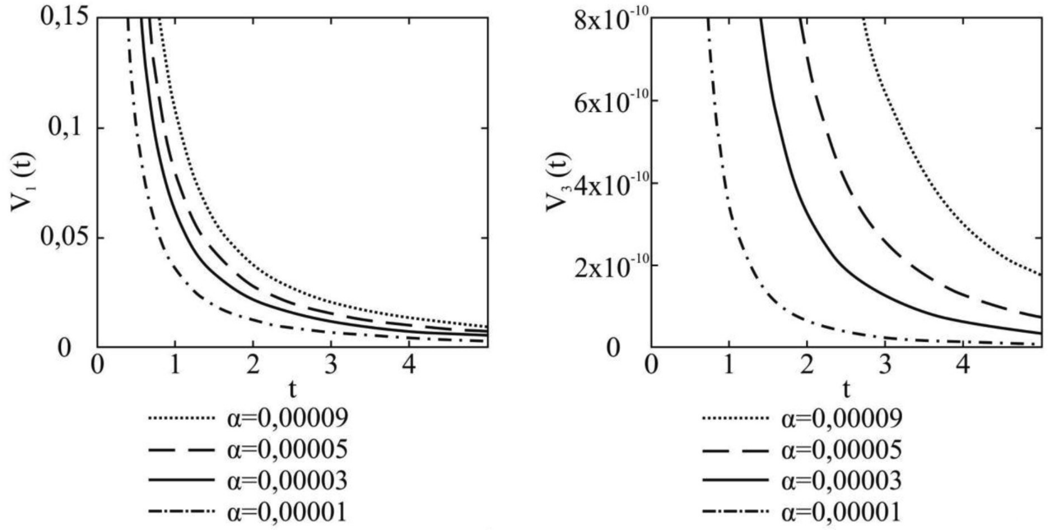
$$-\alpha\exp(\beta x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}F^{-1}_{s_1\to x_1}\left[\hat\psi(s_1,0)\exp\left(-x_3\sqrt{s_1^2+\beta^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{\alpha^{0.5}2^{0.5}\exp(\beta x_3)}{\pi^{1.5}(\omega_0^2-\alpha^2)^{0.5}}\left(\beta-\frac{1}{x_3}\right)\sin\left(t\alpha-\frac{\pi}{4}\right)t^{-3/2};$$

$$V_3^{main}(x_3,t) = \frac{3\beta^2 \exp(\beta x_3)\alpha^{1.5}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - t\alpha\right)}{\sqrt{2}\pi^{1.5}x_3^2\left(\omega_0^2-\alpha^2\right)^{1.5}} t^{-5/2},$$

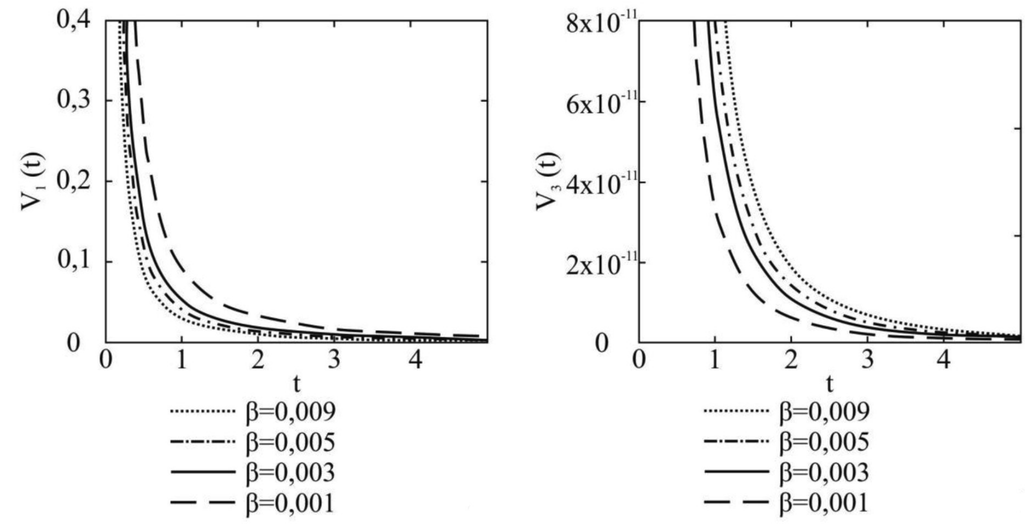
где $\widehat{\psi}(s_1,0) = F_{x_1 \to s_1}\left[\psi(x_1,0)\right]$ – частичное преобразование Фурье по переменной x_1; $F^{-1}_{s_1 \to x_1}$ – обратное частичное преобразование Фурье.

Заметим, что компонента $V_2^{main}(x,t)$ имеет стационарный, не зависящий от времени главный член асимптотики, поэтому для нее приведены два члена асимптотического разложения.



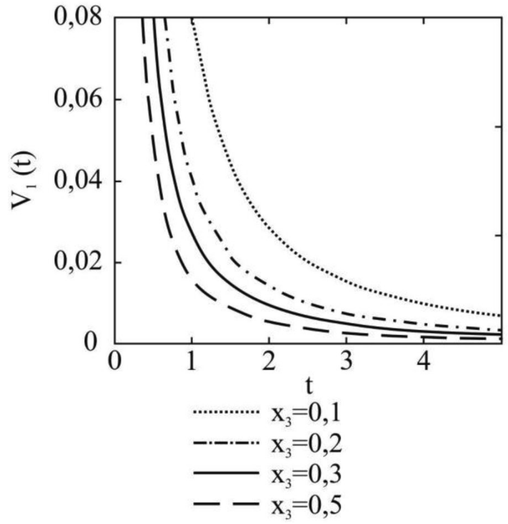
а) *б)*

Рис. 1. Зависимости главных членов асимптотик (а) компоненты V_1, (б) компоненты V_3 от времени при различных значениях частоты вращения жидкости α при фиксированных значениях параметра стратификации β и переменной x_3

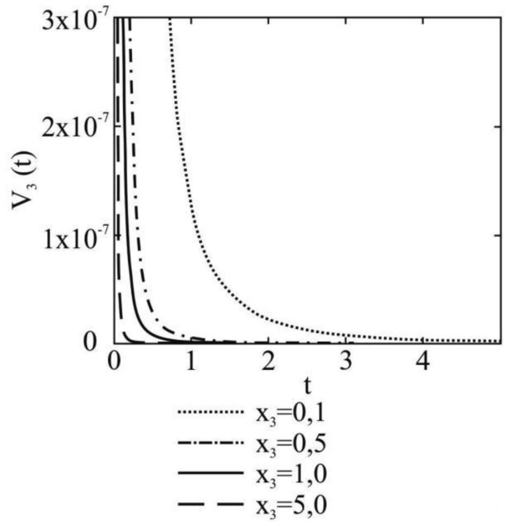


а) *б)*

Рис. 2. Зависимости главных членов асимптотик (а) компоненты V_1, (б) компоненты V_3 от времени при различных значениях параметра стратификации β при фиксированных значениях частоты вращения жидкости α и переменной x_3



а)



б)

Рис. 3. Зависимости главных членов асимптотик (а) компоненты V_1, (б) компоненты V_3 от времени при различных значениях переменной x_3 при фиксированных значениях частоты вращения жидкости α и параметра стратификации β

Анализ влияния различных физических параметров на асимптотики компонент вектора скорости

На рис. 1–3 представлены зависимости главных членов асимптотик компонент V_1, V_3 вектора скорости от времени при различных значениях физических параметров.

Выводы

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1) в рамках рассмотренной модели во всех случаях наблюдается естественное затухание колебаний жидкости с течением времени;

2) увеличение параметра частоты вращения жидкости α приводит к росту значений $V_1(t)$, $V_3(t)$ при фиксированном времени;

3) увеличение параметра стратификации β приводит к уменьшению значения $V_1(t)$ и к увеличению значения $V_3(t)$ при фиксированном времени;

4) увеличение параметра x_3 приводит к уменьшению значений $V_1(t)$, $V_3(t)$ при фиксированном времени.

Список литературы

1. Габов С.А. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн / С.А. Габов, А.Г. Свешников. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. – 344 с.

2. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды / А.А. Ильюшин. – М.: Ленанд, 2014. – 320 с.

3. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics / J. Pedlosky. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. – 260 p.

4. Перова Л.В. О колебаниях в стратифицированной и вращающейся жидкости, возбуждаемой плоской, бегущей по дну волной / Л.В. Перова, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2000. – № 1. – С. 136–143.

5. Свиридова Е.Н. Асимптотика при $t \to \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 1 / Е.Н. Свиридова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2009. – №1. – С. 150–158.

6. Свиридова Е.Н. Асимптотика при $t \to \infty$ компонент решения задачи о малых колебаниях вращающейся стратифицированной жидкости в полупространстве. Часть 2 / Е.Н. Свиридова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2009. – № 2. – С. 101–111.