УДК 622.02:539.3

## ЗАДАЧА О ВЫЧИСЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТОМ МАССИВЕ С ВЕРТИКАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ШАХТОЙ

#### Бобылева Т.Н., Голобоков О.С.

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), Москва, e-mail: tatyana2211@outlook.com

В работе рассмотрена задача о напряженном состоянии неоднородного полубесконечного горного массива, состоящего из попарно чередующихся изотропных слоев, параллельных горизонтальной плоскости. В массиве имеется вертикальная цилиндрическая полость кругового поперечного сечения. С помощью метода усреднения исходная задача для неоднородного массива, уравнения которой содержат быстро осциллирующие коэффициенты, заменяется аналогичной задачей для однородной среды с постоянными (эфективными) коэффициентами. В то время как исходные слои являлись изотропными, полученная однородная среда представляет собой трансверсально-изотропный материал. Для определения напряжений было использовано имеющееся в литературе решение о напряженно-деформированном состоянии трансверсально-изотропного массива с вертикальной цилиндрической шахтой кругового поперечного сечения. В статье рассмотрены два случая: слои, составляющие массив, являются чисто упругими и упруго-ползучими. Упруго-ползучие слои описываются линейной интегральной моделью Больцмана — Вольтерра, в качестве ядер которой выбраны экспоненциальные функции, содержащие две константы. Применение преобразования Лапласа сводит данную задачу к задаче теории упругости с коэффициентами, зависящими от параметра. Получено решение поставленной задачи в аналитическом виде для нескольких типов граничных условий на поверхности шахты.

Ключевые слова: слоистый массив, усредненная модель, гомогенизация, трансверсально-изотропная среда, ползучесть материала, экспоненциальное ядро ползучести

# STRESSED STATE PROBLEM OF A LAYER MASSIVE WITH A VERTICAL CIRCULAR SHAFT

Bobyleva T.N., Golobokov O.S.

National Research Moscow University of Civil Engineering (NRU MGSU), Moscow, e-mail: tatyana2211@outlook.com

The problem of the stressed state of an inhomogeneous semi-infinite rock consisting of pairwise alternating isotropic layers parallel to the horizontal plane is considered. The array has a vertical cylindrical cavity of circular cross section. We used the averaging method. As a result, the initial problem for an inhomogeneous array in which the equations contain rapidly oscillating coefficients is replaced by an analogous problem for a homogeneous medium with constant (effective) coefficients. While the original layers were isotropic, the resulting homogeneous medium is a transversely isotropic material. In the literature there is a solution for the stress-strain state of a transversally isotropic massif with a vertical cylindrical shaft of circular cross section. It was used. Two cases are considered in the article: the layers composing the array are purely elastic and elastic-creeping. Elastic-creeping layers are described by Boltzmann-Volterra linear integral model. The creep kernels are exponential functions depending on two parameters. The application of the Laplace transform reduces this problem to the problem of elasticity theory with coefficients depending on the parameter. The solution of the problem is obtained in the analytical form for several types of boundary conditions on the surface of the shaft.

Keywords: layered arrays, averaged model, homogenization, transversely isotropic medium, creep of material, exponential creep kernel

Горные массивы в большинстве своем являются неоднородными по составу. Как показывает практика, свойства таких массивов могут значительно отличаться от свойств составляющих их компонент. Задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородной среды содержат дифференциальные уравнения с быстро меняющимися коэффициентами, которые характеризуют свойства отдельных компонент материала. Это серьезно усложняет решение данных краевых задач даже при использовании современных компьютеров, так как требует больших затрат машинного времени. Поэтому создаются модели, содержащие более простые уравнения с усредненными (эффективными) коэффициентами. Общая теория усреднения и примеры решения задач с применением этой теории даны, например, в работе [1]. Кроме того, подобные среды обладают способностью с течением времени медленно деформироваться при постоянных напряжениях, то есть обладают свойством ползучести [2, 3]. С помощью асимптотического усреднения метода в [4] построена математическая модель малых перемещений для комбинированной среды, состоящей из взаимно чередующихся слоев вязкоупругого материала и вязкой сжимаемой жидкости. Задача о прохождении плоской звуковой волны через композит конечной толщины со слоями упругого и вязкоупругого изотропных материалов решается в [5] также с использованием усредненной модели.

Работы [6, 7] иллюстрируют применение метода усреднения в задачах упругопластического изгиба пластин. Для гетерогенных сред, состоящих из упругого и вязкоупругого материалов [8], а также из двух ползучих материалов [9], построены соответствующие усредненные модели, описывающие совместное движение слоев. В работе [10] получены эффективные модули упругости слоистой упруго-ползучей среды.

**Целью** работы является моделирование напряженного состояния массива слоистых упругих пород, содержащего вертикальную шахту, с помощью теории усреднения, а при построении решения для массива из упруго-ползучих пород с помощью метода, основанного на комбинации теории усреднения и теории ползучести.

Методы решения. Использованы механические модели теории упругости и теории ползучести. В качестве основных реологических соотношений принимаются соотношения теории линейной наследственности Больцмана — Вольтерра

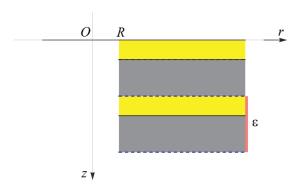
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} [\sigma(t) + \int_{0}^{t} K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau],$$

где  $\varepsilon$  — деформация, t — время, E — модуль Юнга,  $\sigma$  — напряжение, K(t) — ядро ползучести, которое является убывающей функцией времени [2]. Параметры реологической модели определяются на основе лабораторных испытаний. Применение преобразования Лапласа сводит задачу для упруго-ползучего массива к задаче теории упругости с коэффициентами, зависящими от параметра. Кроме того, использовано имеющееся в литературе решение о напряженно-деформированном состоянии трансверсально-изотропного массива с вертикальной цилиндрической шахтой кругового поперечного сечения.

В статье рассматривается слоистый горный массив, ограниченный горизонтальной плоскостью. Изотропные слои, из которых он состоит, взаимно чередуются и расположены также горизонтально. В данном массиве имеется вертикальная полость в виде цилиндра кругового поперечного сечения радиуса R, идущая от граничной плоскости. Требуется определить напряжения в данном массиве в случае, когда объемная сила — это его вес.

Выберем цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$  с началом в центре верх-

него кругового сечения полости и осью z, направленной вертикально вниз (рисунок).



Сечение полуплоскостью Orz слоистого горного массива, содержащего вертикальную цилиндрическую полость кругового поперечного сечения радиуса R (є – относительный период ячейки периодичности)

Массив, состоящий из чисто упругих слоев

Уравнения равновесия (1) и уравнения состояния (2) для каждого слоя, составляющего массив, имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r} - \sigma_{\theta}}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \gamma = 0;$$

$$\sigma_{r} = (\lambda + 2\mu)e_{r} + \mu e_{\theta} + \mu e_{z};$$

$$\sigma_{\theta} = \mu e_{r} + (\lambda + 2\mu)e_{\theta} + \mu e_{z};$$

$$\sigma_{z} = \mu e_{r} + \mu e_{\theta} + (\lambda + 2\mu)e_{z};$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu e_{r\theta}; \quad \sigma_{\theta z} = \mu e_{\theta z}; \quad \sigma_{rz} = \mu e_{rz},$$
(2)

где  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{\theta z}$  — компоненты напряжений,  $e_r$ ,  $e_{\theta}$ ,  $e_z$ ,  $e_{rz}$ ,  $e_{\theta z}$  — компоненты деформаций сплошной среды,  $\lambda$ ,  $\mu$  — постоянные Ламе,  $\gamma$  — величина удельного веса породы. Нагрузки на поверхности полости отсутствуют, то есть  $\sigma_r = 0$  и  $\sigma_{rz} = 0$  при r = R. На граничной поверхности z = 0 выполняются условия:  $\sigma_z = 0$  и  $\sigma_{rz} = 0$ .

На горизонтальных граничных плоскостях слоев заданы условия идеального контакта: непрерывны все компоненты перемещений  $u_r, u_\theta, u_z$  и нормальная компонента напряжений  $\sigma_z$ , параллельная оси oz, то есть  $[u_i] = 0$ , (i = 1, 2, 3) и  $[\sigma_z] = 0$ .

Метод усреднения неоднородной упругой среды базируется на построении асимптотического решения по отношению к периоду составной среды [1]. Все модули упругости и удельный вес являются периодическими функциями координаты  $\xi = \frac{z}{\epsilon}$  ( $\epsilon$  – относительный период ячейки) и кусочно-постоянными функциями этой переменной:

$$\lambda_{i} = \begin{cases} \lambda_{1}, \xi \in [0, h]; \\ \lambda_{2}, \xi \in [1 - h, 1]; \end{cases} \quad \mu_{i} = \begin{cases} \mu_{1}, \xi \in [0, h]; \\ \mu_{2}, \xi \in [1 - h, 1]; \end{cases} \quad \gamma_{i} = \begin{cases} \gamma_{1}, \xi \in [0, h]; \\ \gamma_{2}, \xi \in [1 - h, 1]; \end{cases} \quad 0 < h < 1.$$
 (3)

После применения метода усреднения получаем однородный трансверсально-изотропный массив. Уравнения состояния такой среды можно записать в следующем виде [11]:

$$e_{r} = a_{11}\sigma_{r} + a_{12}\sigma_{\theta} + a_{13}\sigma_{z}; \quad e_{\theta} = a_{12}\sigma_{r} + a_{11}\sigma_{\theta} + a_{13}\sigma_{z}; \quad e_{z} = a_{13}\sigma_{r} + a_{13}\sigma_{\theta} + a_{33}\sigma_{z};$$

$$e_{\theta z} = a_{44}\sigma_{\theta z}; \quad e_{rz} = a_{44}\sigma_{rz}; \quad e_{r\theta} = 2(a_{11} - a_{12})\sigma_{r\theta}, \tag{4}$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}, a_{44}$  — упругие податливости, являющиеся постоянными коэффициентами. В работе [11] решена задача о распределении напряжений в массиве из трансверсально-изотропного материала с вертикальной цилиндрической полостью, имеющего плоскость изотропии, перпендикулярную оси z, получены следующие выражения для компонент напряжений (при условии, что  $u_{\theta} = 0$  и, следовательно,  $\tau_{r\theta} = 0$ ,  $\tau_{\theta z} = 0$ ):

$$\sigma_r = \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \gamma z \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \gamma z \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right); \quad \sigma_z = -\gamma z; \quad \sigma_{rz} = 0.$$
 (5)

Подставим в (5) усредненные значения упругих податливостей  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{33}$ ,  $a_{44}$ , [12]. В результате получим

$$\sigma_{r} = -\frac{\lambda_{1}(\lambda_{2} + 2\mu_{2})h + \lambda_{2}(\lambda_{1} + 2\mu_{1})(1 - h)}{(\lambda_{1} + 2\mu_{1})(\lambda_{2} + 2\mu_{2})} [\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1 - h)]z \left(1 - \frac{R^{2}}{r^{2}}\right);$$

$$\sigma_{\theta} = -\frac{\lambda_{1}(\lambda_{2} + 2\mu_{2})h + \lambda_{2}(\lambda_{1} + 2\mu_{1})(1 - h)}{(\lambda_{1} + 2\mu_{1})(\lambda_{2} + 2\mu_{2})} [\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1 - h)]z \left(1 + \frac{R^{2}}{r^{2}}\right);$$

$$\sigma_{z} = -[\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1 - h)]z; \quad \sigma_{z} = 0.$$
(6)

Напряжение  $\sigma_{A}$  в радиальных сечениях у поверхности шахты:

$$\sigma_{\theta} = -2 \frac{\lambda_1(\lambda_2 + 2\mu_2)h + \lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1)(1-h)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)} [\gamma_1 h + \gamma_2(1-h)] z.$$

Это напряжение будет в два раза больше, чем в сплошном массиве без полости на таком же расстоянии z от горизонтальной плоскости, ограничивающей массив.

Если перемещения на поверхности шахты в радиальном направлении невозможны (например, когда боковая поверхность шахты закреплена трубой), то граничные условия на ней будут  $u_r = 0$  и  $\sigma_{rz} = 0$  при r = R. В этом случае радиальное напряжение, оказываемое массивом на стенку трубы:

$$\sigma_r = -\frac{\lambda_1(\lambda_2 + 2\mu_2)h + \lambda_2(\lambda_1 + 2\mu_1)(1-h)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)} [\gamma_1 h + \gamma_2(1-h)]z.$$

Если на поверхности шахты действует давление qz, меняющееся пропорционально расстоянию [11], то к напряжениям  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в формулах (6) добавятся соответственно

$$(\sigma_r)_1 = -\frac{qR^2}{r^2}z$$
 и  $(\sigma_\theta)_1 = \frac{qR^2}{r^2}z$ .

Массив, состоящий из упруго-ползучих слоев

Пусть данный горный массив состоит из упруго-ползучих слоев, уравнения состояния для которых имеют вид

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{ij} + d_{ijkh} * \varepsilon_{ij}, (i, j = 1, 2, 3).$$
(7)

Здесь символ \* обозначает оператор свертки:

$$d_{ijkh}(x,t) * \varepsilon_{ij} = \int_{0}^{t} d_{ijkh}(x,t-\tau)\varepsilon_{ij}(x,\tau)d\tau.$$
 (8)

То, что ядра релаксации зависят от разности  $t-\tau$ , как доказал Вольтерра, вытекает из условия инвариантности величин компонент тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  относительно изменений начала отсчета времени t.

Так как исходные слои упруго-ползучих материалов предполагаются изотропными, тензоры  $a_{ijkh}$  и  $d_{ijkh}$  (i,j,k,h=1,2,3) в (7) соответственно имеют вид [2]:

$$a_{ijkh} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \tag{9}$$

$$d_{ijkh} = -(D_{v}(t) - \frac{1}{3}D_{s}(t))\delta_{ij}\delta_{kh} - \frac{1}{2}D_{s}(t)(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}).$$
 (10)

Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  – постоянные Ламе,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $D_s(t)$  и  $D_v(t)$  – регулярные части ядер сдвиговой и объемной релаксаций соответственно. Предположим, что  $D_v(t) = kD_s(t)$ ,

ядер сдвиговой и объемной релаксации соответственно. Предноложим, то  $\omega_{v}(t)$  мих t = 0 или t =

$$\tilde{f}(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

В результате получим задачу теории упругости, в уравнениях которой все коэффициенты зависят от параметра р. К такой задаче применим метод усреднения [1]. Используя формулы (5) для компонент напряжений трансверсально-изотропного тела и выражения для усредненных (эффективных) модулей упругости, полученные в работе [12], запишем решение поставленной задачи в изображениях Лапласа:

$$\tilde{\sigma}_{r} = -\left\{ \frac{\left[\lambda_{1}(p+\alpha_{1}) - j_{1}\right]h}{L_{1}(p+\alpha_{1}) - G_{1}} + \frac{\left[\lambda_{2}(p+\alpha_{2}) - j_{2}\right](1-h)}{L_{2}(p+\alpha_{2}) - G_{2}} \right\} \left[\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1-h)\right] z \left(1 - \frac{R^{2}}{r^{2}}\right);$$

$$\tilde{\sigma}_{\theta} = -\left\{ \frac{\left[\lambda_{1}(p+\alpha_{1}) - j_{1}\right]h}{L_{1}(p+\alpha_{1}) - G_{1}} + \frac{\left[\lambda_{2}(p+\alpha_{2}) - j_{2}\right](1-h)}{L_{2}(p+\alpha_{2}) - G_{2}} \right\} \left[\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1-h)\right] z \left(1 + \frac{R^{2}}{r^{2}}\right);$$

$$\tilde{\sigma}_{z} = -\left[\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1-h)\right] z; \tilde{\sigma}_{rz} = 0.$$
(11)

После применения к (11) обратного преобразования Лапласа формулы для компонент напряжений будут иметь вид

$$\sigma_{r} = -\left\{e^{-\frac{L_{1}\alpha_{1} - G_{1}}{L_{1}}t} \frac{(G_{1}\lambda_{1} - j_{1}L_{1})h}{L_{1}^{2}} + e^{-\frac{L_{2}\alpha_{2} - G_{2}}{L_{2}}t} \frac{(G_{2}\lambda_{2} - j_{2}L_{2})(1 - h)}{L_{2}^{2}} + \frac{\lambda_{1}L_{2}h + \lambda_{2}L_{1}(1 - h)}{L_{1}L_{2}}\delta(t)\right\} \times \left[\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1 - h)\right] z \left(1 - \frac{R^{2}}{r^{2}}\right), \tag{12}$$

$$\sigma_{\theta} = -\left\{e^{-\frac{L_{1}\alpha_{1} - G_{1}}{L_{1}}t} \frac{(G_{1}\lambda_{1} - j_{1}L_{1})h}{L_{1}^{2}} + e^{-\frac{L_{2}\alpha_{2} - G_{2}}{L_{2}}t} \frac{(G_{2}\lambda_{2} - j_{2}L_{2})(1 - h)}{L_{2}^{2}} + \frac{\lambda_{1}L_{2}h + \lambda_{2}L_{1}(1 - h)}{L_{1}L_{2}}\delta(t)\right\} \times \left[\gamma_{1}h + \gamma_{2}(1 - h)\right] z \left(1 + \frac{R^{2}}{r^{2}}\right), \tag{13}$$

$$\sigma_z = -[\gamma_1 h + \gamma_2 (1 - h)]z; \quad \sigma_{rz} = 0,$$

где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. В этих формулах введены следующие обозначения (i - номер слоя, i = 1,2):

$$L_i = \lambda_i + 2\mu_i$$
,  $G_i = d_i \left( k_i + \frac{2}{3} \right)$ ,  $j_i = d_i \left( k_i - \frac{1}{3} \right)$ ,  $L = L_1 h + L_2 (1 - h)$ ,

 $k_i$  – коэффициенты пропорциональности ядер объемной релаксации ядрам сдвиговой для каждого слоя. Кроме того,  $p_1, p_2$  – корни следующего квадратного уравнения:

$$Lp^{2} + [L(\alpha_{1} + \alpha_{2}) - ((1-h)G_{1} + hG_{2})]p + [L\alpha_{1}\alpha_{2} - G_{2}h\alpha_{1} - G_{1}(1-h)\alpha_{2}] = 0,$$
(14)

имеющего положительный дискриминант

$$Disc = [G_2h - G_1(1-h) + L(\alpha_1 - \alpha_2)]^2 + 4G_1G_2h(1-h)$$
.

Отсюда следует, что  $p_1, p_2$  — действительные числа. Напряжение  $\sigma_{\theta}$  рядом с поверхностью круговой полости (r=R) для любых углов  $\theta$  будет

$$\sigma_{\theta} = -2 \left\{ e^{-\frac{L_{1}\alpha_{1} - G_{1}}{L_{1}}} \frac{(G_{1}\lambda_{1} - j_{1}L_{1})h}{L_{1}^{2}} + e^{-\frac{L_{2}\alpha_{2} - G_{2}}{L_{2}}} \frac{(G_{2}\lambda_{2} - j_{2}L_{2})(1 - h)}{L_{2}^{2}} + \frac{\lambda_{1}L_{2}h + \lambda_{2}L_{1}(1 - h)}{L_{1}L_{2}} \delta(t) \right\} \times$$

$$\times [\gamma_1 h + \gamma_2 (1-h)]z$$
.

В случае, когда боковая поверхность шахты закреплена, например, трубой, шахта не оказывает влияния на напряжения, они будут такими же, как и в массиве без нее. На стенку трубы массив будет оказывать давление:

$$\sigma_{r} = -\left\{ e^{-\frac{L_{1}\alpha_{1} - G_{1}}{L_{1}}t} \frac{(G_{1}\lambda_{1} - j_{1}L_{1})h}{L_{1}^{2}} + e^{-\frac{L_{2}\alpha_{2} - G_{2}}{L_{2}}t} \frac{(G_{2}\lambda_{2} - j_{2}L_{2})(1-h)}{L_{2}^{2}} + \frac{\lambda_{1}L_{2}h + \lambda_{2}L_{1}(1-h)}{L_{1}L_{2}} \delta(t) \right\} \times \left[ \gamma_{1}h + \gamma_{2}(1-h) \right] z.$$

Если на поверхности шахты действует давление qz, меняющееся пропорционально расстоянию z (например, внутри находится жидкость [11]), то к напряжению о в формуле (12) добавится  $(\sigma_r)_1 = -\frac{qR^2}{r^2}z$ , а к напряжению  $\sigma_{\theta}$  в формуле (13)  $(\sigma_{\theta})_1 = \frac{qR^2}{r^2}z$ .

### Выволы

В работе применен метод усреднения, с помощью которого изучаются физические явления в неоднородных средах с периодической структурой. С помощью этого метода слоистый массив с вертикальной шахтой моделируется однородным трансверсально-изотропным полупространством с плоскостью изотропии, перпендикулярной вертикальной оси Oz. В результате получено распределение напряжений для различных граничных условий на поверхности шахты, когда между слоями выполнены условия идеального контакта. Рассмотрены два случая: изотропные чисто упругие слои и изотропные упруго-ползучие слои, для каждого из которых задано экспоненциальное ядро релаксации, зависящее от двух параметров. Эти параметры могут быть идентифицированы с помощью эксперимента.

Следует заметить, что использование в качестве ядер релаксации экспоненциальных ядер позволило в явном виде построить усредненную систему напряжений. Полученные в работе результаты могут быть весьма полезны для ряда прикладных задач.

### Список литературы

- 1. Олейник О.А. Математические задачи теории сильно неоднородных сред / О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 311 с.
- 2. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязко-упругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. - М.: На-
- 3. Андреев В.И. Механика неоднородных тел / В.И. Андреев. - М.: Юрайт, 2015. - 255 с.
- 4. Шамаев А.С. О спектре одномерных колебаний в периодической комбинированной слоистой среде / А.С. Шамаев, В.В. Шумилова // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (4). – С. 1882–1883.
- 5. Шамаев А.С. Прохождение плоской звуковой волны через слоистый композит с компонентами из упругого и вязкоупругого материалов / А.С. Шамаев, В.В. Шумилова // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 1. – С. 10–20.

- 6. Савенкова М.И. Применение метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины / М.И. Савенкова, С.В. Шешенин, И.М. Закалюкина // Вестник МГСУ. 2012.-N 9. С. 156—164.
- 7. Савенкова М.И. Сравнение результатов конечноэлементного анализа с результатами асимптотического метода осреднения в задаче упругопластического изгиба пластины / М.И. Савенкова, С.В. Шешенин, И.М. Закалюкина // Вестник МГСУ. -2013.-N = 8.-C.42-50.
- 8. Шамаев А.С. Асимптотическое поведение спектра одномерных колебаний в среде из слоев упругого материала и вязкоупругого материала Кельвина Фойгта / А.С. Шамаев, В.В. Шумилова // Современные проблемы механики: сборник статей. Труды МИАН. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2016. Т. 295. С. 218—228.
- 9. Шамаев А.С. Усреднение уравнений состояния для гетерогенной среды, состоящей из слоев двух ползучих материалов / А.С. Шамаев, В.В. Шумилова // Современные проблемы механики: сборник статей. Труды МИАН. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2016. Т. 295. С. 229–240.
- 10. Bobyleva T.N. An Efficient Algorithm for Calculating Rheological Parameters of Layered Soil Media Composed from Elastic-Creeping Materials / T.N. Bobyleva, A.S. Shamaev // Soil Mechanics and Foundation Engineering. 2017. V. 54(4). P. 224–230.
- 11. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. М.: Наука, 1977. 416 с.
- 12. Bobyleva T. Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array / T. Bobyleva // Procedia Engineering. 2016. N 153. P. 103–106.