

УДК 62-2:534.01

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРА С ГАСИТЕЛЕМ

**Сафина Г.Ф.***ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», Нефтекамский филиал, Нефтекамск,  
e-mail: safinagf@mail.ru*

Рассмотрена прямая спектральная задача определения частот свободных колебаний ротора с гироскопическим гасителем. Получено частотное уравнение, показывающее, что колебательный процесс является четырехчастотным. По решению прямой задачи проведено исследование влияния физических параметров ротора с гасителем на значения частот его свободных колебаний. Получено, что при увеличении значений частот колебаний коэффициенты жесткостей опор ротора с гасителем увеличиваются, а массовые характеристики, наоборот, – уменьшаются. Впервые для рассматриваемой задачи поставлена и решена обратная спектральная задача – задача восстановления параметров ротора с гасителем по известным частотам его свободных колебаний. Исследование проведено на примере диагностирования коэффициентов жесткостей опор ротора с гасителем. Поставлен вопрос о существовании решения задачи. Сформулирована и доказана теорема о единственности решения поставленной обратной задачи. Получен алгоритм решения задачи, позволяющий восстанавливать коэффициенты жесткостей опор ротора с гасителем по известным значениям трех частот его колебаний. Алгоритм сведен к решению двух систем нелинейных уравнений относительно искомых коэффициентов жесткостей с последующим выделением единственного общего вещественного решения систем уравнений. Приведены примеры применения алгоритма решения обратной задачи. Для прямой и обратной задач составлены программные реализации алгоритмов решений, использующие команды математического пакета.

**Ключевые слова:** собственные частоты, свободные колебания, ротор с гасителем, жесткость опор ротора с гасителем, акустическая диагностика механических систем

## STUDIES OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS FREE OSCILLATIONS OF THE ROTOR WITH DAMPER

**Safina G.F.***Bashkir State University, Neftekamsk branch, Neftekamsk, e-mail: safinagf@mail.ru*

The direct spectral task of determination of free oscillation frequencies of a rotor with the gyroscopic killer is considered. The frequency equation showing that oscillatory process is the four-frequency is received. According to the decision of the direct task the research of influence of physical parameters of a rotor with the killer on values of frequencies of its free oscillations is conducted. It is received that in case of increase in values of oscillation frequencies coefficients of rigidities of support of a rotor with the killer increase, and mass characteristics, on the contrary, – decrease. For the first time for the considered task the reverse spectral task – the task of restoration of parameters of a rotor with the killer on the known frequencies of its free oscillations is set and solved. The research is conducted on the example of diagnosing of coefficients of rigidities of support of a rotor with the killer. The question of existence of the decision of the task is raised. The theorem of uniqueness of the decision of the set reverse task is formulated and proved. The algorithm of the decision of the task allowing to recover coefficients of rigidities of support of a rotor with the killer on the known values of three frequencies of its oscillations is received. The algorithm is reduced to the solution of two systems of the non-linear equations of rather required coefficients of rigidities with the subsequent separation of the single common material decision of systems of equations. Examples of application of an algorithm of the decision of the reverse task are given. For direct and reverse tasks the program implementations of algorithms of decisions using commands of a mathematical packet are made.

**Keywords:** natural frequencies, the free oscillations, a rotor with the killer, rigidness of support of a rotor with the killer, acoustic diagnostics of mechanical systems

К вопросам свободных колебаний механических конструкций разнообразных назначений и технической их диагностике привлечено внимание многих исследователей, в том числе в работах [1–3]. Представленная здесь работа по колебаниям ротора с гасителем продолжает подобные исследования и относится к области акустической диагностики механических систем [4, 5].

Прямая задача по свободным колебаниям ротора с гироскопическим виброгасителем рассмотрена в работах [6, 7]. В отличие от них, в данной работе по решению прямой

задачи проведены исследования зависимостей частот колебаний от физических параметров ротора. Исследована также обратная спектральная задача на примере определения жесткостей опор ротора с виброгасителем. Доказана единственность решения обратной задачи и представлен алгоритм решения по известным значениям трех частот колебаний ротора.

*Прямая задача определения частот свободных колебаний ротора с гасителем*

Приведем некоторые теоретические сведения по прямой задаче. Ротор с виброгаси-

телем [6] (рисунок) состоит из консольного участка оправки 1 и маховика 2. Имеются системы координат:  $x_0y_0z_0$  – неподвижна,  $x_1y_1z_1$  – движется поступательно вместе с центром масс,  $xuz$  – вращается вместе с ротором вокруг точки  $C$  относительно системы  $x_1y_1z_1$ . В данной схеме:  $C$  – центр масс;  $A_0B_0 = L$  – расстояние между опорами;  $\alpha$  – угол между осью вала  $z$  и проекцией на плоскость  $x_1z_1$ ;  $\beta$  – угол между осью вала  $z$  и проекцией на плоскость  $x_1z_1$ ;  $c_1$  и  $c_2$  – постоянные коэффициенты жесткостей опор

$A_0$  и  $B_0$  ротора по всем приведенным направлениям.

Действие виброгасителя учитывает гироскопический эффект, возникающий при перемещении оси вращения  $z_0$  вала оправки 1 за счет ее колебаний в направлении  $z$ .

За обобщенные координаты приняты координаты точки  $C$  ( $x_C = x, y_C = y$ ) и угловые координаты  $\alpha$  и  $\beta$ . Перемещения оси вращающегося ротора в положения, соответствующим проекциям  $A_xB_x$  и  $A_yB_y$ , приводят к зависимостям [6]:

$$\left. \begin{aligned} x_A = A_0A_x = x - L_1 \sin \beta = x - L_1 \beta; & \quad y_A = A_0A_y = y + L_1 \sin \alpha = y + L_1 \alpha; \\ x_B = B_0B_x = x + L_2 \sin \beta = x + L_2 \beta; & \quad y_B = B_0B_y = y - L_2 \sin \alpha = y - L_2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В равенствах (1) ввиду малости углов  $\alpha$  и  $\beta$  принимаем  $\sin \alpha = \alpha$ ;  $\sin \beta = \beta$ .

Для рассматриваемой механической системы с четырьмя степенями свободы уравнения Лагранжа имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0; & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = 0; & \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} - \frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $T$  и  $\Pi$  – функции кинетической и потенциальной энергии ротора [6]:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{1}{2} J_z u^2 (\omega^2 + 2\omega\beta\dot{\alpha}) + \frac{1}{2} J_e (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2),$$

$$\Pi = \frac{c_1}{2} [(x - L_1\beta)^2 + (y + L_1\alpha)^2] + \frac{c_2}{2} [(x + L_2\beta)^2 + (y - L_2\alpha)^2],$$

где  $m$  – масса ротора,  $J_e = J_x = J_y, J_z$  – центральные моменты инерции,  $\dot{\gamma} = \omega$  – угловая скорость вращения ротора вокруг оси  $z$ .

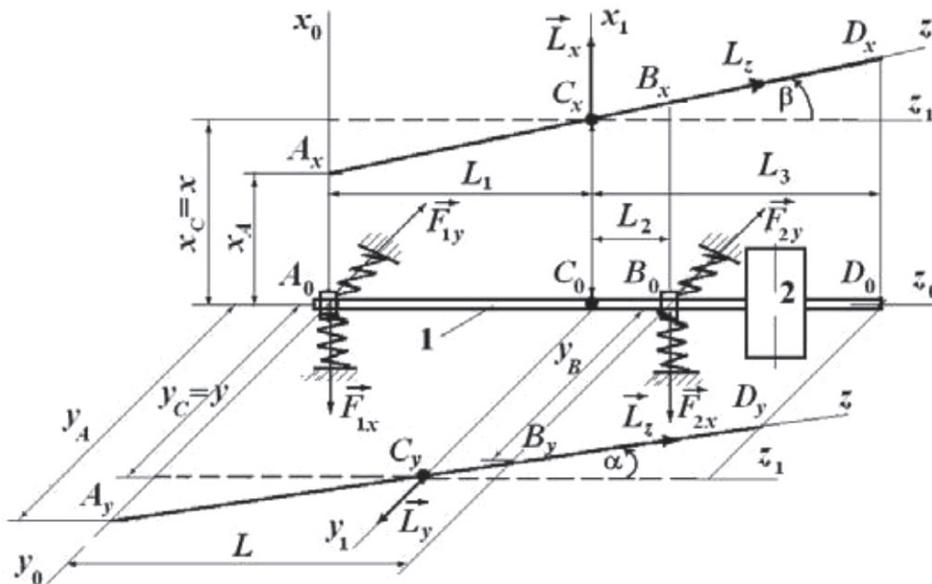


Схема оправки с виброгасителем: 1 – вал оправки (ротор), 2 – маховик

Тогда уравнения (2) с учетом выражений функций  $T$  и  $\Pi$  примут вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x - (c_1L_1 - c_2L_2)\beta &= 0; \\ m\ddot{y} + (c_1 + c_2)y + (c_1L_1 - c_2L_2)\alpha &= 0; \\ J_e\ddot{\alpha} + J_z u^2 \omega \dot{\beta} + (c_1L_1^2 + c_2L_2^2)\alpha + (c_1L_1 - c_2L_2)y &= 0; \\ J_e\ddot{\beta} - J_z u^2 \omega \dot{\alpha} + (c_1L_1^2 + c_2L_2^2)\beta - (c_1L_1 - c_2L_2)x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полученные равенства (3) полностью описывают свободные колебания ротора с виброгасителем.

Учитывая, что ротор совершает свободные колебания, примем решения системы (3) в виде

$$x = M_1 \sin(pt + \varphi), \quad y = M_2 \cos(pt + \varphi), \quad \alpha = M_3 \cos(pt + \varphi), \quad \beta = M_4 \sin(pt + \varphi),$$

где  $p$  – частота,  $M_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) – амплитуды колебаний. Подставляя функции  $x, y, \alpha, \beta$  и их производные в (3) получим [7]:

$$\left\{ \begin{aligned} (c_1 + c_2 - mp^2)M_1 - (c_1L_1 - c_2L_2)M_4 &= 0; \\ (c_1 + c_2 - mp^2)M_2 + (c_1L_1 - c_2L_2)M_3 &= 0; \\ (c_1L_1^2 + c_2L_2^2 - J_e p^2)M_3 + (c_1L_1 - c_2L_2)M_2 + J_z u^2 \omega p M_4 &= 0; \\ (c_1L_1^2 + c_2L_2^2 - J_e p^2)M_4 - (c_1L_1 - c_2L_2)M_1 + J_z u^2 \omega p M_3 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Учитывая условие существования ненулевого решения [8] системы (4) относительно амплитуд  $M_i$  ( $i=1,2,3,4$ ), получим следующее частотное уравнение:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - mp^2 & 0 & 0 & c_2L_2 - c_1L_1 \\ 0 & c_1 + c_2 - mp^2 & c_1L_1 - c_2L_2 & 0 \\ 0 & c_1L_1 - c_2L_2 & c_1L_1^2 + c_2L_2^2 - J_e p^2 & J_z u^2 \omega p \\ c_2L_2 - c_1L_1 & 0 & J_z u^2 \omega p & c_1L_1^2 + c_2L_2^2 - J_e p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Раскрыв определитель (5) при известных физических параметрах ротора, находим значения частот его свободных колебаний.

Исследуем теперь влияние характеристик ротора на собственные частоты его колебаний. При этом решая прямую задачу, получим, что увеличение массовых параметров ротора ведет к уменьшению частот его колебаний. В табл. 1, например, представлена зависимость собственных частот колебаний от массы ротора при физических параметрах

$$J_e = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad u = 5,$$

$$\omega = 10000 \text{ с}^{-1}, \quad c_1 = c_2 = 5 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}},$$

$$J_z = 0,031 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad L_1 = 0,48 \text{ м}, \quad L_2 = 0,02 \text{ м}. \quad (6)$$

Подобные уменьшения всех частот колебаний наблюдаются и при увеличении значений центральных моментов  $J_e, J_z$  инерции ротора.

Исследования показывают также, что увеличение жесткостных параметров ротора с гасителем ведет к увеличению частот

его колебаний. Например, в табл. 2 приведены значения частот, соответствующие коэффициенту  $c_1$  жесткости левой опоры (при фиксированном коэффициенте  $c_2$  жесткости правой опоры) при параметрах (6) системы и массе ротора  $m = 7,5$  кг. Подобная зависимость частот колебаний от меняющихся коэффициентов жесткостей обеих опор ротора представлена в табл. 3.

Отметим также, что подобные зависимости наблюдаются и при физических параметрах ротора, отличных от (6). Проведенные исследования важны для решения проблемы сохранения безопасных частот колебаний ротора, связанных с изменением его физических параметров.

#### Обратная задача и метод ее решения

К задаче определения частот колебаний ротора с виброгасителем рассмотрим обратную задачу диагностирования его характеристик. Решение такой задачи приведем на примере определения по известным частотам колебаний коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  жесткостей опор ротора.

**Таблица 1**

Зависимость частот  $p_i$  от массы ротора при его параметрах (6)

$m, \text{ кг}$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$	$p_3, \text{ с}^{-1}$	$p_4, \text{ с}^{-1}$
7,5	79,11	1115,54	1184,47	5314,7
8	79,09	1079,31	1148,05	5278,13
8,5	79,07	1046,33	1114,91	5235,42
9	79,05	1016,14	1084,58	5199,74

**Таблица 2**

Зависимость частот  $p_i$  от жесткости  $c_1$  опоры ротора при параметрах (6)

$c_1, 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$	$p_3, \text{ с}^{-1}$	$p_4, \text{ с}^{-1}$
5	79,11	1115,54	1184,47	5314,70
6	86,08	1159,00	1250,37	5344,11
7	91,85	1199,20	1314,14	5373,46
8	96,69	1236,58	1375,97	5402,74

**Таблица 3**

Зависимость частот  $p_i$  от  $c_1$  жесткостей опор ротора при параметрах (6)

$c_1, 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$c_2, 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$p_1, \text{ с}^{-1}$	$p_2, \text{ с}^{-1}$	$p_3, \text{ с}^{-1}$	$p_4, \text{ с}^{-1}$
5	5	79,11	1115,54	1184,47	5314,70
6	6	94,58	1217,31	1300,18	5344,12
7	7	109,94	1310,08	1406,93	5373,46
8	8	125,19	1395,70	1506,58	5402,74

Для решения поставленной задачи преобразуем уравнение (7) к виду

$$\Delta(p) = Fc_1^2c_2^2 + f_1(p)c_1^2c_2 + f_2(p)c_1c_2^2 + f_3(p)c_1c_2 + f_4(p)c_1^2 + f_5(p)c_2^2 + f_6(p)c_1 + f_7(p)c_2 + f_8(p) = 0, \quad (7)$$

в котором  $F = 6L_1^2L_2^2 + 4L_1L_2^3 + 4L_1^3L_2 + L_2^4 + L_1^2$  и функции  $f_i(p)$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) выражаются через физические параметры ротора:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= -4mp^2L_1^3L_2 - 2L_2^2J_e p^2 - 2L_1^2J_e p^2 - 2mp^2L_1^4 - 2mp^2L_1^2L_2^2 - 4L_1L_2J_e p^2, \\ f_2(p) &= -2mp^2L_1^2L_2^2 - 4mp^2L_1L_2^3 - 4L_1L_2J_e p^2 - 2L_2^2J_e p^2 - 2L_1^2J_e p^2 - 2m^2p^2L_2^4, \\ f_3(p) &= 4mp^4L_2^2J_e + 4mp^4L_1L_2J_e + 4mp^4L_1^2J_e + 2J_e^2p^4 - 2J_z^2\omega^2p^2u^2 + 2m^2p^4L_1^2L_2^2, \\ f_4(p) &= -J_z^2\omega^2p^2u^2 + m^2p^4L_1^4 + 2mp^4L_1^2J_e + J_e^2p^4, \\ f_5(p) &= J_e^2p^4 + m^2p^4L_2^4 + 2mp^4L_2^2J_e - J_z^2\omega^2p^2u^2, \\ f_6(p) &= 2mp^4J_z^2\omega^2u^4 - 2mp^6J_e^2 - 2m^2p^6L_1^2J_e, \\ f_7(p) &= 2mp^4J_z^2\omega^2u^4 - 2mp^6J_e^2 - 2m^2p^6L_2^2J_e, \\ f_8(p) &= m^2p^8J_e^2 - 2m^2p^6J_z^2\omega^2u^4. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим сначала вопрос о существовании решения задачи. Задачу с частотным уравнением (7) обозначим через  $L$ , а задачу с такими же физическими параметрами (функциями (8)) и подобным частотным уравнением

$$\begin{aligned} \Delta'(p) = & Fc_1'^2c_2'^2 + f_1(p)c_1'^2c_2' + \\ & + f_2(p)c_1'c_2'^2 + f_3(p)c_1'c_2' + f_4(p)c_1'^2 + \\ & f_5(p)c_2'^2 + f_6(p)c_1' + f_7(p)c_2' + f_7(p) = 0, \end{aligned}$$

но с другими коэффициентами  $c_1'$  и  $c_2'$  жесткостей опор ротора обозначим через  $L'$ . Тогда можно показать справедливость следующей теоремы о единственности решения поставленной обратной задачи.

**Теорема.** Если частотные уравнения  $\Delta(p)$  и  $\Delta'(p)$  задач  $L$  и  $L'$  имеют вещественные корни (собственные частоты), совпадающие с учетом их кратностей, то выполняются равенства:  $c_1 = c_1'$ ,  $c_2 = c_2'$ .

**Доказательство.** Очевидно, что вещественные корни уравнения (7) и являются

собственными частотами спектральной задачи  $L$ . Причем частотное уравнение (7) является целой функцией от параметра  $p$ . Численными методами с помощью команд пакета Maple несложно показать, что функции (8) являются линейно независимыми.

Так как  $\Delta(p)$  и  $\Delta'(p)$  – целые функции, отличные от нуля, то по теореме Адамара [8] они восстанавливаются по параметру  $p$  с точностью до постоянного множителя  $K$ :  $\Delta(p) - K\Delta'(p) \equiv 0$ . Из последнего равенства и линейной независимости функций (8) получаем, что  $K = 1$ , откуда:  $c_1 = c_1'$ ,  $c_2 = c_2'$ . Теорема доказана.

Из теоремы следует, что коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  жесткостей опор ротора можно определить по известным собственным частотам колебаний единственным образом.

Построим теперь метод нахождения жесткостей  $c_1$ ,  $c_2$  опор ротора. Пусть даны три собственные частоты  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . Подставив их в уравнение (9), имеем следующие системы нелинейных относительно искомым параметров  $c_1$ ,  $c_2$  уравнений

$$\begin{cases} Fc_1^2c_2^2 + f_1(p_1)c_1^2c_2 + f_2(p_1)c_1c_2^2 + f_3(p_1)c_1c_2 + f_4(p_1)c_1^2 + f_5(p_1)c_2^2 + f_6(p_1)c_1 + f_7(p_1)c_2 + f_8(p_1) = 0; \\ Fc_1^2c_2^2 + f_1(p_2)c_1^2c_2 + f_2(p_2)c_1c_2^2 + f_3(p_2)c_1c_2 + f_4(p_2)c_1^2 + f_5(p_2)c_2^2 + f_6(p_2)c_1 + f_7(p_2)c_2 + f_8(p_2) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} Fc_1^2c_2^2 + f_1(p_1)c_1^2c_2 + f_2(p_1)c_1c_2^2 + f_3(p_1)c_1c_2 + f_4(p_1)c_1^2 + f_5(p_1)c_2^2 + f_6(p_1)c_1 + f_7(p_1)c_2 + f_8(p_1) = 0; \\ Fc_1^2c_2^2 + f_1(p_3)c_1^2c_2 + f_2(p_3)c_1c_2^2 + f_3(p_3)c_1c_2 + f_4(p_3)c_1^2 + f_5(p_3)c_2^2 + f_6(p_3)c_1 + f_7(p_3)c_2 + f_8(p_3) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решив (11) и (12), получим несколько наборов вещественных решений каждой из систем. Общее единственное решение этих систем и будет искомым набором значений  $(c_1, c_2)$ .

**Пример.** Определить коэффициенты жесткостей опор ротора с гасителем при известных значениях трех частот колебаний  $p_1 = 79,11c^{-1}$ ,  $p_2 = 1115,54c^{-1}$ ,  $p_3 = 1184,47c^{-1}$  и следующих физических параметрах механической системы:  $J = 1,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $m = 7,5 \text{ кг}$ ,  $\omega = 10000c^{-1}$ ,  $u = 5$ ,  $J_z = 0,031 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $L_1 = 0,48 \text{ м}$ ,  $L_2 = 0,02 \text{ м}$ .

Решение. Подставляя заданные физические параметры ротора в (8) при частотах  $p_1$  и  $p_2$ , получим, что система (11) имеет вещественные решения (найденные с помощью программы в командах математического пакета Maple):

$$(c_1 = 0,5000 \cdot 10^7; c_2 = 0,5000 \cdot 10^7),$$

$$(c_1 = 0,6056 \cdot 10^7; c_2 = 0,4365 \cdot 10^7).$$

Система (12) при частотах  $p_1$ ,  $p_3$  и функциях (8) имеет при этом решения, имеющие физический смысл:

$$(c_1 = 0,5000 \cdot 10^7; c_2 = 0,5000 \cdot 10^7),$$

$$(c_1 = 0,3869 \cdot 10^7; c_2 = 0,7023 \cdot 10^7),$$

$$(c_1 = 0,4502 \cdot 10^7; c_2 = 0,5610 \cdot 10^7),$$

$$(c_1 = 0,9028 \cdot 10^7; c_2 = 0,348 \cdot 10^7).$$

Сравнивая полученные решения двух систем уравнений, видим, что общим для них является лишь один набор переменных  $(c_1 = 0,5 \cdot 10^7; c_2 = 0,5 \cdot 10^7)$ , который и будет искомым. Значит, коэффициенты жесткостей опор равны:  $c_1 = c_2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ . Заметим, что по решению прямой задачи именно этим жесткостям опор соответствуют заданные значения собственных частот колебаний ротора с гасителем.

#### Заключение

В представленной работе по решению прямой задачи свободных колебаний ротора с гироскопическим гасителем исследовано влияние на частоты колебаний его физических параметров. Впервые поставлена и решена обратная спектральная задача – зада-

ча диагностирования характеристик ротора с гасителем по известным частотам его свободных колебаний. Доказана теорема о единственности решения поставленной задачи диагностирования. Найден метод решения задачи, который сводится к решению двух систем нелинейных уравнений при известных значениях трех частот колебаний ротора. Практическая значимость результатов состоит в возможности по найденному алгоритму определения и других характеристик (например, массовых) ротора с гасителем по его шуму. Кроме того, метод решения исследованной задачи можно применить при акустическом диагностировании характеристик и (или) условий закрепления других механических систем и их составляющих в виде роторов, валов, стержней и т.д.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Башкортостан в рамках научного проекта № 17-41-020230-р\_а.*

### Список литературы

1. Александров А.В. Строительная механика. Динамика и устойчивость упругих систем: учеб. пособие для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Зылев; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с.
2. Гладвел Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. – 608 с.
3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
4. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.
5. Сафина Г.Ф. Метод определения характеристик тонкостенной круговой цилиндрической оболочки // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 3. – С. 72–76.
6. Гутьер С.С., Яглинский В.П., Моргун Ю.Б. Частотный анализ свободных колебаний инструментальной оправки с гироскопическим виброгасителем. – М.: СевНТУ, 2009. – С. 181–183.
7. Новиков А.В., Сафина Г.Ф. Идентификация характеристик ротора с гироскопическим виброгасителем // Физическое образование в вузах. – 2015. – Т. 221, № 1С. – С. 70–72.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.