

УДК 004.052.2

ИНТЕГРАЦИЯ СВОЙСТВ МОДУЛЯРНЫХ КОДОВ И ДИСКРЕТНЫХ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНОГО ЧАСТОТНОГО МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ

¹Гиш Т.А., ²Белов С.П., ¹Калмыков И.А., ¹Юрданов Д.В.,
¹Ефимович А.В., ¹Калмыков М.И.

¹ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь, e-mail: kia762@yandex.ru;

²ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»
(НИУ «БелГУ»), Белгород

В работе рассмотрены вопросы выполнения ортогонального частотного мультиплексирования (OFDM) на основе использования дискретных вейвлет-преобразований (ДВП), реализованных в модулярных кодах (МК). Целью проведенных исследований является повышение помехоустойчивости системы OFDM за счет использования нового базиса – ДВП, который выполняется с использованием МК. Известно, что применение модулярных кодов позволяет выполнять дискретные вейвлет-преобразования с применением целых чисел, что приводит к повышению точности проводимых вычислений. Кроме того, модулярные коды имеют возможность проводить вычисления ДВП параллельно. При этом в арифметических операциях, реализуемых ДВП в МК, используются малоразрядные остатки, которые получены на основе деления исходного числа на взаимно простые модули кода. Так как вычисления проходят параллельно, то в результате применения модулярных кодов обеспечивается более высокая скорость вычислений ДВП. Интеграция свойств модулярных кодов и дискретных вейвлет-преобразований позволяет создать новый базис выполнения ортогонального частотного мультиплексирования сигналов OFDM, которые обладают более высокой помехоустойчивостью по сравнению с базисом на основе дискретных преобразований Фурье (ДПФ), а также их быстрых алгоритмов.

Ключевые слова: ортогональное частотное мультиплексирование, дискретное вейвлет-преобразование, модулярный код, система остаточных классов, помехоустойчивость

INTEGRATION PROPERTIES OF MODULAR CODES AND DISCRETE WAVELET TRANSFORMS WHEN PERFORMING ORTHOGONAL FREQUENCY MULTIPLEXING

¹Gish T.A., ²Belov S.P., ¹Kalmykov I.A., ¹Yurdanov D.V., ¹Efimovich A.V., ¹Kalmykov M.I.

¹Federal State Autonomous Educational Institution higher professional education

«North-Caucasian Federal University», Stavropol, e-mail: kia762@yandex.ru;

²Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education

«Belgorod State National Research University», Belgorod

The paper discusses the implementation of orthogonal frequency multiplexing (OFDM) based on the use of discrete wavelet transforms (DWT) implemented in the modular codes (MC). The objective of the research is to increase the noise immunity of the OFDM system through the use of a new basis – DVP, which is performed using MC. It is known that the use of modular codes allows you to perform discrete wavelet transform with the use of integers, which leads to increased accuracy of the conducted calculations. In addition, the modular codes have the ability to calculate fiberboard in parallel. Thus in arithmetic operations implemented fiberboard MK used maloletnye residues that are derived from dividing the original number by coprime modules of code. Since the calculations are parallel, then the result of applying the modular codes to achieve a higher speed of calculations fiberboard. Integration properties of modular codes and discrete wavelet transforms allows you to create a new basis for performing orthogonal frequency multiplexing OFDM signals, which have higher noise immunity compared to baseline based on the discrete Fourier transform (DFT), fast algorithms.

Keywords: orthogonal frequency division multiplexing, discrete wavelet transform, modular code, system of residual classes, noise immunity

В настоящее время в телекоммуникационных системах широко применяется технология, которая базируется на ортогональном частотном мультиплексировании OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) [1–3]. Это связано с необходимостью обеспечения высокоскоростной передачи мультимедийных данных в системах беспроводной связи. Кроме этого, технология OFDM обладает целым рядом достоинств, среди которых можно выделить: высокую спектральную эффектив-

ность, эффективную работу в условиях многолучевого распространения сигналов; высокую устойчивость к узкополосной интерференции, которая способна исказить небольшую часть поднесущих [1]. Однако применение в системах OFDM быстрых преобразований Фурье (БПФ) приводит к недостаткам, среди которых можно отметить наличие двух вычислительных трактов, накопление ошибок округления. Кроме того, при выполнении обратного быстрого преобразования Фурье (ОБПФ) в передат-

чике и БПФ в приемнике используются матрицы поворачивающих коэффициентов, в которых отсутствуют нулевые элементы. Это приводит к тому, что искажение одного разряда в сигнале OFDM при передаче в канале связи приведет к размножению ошибки при восстановлении сигнала. То есть на приеме будут искажены N отсчетов после выполнения БПФ, где N – число поднесущих в сигнале OFDM.

Устранить данный недостаток возможно за счет использования ортогональных преобразований сигналов, прямая матрица которых содержит нулевые элементы. Этому требованию удовлетворяют дискретные вейвлет-преобразования. Повысить эффективность выполнения ДВП можно за счет использования модулярных кодов. Поэтому реализация технологии OFDM на основе дискретных вейвлет-преобразований, использующих модулярные коды, применение которых позволит повысить помехоустойчивость системы с ортогональным частотным мультиплексированием, является актуальной задачей.

Цель исследования

Современные системы OFDM не позволяют обеспечить максимальную помехоустойчивость, так как при выполнении ОБПФ на передающей стороне и БПФ используются матрицы, которые содержат N^2 ненулевых поворачивающих коэффициентов, где N – число поднесущих в сигнале OFDM. В результате этого в системах OFDM наблюдается эффект размножения ошибок, когда искажение одного бита передаваемых данных приводит к искажению N отсчетов на приеме после выполнения БПФ. Устранить данный недостаток возможно, если в системах OFDM в качестве ортогонального базиса будут использованы ДВП, реализованные в модулярных

кодах. Поэтому целью статьи является повышение помехоустойчивости системы OFDM за счет использования нового базиса – ДВП, выполняемого в МК.

Материалы и методы исследования

В процессе развития сетей передачи данных, в том числе и беспроводных, постоянно увеличиваются требования к скорости передачи информации и качеству предоставляемых сервисов. Одним из перспективных видов сигнально-кодовых конструкций является ортогональное частотное мультиплексирование OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing). При использовании данной технологии поток входных данных $s(n)$ разбивается на множество параллельных потоков, каждый из которых передается с помощью соответствующей несущей. В результате этого высокоскоростной последовательный цифровой поток заменяется множеством низкоскоростных потоков. Основная идея метода OFDM заключается в расположении набора «независимых» подканалов таким образом, чтобы, с одной стороны, один подканал не являлся помехой другому, а с другой стороны, спектры подканалов перекрывались. Для выполнения данного условия в OFDM предлагается использовать дискретное преобразование Фурье (ДПФ), реализованное на основе быстрых алгоритмов БПФ. Рассмотрим дискретную модель системы с OFDM на основе ДПФ, приведенную в [4]. Такая модель на передающей стороне выполняет операцию ОДПФ с последующим добавлением циклического префикса (ЦП), а на приемной стороне – дискретное преобразование Фурье с использованием быстрых алгоритмов вычислений. На рис. 1 приведена дискретная модель системы с OFDM.

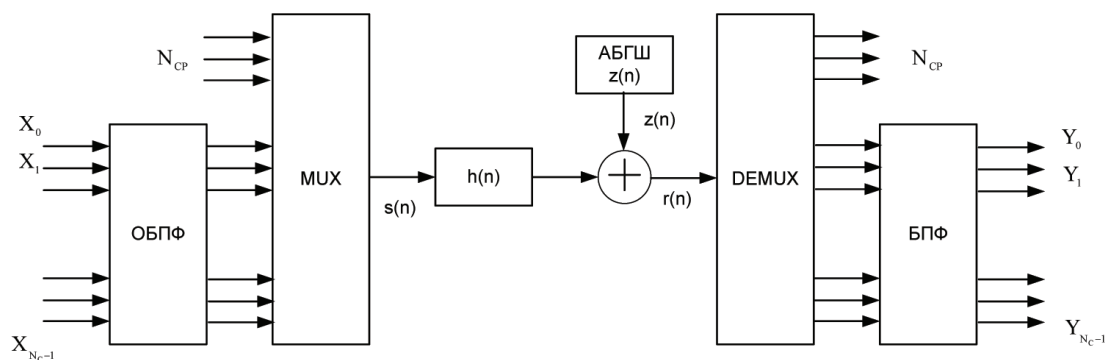


Рис. 1. Дискретная модель системы с OFDM на основе БПФ

На передающей стороне системы с OFDM поток битов разбивается на блоки, содержащих N_c двоичных символов. Эти блоки образуют вектор данных, который можно представить в виде $X = (X_0, X_1, \dots, X_{N_c-1})^T$. Затем данный вектор подвергается обратному быстрому преобразованию Фурье. А затем к нему добавляют циклический префикс длиной N_{CP} . Тогда результирующий комплексный низкочастотный сигнал имеет вид

$$s(n) = \begin{cases} \frac{1}{N_c} \sum_{k=0}^{N_c-1} X_k \exp\left(j2\pi k \frac{n-N_c}{N_c}\right) & n \in [0, N_c + N_{CP} - 1]; \\ 0 & n \notin [0, N_c + N_{CP} - 1]. \end{cases} \quad (1)$$

Полученный сигнал $s(n)$ поступает на вход линейного стационарного дискретного канала (ДК) $h(n)$. При прохождении по данному каналу на сигнал $s(n)$ воздействует аддитивный белый гауссовский шум (АБГШ) $z(n)$. Такой шум характеризуется нулевым средним и дисперсией σ_z^2 . При этом полагаем, что между передающей стороной и приемной стороной обеспечивается идеальная синхронизация. При выполнении отмеченных условий на приемной стороне будет принят сигнал

$$r(n) = \sum_{L=0}^{N_c-1} h(L)s(n-L) + z(n). \quad (2)$$

После этого из принятого сигнала удаляют циклический префикс, а затем осуществляют выполнение ДПФ. В этом случае имеем

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N_c-1} r(n) \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N_c}\right). \quad (3)$$

После выполнения БПФ на выходе приемника будет получен сигнал

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N_c-1} \left(\sum_{L=0}^{N_c-1} h(L)s(n-L) + z(n) \right) \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N_c}\right) = \tilde{S}(k) + Z(k), \quad (4)$$

где $\tilde{S}$ – идеальный сигнал; $Z(k)$ – шум в дискретном канале.

Использование в OFDM быстрых алгоритмов ДПФ Фурье позволило обеспечить высокую скорость передачи сигналов и спектральную эффективность. Кроме того, технология OFDM характеризуется эффективной работой в условиях многолучевого распространения сигналов, а также высокой устойчивостью к узкополосной интерференции, которая способна исказить небольшую часть поднесущих [4].

Однако ДПФ и ОБПФ выполняются в поле комплексных чисел, что приводит к увеличению схемных затрат. Это связано с необходимостью применять два вычислительных тракта для обработки действительной и мнимой части сигнала. Кроме того, в качестве поворачивающих коэффициентов БПФ и ОБПФ используются тригонометрические функции, которые являются иррациональными числами, что приводит к накоплению ошибок округления [5]. Наряду с отмеченными недостатками системы с OFDM, использующие ДПФ, не обладают максимальной помехоустойчивостью. Проведенные исследования показали, что искажение одного разряда в сигнале OFDM при передаче в канале связи из-за помех приведет к размножению ошибки при восстановлении сигнала. Это связано с тем, что математическая модель ортогональных преобразований сигналов на основе БПФ и ОБПФ использует прямую и обратную матрицу, в которой отсутствуют нулевые элементы. Рассмотрим выполнение ДПФ для входного вектора из $N = 8$ отсчетов. Тогда имеем

$$X(n) = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 & W^6 & W^7 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 & W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^1 & W^4 & W^7 & W^2 & W^5 \\ W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 & W^0 & W^4 \\ W^0 & W^5 & W^2 & W^7 & W^4 & W^1 & W^6 & W^3 \\ W^0 & W^6 & W^4 & W^2 & W^0 & W^6 & W^4 & W^2 \\ W^0 & W^7 & W^6 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{8}\right)$ – дискретная экспоненциальная функция.

Используя выражение (5), получаем следующие спектральные составляющие:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)W^0 + x(1)W^0 + x(2)W^0 + x(3)W^0 + x(4)W^0 + x(5)W^0 + x(6)W^0 + x(7)W^0; \\ X(1) &= x(0)W^0 + x(1)W^1 + x(2)W^2 + x(3)W^3 + x(4)W^4 + x(5)W^5 + x(6)W^6 + x(7)W^7; \\ X(2) &= x(0)W^0 + x(1)W^2 + x(2)W^4 + x(3)W^6 + x(4)W^0 + x(5)W^2 + x(6)W^4 + x(7)W^6; \\ &\vdots \\ X(7) &= x(0)W^0 + x(1)W^7 + x(2)W^6 + x(3)W^5 + x(4)W^4 + x(5)W^3 + x(6)W^2 + x(7)W^1. \end{aligned} \quad (6)$$

Анализ выражения (6) показывает, что в получении каждой составляющей спектрального отсчета $X(j)$ используются все временные отсчеты, поступающие из канала связи, от $x(0)$ до $x(7)$. Из представленных вычислений наглядно видно, что при искажении бита, например в нулевом отсчете $x(0)$, на приеме после выполнения БПФ будут искажены все N отсчетов спектра сигнала, где N – число поднесущих в сигнале OFDM.

Повысить помехоустойчивость системы OFDM можно за счет использования дискретных вейвлет-преобразований. Если в технологии OFDM заменить ортогональные преобразования, выполняемые в поле комплексных чисел, на ДВП, то дискретная модель системы с OFDM будет иметь вид, показанный на рис. 2.

При этом для повышения эффективности реализаций ДВП сигнала воспользуемся модулярными кодами. Применение МК позволяет повысить скорость вычислений за счет распараллеливания на уровне арифметических операций и использования малоразрядных остатков, а также обеспечить максимальную точность результатов [6–8]. В качестве ДВП выберем Добеши 4, которое реализуется по модулю p_i , где $i = 1, 2, \dots, k$, и осуществим прямое преобразование для $N = 8$ отсчетов. Тогда получаем

$$X_i(n) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & -c_3 & c_2 & -c_1 \\ c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & -c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & -c_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_i(0) \\ x_i(1) \\ x_i(2) \\ x_i(3) \\ x_i(4) \\ x_i(5) \\ x_i(6) \\ x_i(7) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{где } c_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \bmod p_i; \quad c_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \bmod p_i; \quad c_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \bmod p_i; \quad c_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \bmod p_i;$$

$$x_i(n) = x(n) \bmod p_i; \quad X_i(n) = X(n) \bmod p_i.$$

Тогда получаем следующие аппроксимирующие и детализирующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} X(0) &= a_1 = x(0)c_1 + x(1)c_2 + x(2)c_3 + x(3)c_4; \\ X(1) &= d_1 = x(0)c_4 - x(1)c_3 + x(2)c_2 - x(3)c_1; \\ X(2) &= a_2 = x(2)c_1 + x(3)c_2 + x(4)c_3 + x(5)c_4; \\ &\vdots \\ X(6) &= a_4 = x(0)c_3 + x(1)c_4 + x(6)c_1 + x(7)c_2; \\ X(7) &= d_4 = x(0)c_2 - x(1)c_1 + x(6)c_4 - x(7)c_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Анализ выражения (8) показывает, что для получения первого сглаживающего коэффициента ДВП a_1 используются четыре отсчета от $x(0)$ до $x(3)$, поступившие из канала связи. Если в процессе передачи исказится нулевой отсчет нулевой $x(0)$, то согласно (6) будут искажены два сглаживающих коэффициента a_1 и a_4 , а также два детализирующих коэффициента d_1 и d_4 . Остальные сглаживающие и детализирующие коэффициенты останутся без изменений.

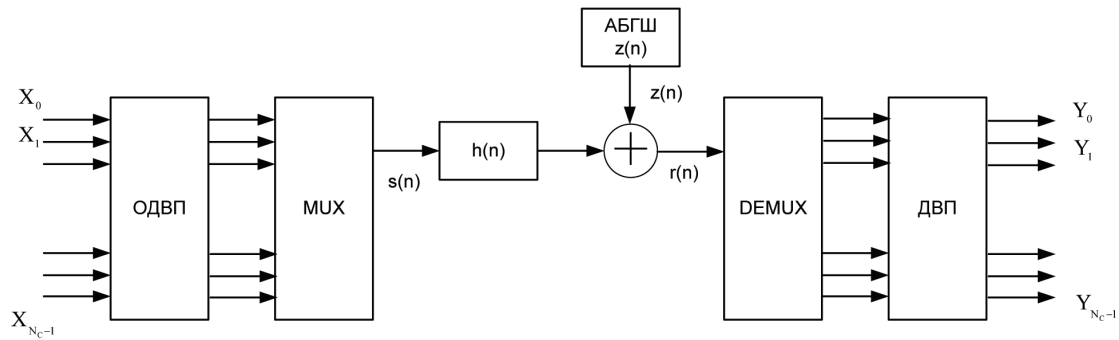


Рис. 2. Дискретная модель системы с OFDM на основе ДВП

Результаты исследования и их обсуждение

Для оценки помехоустойчивости систем с OFDM были использованы дискретные модели систем с ортогональным частотным мультиплексированием, использующие ортогональные преобразования ДПФ и Добеши-4, представленные в МК. В качестве оснований МК были выбраны модули $p_1 = 23$, $p_2 = 47$, $p_3 = 71$. Диапазон модульного кода $P_{\text{раб}} = 76751$. Для моделирования входного потока данных генерировалась бинарная псевдослучайная последовательность. Из данной ПСП формировался набор модуляционных символов 64 отсчета размерности по 8 бит каждый. Формирование происходило в одинаковой полосе частот (20 МГц) и с равной длительностью (12,8 мкс). Генерировался аддитивный гауссовский шум, который умножался на нормирующий коэффициент для соответствия заданному уровню мощности, а затем складывался с каждым из сформированных сигналов. Полученные сигналы демодулировались, а затем вычислялось отношение ошибочно принятых бит $L_{\text{ош}}$ к общему количеству переданных L согласно

$$P_{\text{ош}} = \frac{L_{\text{ош}}}{L}. \quad (9)$$

Для обеспечения точности $P_{\text{ош}}$ (BER) выполнялось условие $L \geq 10^6$ и результаты усреднялись по серии из 5 экспериментов. Результаты представлены на рис. 3.

Приведенные результаты моделирования показали, что использование дискретных вейвлет-преобразований, реализованных в МК, позволяет повысить помехоустойчивость систем OFDM по сравнению с ортогональными преобразованиями ДПФ. Так, при отношении сигнал/шум равном 4 дБ вероятность ошибки системы OFDM на основе ДПФ составляет $P_{\text{ош}} = 0,41$. При этом при использовании ДВП Добеши-4, реализован-

ного в модульном коде, обеспечивает вероятность ошибки $P_{\text{ош}} = 0,1$. Для достижения вероятности ошибки равной $P_{\text{ош}} = 10^{-5}$ в системах OFDM на основе ДПФ необходимо обеспечить отношение сигнал/шум равный 19 дБ, а при использовании разработанного алгоритма реализации ДВП в модульном коде – потребуется 13,5 дБ. Таким образом, интеграция свойств модулярных кодов и дискретных вейвлет-преобразований позволяет повысить помехоустойчивость при выполнении ортогонального частотного мультиплексирования сигналов.

Заключение

В статье представлена модель системы OFDM, использующая в качестве ортогональных преобразований дискретные вейвлет-преобразования, реализованные в модулярных кодах. Приведенные результаты моделирования показали, что использование ДВП, реализованных в МК, повышает помехоустойчивость систем OFDM по сравнению с ортогональными преобразованиями ДПФ. Так, при отношении сигнал/шум равном 4 дБ вероятность ошибки системы OFDM на основе ДПФ составляет $P_{\text{ош}} = 0,41$. При этом при использовании ДВП Добеши-4, реализованного в модульном коде, обеспечивает вероятность ошибки равной $P_{\text{ош}} = 10^{-5}$ в системах OFDM на основе ДПФ необходимо обеспечить отношение сигнал/шум равный 19 дБ, а при использовании разработанного алгоритма реализации ДВП в модульном коде – потребуется 13,5 дБ. К перспективным направлениям применения целочисленных ДВП в системах OFDM можно отнести способность модулярных кодов обнаруживать и корректировать ошибки, возникающие в процессе вычислений. Использование избыточных МК позволит повысить отказоустойчивость систем OFDM, построенных на основе ДВП.

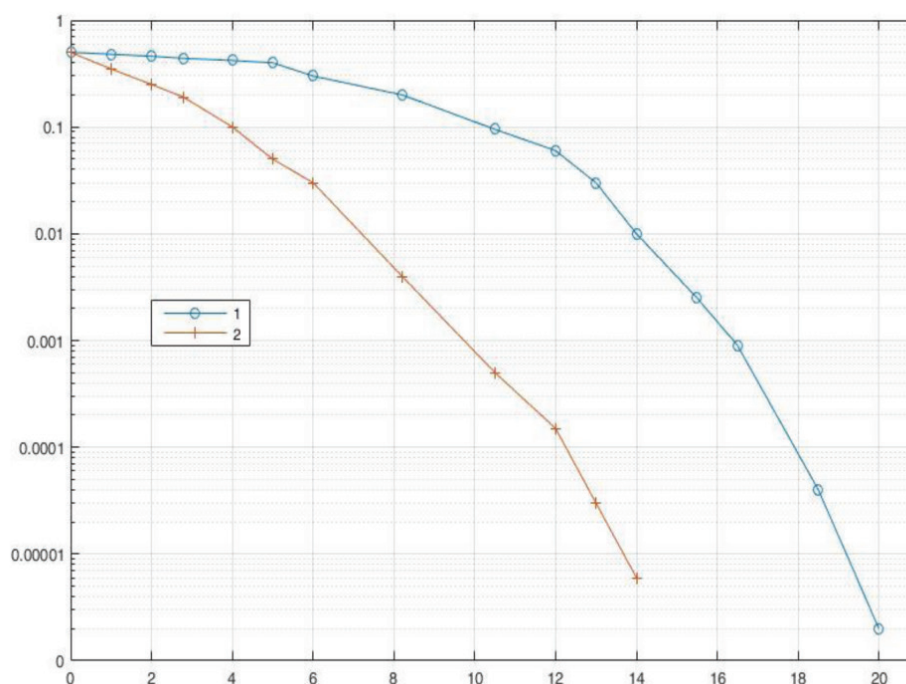


Рис. 3. Кривые помехоустойчивости систем OFDM, построенных на основе ДПФ и ДВП Добеши-4, реализованных в МК (1 – OFDM на основе БПФ, 2 – OFDM на основе ДВП в МК)

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-37-50009.

Список литературы

1. Grinsted A., Moore J.C., Jevrejeva S. Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series, *Nonlin. Processes Geophys.* – 2014. – № 11. – P. 561–566.
2. Hans-Georg Stark Wavelets and signal processing. Springer International Publishing Switzerland. 2005. – 254 p.
3. Шоберг А.Г. Современные методы обработки изображений: модифицированное вейвлет-преобразование. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2014. – 125 с.

4. Технология OFDM: учебное пособие для вузов / М.Г. Бакулин, В.Б. Крейнделин, А.М. Шлюма, А.П. Шумов. – М.: Горячая линия-Телеком, 2017 – 352 с.
5. Katkov K.A., Timoshenko L.I., Kalmykov I.A., Dunin A.V., Gish T.A. Application of Modular Technologies in the Large-Scale Analysis of Signals // *Journal of Theoretical and Applied Information Technology.* – 2015. – № 80(3). – P. 391–400.
6. Червяков Н.И., Коляда А.А., Ляхов П.А. Модулярная арифметика и ее приложения в инфокоммуникационных технологиях. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. – 400 с.
7. Ananda Mohan Residue Number Systems. Theory and Applications. Springer International Publishing Switzerland. – 2016. – 351 p.
8. Amir Sabbagh Molahosseini Embedded Systems Design with Special Arithmetic and Number Systems. Springer International Publishing AG. – 2017. – 390 p.