УДК 62-192:621:51-7

ФУНКЦИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАРАБОТОК ЭЛЕМЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАК СМЕСЬ *n* ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вайнштейн В.И.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, e-mail: VVaynshtyayn@sfu-kras.ru

В работе получено представление в виде степенных рядов функции восстановления (среднего числа отказов на промежутке от 0 до t) простого процесса восстановления, когда наработки до отказа восстанавливаемых (заменяемых) элементов распределены в виде смеси n функций распределения. При решении многих практических задач, возникающих при эксплуатации технических систем, у которых отказы имеют случайный характер, важное значение имеет знание функции восстановления – математического ожидания числа отказов за любое время от начала эксплуатации. Рассматриваются случаи смесей, состоящих из n характерных для теории надежности технических систем распределений Вейбулла – Гнеденко, Эрланга, Рэлея, нормальных, Максвелла соответственно. Указанные классические распределения не более чем одномодальны, что сужает их приложение в решении практических задач надежности технических систем. Смесь распределений позволяет описывать наработки элементов технических систем с полимодальными распределениями. Целью работы является представление функций восстановления для смесей ряда классических законов распределений наработок до отказа восстанавливаемых элементов. Полученные в работе функции восстановления расширяют сферу применения методов теории надежности при решении практических задач эксплуатации технических систем.

Ключевые слова: распределение, смесь функций распределения, процесс и стратегии восстановления

RECOVERY FUNCTIONS OF ELEMENTS OF TECHNICAL SYSTEMS WHICH OPERATION TIME DISTRIBUTION IS A MIXTURE OF *n* FUNCTIONS DISTRIBUTIONS

Vaynshteyn V.I.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, e-mail: VVaynshtyayn@sfu-kras.ru

In paper obtained a representation in the form of power series of the recovery function (the average number of failures in the interval from 0 to t) of a simple recovery process, when the operating time to failure of the elements being recovered (replaced) is distributed as a mixture of n distribution functions. The paper considers the cases of mixtures consisting of the technical systems of Weibull-Gnedenko, Erlang, Rayleigh, normal, and Maxwell distributions typical of the reliability theory. These classical distributions are not more than one-dimensional. A mixture of distributions allows to describe the developments of elements of technical systems with multimodal distributions. The aim of the paper is to represent the recovery functions for mixtures of a number of classical laws of distributions of developments. The recovery functions in the work expand the sphere of application of the methods of reliability theory in solving practical problems of operating technical systems.

Keywords: distribution function, of a mixture of distribution functions, process and recovery strategy

Наряду со случайной наработкой элемента (системы) до отказа и ее функции распределения, важное значение в теории надежности технических систем имеет функция восстановления (математическое ожидание числа отказов за время от 0 до t). Следует отметить значение функции восстановления при выборе и оптимизации стратегий эксплуатации, где, например, наряду с аварийными восстановлениями проводятся профилактические [1–3].

Простым (обычным) процессом восстановления называется последовательность неотрицательных взаимно независимых случайных величин X_i – наработок элементов от i –1-го до i-го отказа, имеющих одну и ту же функцию распределения $F(t)$ [4, 5].

Функция восстановления $H(t)$ простого процесса восстановления определяется по формуле

$$H(t) = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t), \qquad (1)$$

где $F^{(k)}(t)$ – к-кратная свертка функции распределения $F(t)$:

$$F^{(1)}(t) = F(t), F^{(k)}(t) =$$

$$= (F^{(k-1)} * F)(t) = \int_0^t F^{(k-1)}(t-x)dF(x),$$

или как решение интегрального уравнения [1, 3, 4]

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-x)dF(x). \qquad (2)$$

Для многих известных законов распределения наработок элементов технических систем, например экспоненциального, Вейбулла – Гнеденко, Эрланга, нормального, Максвелла и др., функция восстановления получена в явном виде или выписана в виде степенных рядов [1, 4]. Отметим, что плотности распределений этих и многих других известных законов не более чем одномодальны. Это сужает их приложение в решении практических задач надежности технических систем.

Смесь распределений позволяет получать бимодальные (двухвершинные) и даже полимодальные плотности [4].

Интенсивность отказов смеси экспоненциальных распределений имеет период приработочных отказов, и с увеличением продолжительности работы интенсивность становится практически постоянной [6]. Это существенно отличает смесь экспоненциальных распределений от одного экспоненциального распределения. При экспоненциальном распределении интенсивность отказов постоянна – период приработки, так важный и характерный в начальный период работы многих технических систем, отсутствует.

Целью работы является нахождение функций восстановления, когда наработки восстанавливаемых элементов распределены в виде смесей указанных выше законов распределения. Работа представляет собой продолжение исследований, начатых в [4, 6].

Нахождение функций восстановления

Пусть случайные наработки, образующие процесс восстановления, распределены как смесь n функций распределения $F_i(t)$:

$$F(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i(t), \lambda_i \geq 0, \sum_{i}^{n}\lambda_i = 1.$$

Для этого случая формула (1) принимает вид

$$H(t)=\sum_{k=1}^{\infty}F^{(k)}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i F_i\right)^{(k)}(t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\ldots i_n!}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\ldots\lambda_n^{i_n}(F_1^{(i_1)}*F_2^{(i_2)}*\ldots*F_n^{(i_n)})(t).$$

Здесь использована формула

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^k=\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\ldots i_n!}a_1^{i_1}a_2^{i_2}\ldots a_n^{i_n}.$$

Суммирование ведется по целым неотрицательным $i_1, i_2, \ldots, i_n$, таковым, что $i_1+i_2+\ldots+i_n=k$.

Функция восстановления при смеси нормальных распределений

$$F_i(t)=\Phi\left(\frac{t-\mu_i}{\sigma_i}\right), \Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Учитывая, что распределение суммы n независимых случайных величин определяется n-кратной сверткой их функций распределения и что сумма независимых нормально распределенных случайных величин также распределена по нормальному закону, причем математические ожидания и дисперсии суммируются, имеем

$$F_i^{(j)}(t)=\Phi\left(\frac{t-j\mu_i}{\sigma_i\sqrt{j}}\right), \quad (F_1^{(i_1)}*F_2^{(i_2)}*\ldots*F_n^{(i_n)})(t)=\Phi\left(\frac{t-\sum_{j=1}^{n}i_j\mu_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 i_j}}\right).$$

Таким образом:

$$H(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k}\frac{k!\prod_{j=1}^{n}\lambda_j^{i_j}}{\prod_{j=1}^{n}i_j!}, \Phi\left(\frac{t-\sum_{j=1}^{n}i_j\mu_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2 i_j}}\right).$$

Функция восстановления при $n = 2$ получена в [4]:

$$H(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\lambda^{k-j}(1-\lambda)^j\,\Phi\left(\frac{t-((k-j)\mu_1+j\mu_2)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sigma_1^2(k-j)+\sigma_2^2 j}}\right),0<\lambda<1,$$

где $C_k^j=\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$ – количество сочетаний из k элементов по j.

Далее функция восстановления при других законах распределения будет найдена в виде рядов как решение интегрального уравнения (2).

Рассмотрим подробное изложение для случая смеси распределений Вейбулла – Гнеденко. Для других распределений, рассматриваемых в работе, нахождение функции восстановления проводится аналогично.

Функция восстановления при смеси распределений Вейбулла – Гнеденко

$$f_i(t)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\gamma_i t^{\gamma_i k-1}}{\Theta_i^{\gamma k}(k-1)!},\ \ t\geq 0,\gamma_i>0,\Theta_i>0,\ \ F_i(t)=1-e^{-(\frac{t}{\Theta_i})^{\gamma_i}}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{\gamma_i k}}{\Theta_i^{\gamma_i k}k!},$$

Будем рассматривать случай $\gamma_i = \gamma$. Имеем

$$F\ (t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{t^{\gamma k}}{\Theta_i^{\gamma\,k}k!}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}t^{\gamma k}}{k!},\tag{3}$$

$$f\ (t)=\gamma\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}t^{\gamma k-1}}{(k-1)!},\ \ B_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\Theta_i^{\gamma k}}.$$

Функцию восстановления находим в виде

$$H(t)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m t^{\gamma m}.\tag{4}$$

Вычисляем интеграл $\int_0^t H(t-x)dF(x)$:

$$\int_0^t H(t-x)dF(x)=\int_0^t(\sum_{m=1}^{\infty}C_m(t-x)^{\gamma m}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}\gamma x^{\gamma k-1}}{(k-1)!})dx=$$

$$=\gamma\sum_{k=1}^{\infty}((-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}C_m\int_0^t\ (t-x)^{\gamma m}x^{\gamma k-1}dx)=$$

$$=\gamma\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}}{(k-1)!}\sum_{m=1}^{\infty}C_m\frac{\Gamma(\gamma m+1)\Gamma(\gamma k)}{\Gamma(\gamma(m+k)+1)}t^{\gamma(m+k)}=$$

$$=\gamma\sum_{s=2}^{\infty}\frac{t^{\gamma s}}{\Gamma(\gamma s+1)}\sum_{k+m=s,k\geq 1,m\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}\Gamma(\gamma m+1)\Gamma(\gamma k)}{(k-1)!}C_m=$$

$$=\gamma\sum_{s=2}^{\infty}\ \frac{t^{\gamma s}}{\Gamma(\gamma s+1)}\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}\frac{B_{k,n}\Gamma(\gamma(s-k)+1)\Gamma(\gamma k)}{(k-1)!}C_{s-k}.\tag{5}$$

Здесь учтено, что [7]

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha} x^{\beta} dx = t^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}, \ \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ – гамма-функция, } \Gamma(n+1) = n!$$

Следует обратить внимание на возможность обозначить $m + k = s$, что приводит в (5) только к одной бесконечной сумме по s.

Такая возможность используется для других рассматриваемых в работе законов распределения, образующих смесь.

Подставляем (3), (4), (5) в интегральное уравнение (2):

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m t^{\gamma m} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{B_{k,n} t^{\gamma k}}{k!} + \gamma \sum_{s=2}^{\infty} \frac{t^{\gamma s}}{\Gamma(\gamma s+1)} \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^{k+1} \frac{B_{k,n} \Gamma(\gamma(s-k)+1)\Gamma(\gamma k)}{(k-1)!} C_{s-k}. \quad (6)$$

Приравнивая в (6) коэффициенты при одинаковых степенях t, находим C_m:

$$C_1 = B_1, \ C_m = (-1)^{k+1} \frac{B_{k,n}}{k!} + \frac{\gamma}{\Gamma(m\gamma+1)} \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k+1} \frac{B_{k,n} \Gamma(\gamma(m-k)+1)\Gamma(\gamma k)}{(k-1)!} C_{m-k}, m \geq 2.$$

Для случая $n = 1$ представление функции восстановления в виде ряда получено в [8]. Представление функции восстановления в виде ряда для периодического процесса восстановления k-го порядка при наработках, распределенных по закону Вейбулла – Гнеденко, рассмотрено в [4, 9, 10].

Поступая аналогично нахождению функции восстановления при смеси распределений Вейбулла – Гнеденко, выпишем функции восстановления для ряда смесей распределений, характерных в теории надежности технических систем.

Далее представлены плотности и функции распределения рассматриваемых законов и соответствующих им смесей с полученными представлениями в виде рядов функций восстановления.

Функция восстановления при смеси распределений Эрланга порядка l

$$f_i(t) = \frac{\alpha_i^l t^{l-1}}{(l-1)!} e^{-\alpha_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{k,n} t^{k+l-1}}{k!(l-1)!}, \ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{k,n} t^{k+l-1}}{k!(l-1)!},$$

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{k,n} t^{k+l}}{(k+l)k!(l-1)!}, \ E_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^{k+l}.$$

$$H(t) = \frac{E_{0,n}}{l!} t^l + \sum_{m=l+1}^{\infty} C_m t^m,$$

$$C_m = 0, m < l; \ C_l = \frac{E_{0,n}}{l!},$$

$$C_m = (-1)^{m-l} \frac{E_{m-l,n}}{m(m-l)!(l-1)!} + \frac{1}{(l-1)!m!} \sum_{k=0}^{m-l-1} (-1)^k \frac{E_{k,n}(k+l-1)!(m-k-l)!}{k!} C_{m-k-l},$$

$$m \geq l+1.$$

Функция восстановления при смеси экспоненциальных распределений

При $l = 1$ распределение Эрланга является экспоненциальным. Из формул для распределения Эрланга следует

$$f_i(t) = \alpha_i e^{-\alpha_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha_i^{k+1} t^k}{k!}, \ f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{k,n} t^k}{k!}, \ E_{k,n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i^{k+1},$$

$$H(t)=E_{0,n}t+\sum_{m=2}^{\infty}C_m t^m,$$

$$C_1=E_{0,n},\ \ C_m=(-1)^{m-1}\frac{E_{m-1,n}}{m!}+\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k E_{k,n}(m-k-1)!C_{m-k-1},\ \ m\ge 2.$$

Функция восстановления при смеси распределений Рэлея

$$f_i(t)=\frac{t}{\sigma_i^2}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_i^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{k!2^k\sigma_i^{2k+2}},\sigma_i\ge 0,\ \ f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{R_{k,n}t^{2k+1}}{k!2^k},\ \ R_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\sigma_i^{2k+2}},$$

$$F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{R_{k,n}t^{2k+2}}{k!2^k(2k+2)},$$

$$H(t)=\frac{R_{0,n}}{2}t^2+\sum_{m=2}^{\infty}C_m t^{2m},$$

$$C_1=\frac{R_{0,n}}{2},C_m=(-1)^{m-1}\frac{R_{m-1,n}}{m!2^m}+\frac{1}{(2m)!}\sum_{k=0}^{m-2}(-1)^k\frac{R_{k,n}(2k+1)!(2(m-k-1))!}{k!2^k}C_{m-k-1},m\ge 2.$$

Функция восстановления при смеси распределений Максвелла

$$f_i\ (t)=\frac{4h_i^3}{\sqrt{\pi}}t^2e^{-h_i^2t^2}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{h_i^{2k+1}}{(k-1)!}t^{2k},\ \ f(t)==\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{t^{2k}}{(k-1)!}M_{k,n},$$

$$F(t)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{M_{k,n}t^{2k+1}}{(2k+1)(k-1)!},\ \ M_{k,n}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i h_i^{2k+1},$$

$$H(t)=\sum_{k=1}^{\infty}C_k t^{2k}+\sum_{k=1}^{\infty}E_k t^{2k-1},$$

$$C_1=0,E_1=0,\ \ C_2=0,\ \ E_2=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}M_{1,n},\ \ C_3=\frac{4}{45\pi}(M_{1,n})^2,\ \ E_3=-\frac{4M_{2,n}}{5\sqrt{\pi}},$$

при $m\ge 3$:

$$C_m=\frac{4}{\sqrt{\pi}(2m)!}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^{k-1}\frac{M_{k,n}}{(k-1)!}(2(m-k)-1)!(2k)!E_{ms-k},$$

$$E_m=\frac{(-1)^m 4M_{k,n}}{\sqrt{\pi}(2m-1)(m-2)!}+\frac{4}{\sqrt{\pi}(2m+1)!}\sum_{k=1}^{m-2}(-1)^{k-1}\frac{M_{k,n}}{(k-1)!}(2(m-k-1))!(2k)!C_{ms-k-1}.$$

Замечание. Алгоритмы и программы нахождения численных значений параметров, входящих в смесь функций распределения, рассмотрены в работах [4, 11, 12].

Заключение

При решении многих практических задач работы технических систем, у которых отказы имеют случайный характер, важное значение имеет знание функции восстановления – математического ожидания числа отказов за любое время от начала эксплуатации. Например, при выборе стратегий эксплуатации и их оптимизации, когда наряду с аварийными восстановлениями проводятся профилактические.

В теории надежности для классических законов распределения наработок до отказа элементов технических систем функции восстановления известны. Естественно, эти законы не могут охватить разнообразие возможных распределений наработок до отказа в периоде эксплуатации. Например, не более чем одномодальность их плотностей сужает сферу их применения.

Смесь распределений позволяет получать бимодальные (двухвершинные) и даже полимодальные плотности.

Отметим, что знание функции восстановления при простом процессе восстановления позволяет находить функцию восстановления для других моделей процессов восстановления. Например, для общего процесса восстановления, когда функции распределения восстанавливаемых при отказах элементов совпадают, начиная только после первого восстановления.

Пусть $F_1(t)$ – функция распределения времени работы элемента до первого отказа, $F(t)$ – функция распределения времени работы восстанавливаемых при отказах элементов после первого отказа. Заметим, что после первого восстановления начинается простой процесс восстановления с функцией распределения $F(t)$.

Если $H_1(t)$, $H(t)$ – функции восстановления общего и простого процесса восстановления соответственно, то [1, 4]

$$H_1(t) = F_1(t) + \int_0^t H(t-x)dF_1(x).$$

Функции восстановления общего процесса восстановления находятся соответствующим интегрированием функции восстановления простого процесса.

Полученные в работе представления функций восстановления для смесей ряда классических законов распределений наработок, расширяют сферу применения методов теории надежности при решении практических задач эксплуатации технических систем.

Список литературы

1. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход: пер. с англ. / Ф. Байхельт, П. Франкен. – М.: Радио и связь, 1988. – 392 с.

2. Vainshtein V.I., Vainshtein I.I., Mikhal’chenko G.E. Optimization of the strategy of recovering technical systems with preventive recoveries. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2015, vol. 44, no. 1, pp. 79–83.

3. О выборе стратегий эксплуатации технических систем / И.И. Вайнштейн [и др.] // Вестник Сибирского государственного университета им. акад. М.Ф. Решетнева. – 2015. – № 3 (54). – С. 645–650.

4. Вайнштейн И.И. Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности / И.И. Вайнштейн. – Красноярск: СФУ, 2016. – 189 с.

5. Боровков А.А. Теория вероятностей / А.А. Боровков. – М.: Либроком, 2009. – 652 с.

6. Vaynshteyn I.I., Fedotova I.M., Tsibul’skiy G.M., Vaynshteyn Y.V. Renewal process and operation strategies in the theory of reliability of technical systems under prefailure lives distributed as a mixture of two exponential distributions. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2017, vol. 46, no .2, pp. 84–90.

7. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложение / Н.Н. Лебедев. – М.: Лань, 2010. – 368 с.

8. Smith W.E., Leadbetter M.R. On the renewal function for the Weibull distribution // Technometrics. 1963. Vol. 5. pp. 363–396.

9. Вайнштейн В.И. Математическое и программное обеспечение оптимизации проведения профилактических восстановлений при эксплуатации информационно-вычислительных систем: дис. … канд. ф.-м. наук. – Красноярск, 2006. – 149 с.

10. Вайнштейн И.И. Представление функции восстановления в виде степенных рядов и их сходимость / И.И. Вайнштейн, О.О. Шмидт // Исследование в России. – 2008. – Т. 48. – С. 549–554.

11. Королев В.Ю. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов / В.Ю. Королев. – М.: Издательство Московского университета, 2011. – 512 с.

12. Gorshenin A.K., Korolev V.Y., Tursunbaev A.M. Median modifications of the EM-algorithm for separation of mixtures of probability distributions and their applications to the decomposition of volatility of financial indexes. Journal of Mathematical Sciences, 2017, vol. 227, no.2, pp. 176–195.