

УДК 519.24

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ РОБАСТНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Чубич В.М., Филиппова Е.В.

ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет»,
Новосибирск, e-mail: chubich@ami.nstu.ru, e.filippova@corp.nstu.ru

Рассмотрена проблема оценивания и фильтрации при наличии негауссовских шумов в моделях состояния и наблюдения. Введено понятие коррентропийных фильтров и отличие их от традиционного фильтра Калмана. Приведены расчетные алгоритмы некоторых перспективных адаптивных фильтров. На примере модели прямолинейного равноускоренного движения объекта со случайным характером возникновения аномальных выбросов при помощи разработанного программно-математического обеспечения проведен сравнительный анализ эффективности современных робастных фильтров Изанлу (Izanloo) – Фейкуруиана (Fakoorian) – Джазди (Yazdi) – Саймона (Simon), Чена (Chen) – Лю (Liu) – Чжао (Zhao) – Принципе (Principe), Вана (Wang) – Гао (Gao) – Чжана (Zhang) – Ма (Ma) и Сярккя (Särkkä) – Нумменмаа (Nummenmaa), адаптированных к нестационарным линейным непрерывно-дискретным системам. Использованы методы компьютерного моделирования и Монте-Карло. Проведенные в статье исследования показали, что фильтры Изанлу – Фейкуруиана – Джазди – Саймона и Чена – Лю – Чжао – Принципе наиболее удачно справились с обработкой аномальных данных. Учитывая относительную простоту программной реализации первого из указанных фильтров, авторы рекомендуют именно его к практическому применению. При этом приходится считаться с возникающей проблемой оптимального выбора размера гауссовского ядра.

Ключевые слова: фильтр Калмана, критерий максимальной коррентропии, байесовская аппроксимация, робастная фильтрация, аномальные наблюдения, стохастическая непрерывно-дискретная система

RESEARCH OF THE EFFICIENCY OF SOME ROBUST FILTERS FOR NON-STATIONARY LINEAR CONTINUOUS-DISCRETE SYSTEMS

Chubich V.M., Filippova E.V.

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, e-mail: chubich@ami.nstu.ru, e.filippova@corp.nstu.ru

The problem of estimation and filtering in the presence of non-Gaussian noise in state and observation models is considered. The notion correntropy filters and unlike traditional Kalman filter are introduced. Calculation algorithms of some perspective adaptive filters are presented. On the example of the model of straight-line uniformly accelerated motion of the object with the random nature of the anomalous emissions using the developed software, a comparative analysis of the effectiveness of modern robust filters Izanloo – Fakoorian – Yazdi – Simon, Chen – Liu – Zhao – Principe, Wang – Gao – Zhang – Ma and Särkkä – Nummenmaa, adapted to non-stationary linear continuous-discrete systems, is carried out. Computer simulation and Monte Carlo methods were used. Conducted in paper research have shown that the Izanloo – Fakoorian – Yazdi – Simon and Chen – Liu – Zhao – Principe filters have coped most successfully with the processing of anomalous data. Given the relative simplicity of the software implementation of the first of these filters, the authors recommend it for practical use. Thus it is necessary to reckon with a emerging problem of an optimum choice of the size of a Gaussian kernel.

Keywords: Kalman filter, criterion of maximum correntropy, Bayesian approximation, robust filtering, outliers, stochastic continuous-discrete system

Необходимость решения задач оценивания и фильтрации возникает во многих технических приложениях. При этом на практике (например, в задачах радиолокации, связи, навигации и управления) часто встречаются ситуации, связанные с наличием аномальных наблюдений, не содержащих достоверной информации об исследуемой системе. Причина этого может быть связана, например, с неисправностями, приводящими к изменению статистических характеристик данных, а также с отклонением распределения шумов системы и измерений от гауссовского. Использование алгоритмов оценивания, не учитывающих возможность появления аномальных наблюдений, может привести к смещению оценок параметров.

В связи с этим представляется целесообразным иметь дело с робастными процедурами оценивания.

Традиционно для решения задач оценивания и фильтрации привлекают фильтр Калмана [1–3], позволяющий находить несмещенные оценки состояния с минимальной дисперсией. Этот фильтр предполагает наличие гауссовских шумов в моделях состояния и наблюдения и будет расходиться при нарушении данного предположения. В настоящий момент разработаны многочисленные робастные модификации фильтра Калмана. Исследований по данной тематике становится все больше [4–6]. В связи с этим возникает практическая целесообразность в сравнении эффективно-

сти наиболее популярных робастных фильтров. В этом отношении особое внимание следует уделить появившимся относительно недавно так называемым коррентропийным фильтрам [7–9]. Эти фильтры являются наиболее популярными и заключаются в использовании в качестве критерия оптимальности критерия максимума коррентропии. Коррентропия определяется как статистическая мера близости между двумя случайными величинами и позволяет учитывать моменты второго и более высокого порядка. Таким образом, применение данных фильтров способствует получению качественных оценок вектора состояния при наличии негауссовских шумов.

В [10] был проведен сравнительный анализ некоторых широко известных робастных фильтров для нестационарных линейных дискретных систем. В результате проведенных исследований выявлены

два наиболее эффективных фильтра. Ими оказались фильтры Изанлу (Izanloo) – Фейкуриана (Fakoorian) – Джазди (Yazdi) – Саймона (Simon) [7] и Сярккя (Särkkä) – Нумменмаа (Nummenmaa) [4], известные по англоязычным публикациям как фильтры МСС-KF (От Maximum Correntropy Criterion Kalman Filter) и VB-AKF (От Variational Bayesian Adaptive Kalman Filter) соответственно. Настоящая работа является продолжением и естественным развитием основных результатов из [10].

На примере непрерывно-дискретной модели прямолинейного равноускоренного движения объекта провести сравнительный анализ эффективности указанных фильтров с двумя новыми коррентропийными фильтрами и выявить наиболее качественные из них.

Рассмотрим следующую управляемую, наблюдаемую модель стохастической системы в пространстве состояний:

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t)x(t) + \Psi(t)u(t) + \Gamma(t)w(t), \quad t \in [t_0, t_N], \quad (1)$$

$$y(t_{k+1}) = H(t_{k+1})x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ – n – вектор состояния, $u(t)$ – детерминированный r – вектор управления, $w(t)$ – p – вектор шума системы (возмущения), $y(t_{k+1})$ – m – вектор измерения (наблюдения), $v(t_{k+1})$ – m – вектор шума измерения.

Будем считать, что:

– случайные векторы $w(t)$ и $v(t_{k+1})$ являются стационарными белыми гауссовскими шумами, для которых

$$E[w(t)] = 0, \quad E[w(t)w^T(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau),$$

$$E[v(t_{k+1})] = 0, \quad E[v(t_{k+1})v^T(t_{i+1})] = R(t_{k+1})\delta_{ki},$$

$$E[v(t_{k+1})w^T(\tau)] = 0$$

(здесь $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания, $\delta(t - \tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ki} – символ Кронекера);

– начальное состояние $x(t_0)$ имеет нормальное распределение с параметрами

$$E[x(t_0)] = \bar{x}_0, \quad E\left\{[x(t_0) - \bar{x}_0][x(t_0) - \bar{x}_0]^T\right\} = P_0$$

и не коррелирует с $w(t)$ и $v(t_{k+1})$.

Необходимо для математической модели (1), (2) с учетом указанных априорных предположений при наличии аномальных наблюдений провести исследование эффективности некоторых перспективных, по нашему мнению, робастных фильтров.

Описание исследуемых фильтров

Приведем ниже некоторые современные адаптивные фильтры, позволяющие получать оценки вектора состояния, а также ковариационной матрицы ошибок оценивания при наличии аномальных наблюдений.

Имея дело с негауссовскими шумами в (1), (2), методы максимальной коррентропии предполагают вместо классического критерия минимума среднеквадратичной ошибки использовать следующий критерий оптимальности:

$$\max_{\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1})} \left\{ G_{\sigma}(\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}), \hat{x}(t_{k+1}|t_k)) + G_{\sigma}(y(t_{k+1}), \hat{y}(t_{k+1})) \right\}, \quad (3)$$

где

$G_{\sigma}(x, y) = \exp\left\{-\|x - y\|^2 / (2\sigma^2)\right\}$ – функция ядра Гаусса;

$\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1})$ – оценка фильтрации вектора состояния в момент времени t_{k+1} ;

$\hat{x}(t_{k+1}|t_k)$ – оценка одношагового предсказания вектора состояния;

$\hat{y}(t_{k+1}) = H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1})$ – оценка $y(t_{k+1})$, полученная по измерениям $y(t_1), \dots, y(t_{k+1})$.

Следует уточнить, что выбор размера ядра σ существенно влияет на качество работы коррентропийных фильтров. К сожалению, в настоящий момент еще не предложена какая-либо методика для априорного определения σ . В связи с этим данный параметр приходится подбирать опытным путем, что пока является слабым местом всех коррентропийных фильтров. Дополнительно уточним, что при больших значениях σ коррентропийные фильтры начинают работать значительно хуже, так как все более начинают походить на классический фильтр Калмана.

Фильтр Изанлу – Фейкуруиана – Джазди – Саймона сочетает в себе критерий максимальной коррентропии и метод взвешенных наименьших квадратов и использует один шаг метода простых итераций для решения возникающего при оптимизации критерия (3) нелинейного уравнения. Приведем алгоритм данного фильтра с использованием эквивалентных форм представления матричного коэффициента усиления $K(t_{k+1})$ и ковариационной матрицы ошибок фильтрации $P(t_{k+1}|t_{k+1})$ из [11].

Инициализация:

$$\hat{x}(t_0|t_0) = \bar{x}(t_0), \quad P(t_0|t_0) = P(t_0);$$

$$\sigma = \sigma_0.$$

Выполнять в цикле по $k = \overline{0, N-1}$

Одношаговое предсказание:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t|t_k) = F(t)x(t) + \Psi(t)u(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

$$\frac{d}{dt} P(t|t_k) = F(t)P(t|t_k) + P(t|t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Фильтрация:

$$\varepsilon(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) - H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1}|t_k);$$

$$L(t_{k+1}) = \exp\left(-\frac{\varepsilon^T(t_{k+1})R^{-1}(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1})}{2\sigma^2}\right);$$

$$B(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1}|t_k)L(t_{k+1})H^T(t_{k+1}) + R(t_{k+1});$$

$$K(t_{k+1}) = P(t_{k+1}|t_k)L(t_{k+1})H^T(t_{k+1})B^{-1}(t_{k+1});$$

$$\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}|t_k) + K(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1}|t_k).$$

Конец цикла.

В фильтре Чена – Лю – Чжао – Принципэ (в англоязычных публикациях он известен как фильтр МСКФ (От Maximum Correntropy Kalman filter)) [8] для решения оптимизационной задачи (3) был предложен новый алгоритм, использующий несколько шагов метода простых итераций (их количество зависит от выбранного параметра ε), обладающий высокой сходимостью и позволяющий находить оценки фильтрации и ковариационной матрицы ошибки фильтрации.

Инициализация:

$$\hat{x}(t_0 | t_0) = \bar{x}(t_0), \quad P(t_0 | t_0) = P(t_0);$$

$$\sigma = \sigma_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0.$$

Выполнять в цикле по $k = \overline{0, N-1}$

Одношаговое предсказание:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t | t_k) = F(t)x(t) + \Psi(t)u(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

$$\frac{d}{dt} P(t | t_k) = F(t)P(t | t_k) + P(t | t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Фильтрация:

$$\varepsilon(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) - H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1} | t_k);$$

$$B_p(t_{k+1} | t_k)B_p^T(t_{k+1} | t_k) = P(t_{k+1} | t_k);$$

$$B_r(t_{k+1})B_r^T(t_{k+1}) = R(t_{k+1});$$

$$D(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} B_p(t_{k+1}) & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & B_r(t_{k+1}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{x}(t_{k+1} | t_k) \\ y(t_{k+1}) \end{bmatrix};$$

$$W(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} B_p(t_{k+1}) & O_{n \times m} \\ O_{m \times n} & B_r(t_{k+1}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ H(t_{k+1}) \end{bmatrix};$$

$$\hat{x}^0(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k);$$

Выполнять в цикле по $i = \overline{1, L}$

$$\tilde{\varepsilon}^i(t_{k+1}) = D(t_{k+1}) - W(t_{k+1})\hat{x}^{i-1}(t_{k+1} | t_{k+1});$$

$$C_x(t_{k+1}) = \text{diag} \left(\exp \left(-\frac{(\tilde{\varepsilon}_1^i(t_{k+1}))^2}{2\sigma^2} \right), \dots, \exp \left(-\frac{(\tilde{\varepsilon}_n^i(t_{k+1}))^2}{2\sigma^2} \right) \right);$$

$$C_y(t_{k+1}) = \text{diag} \left(\exp \left(-\frac{(\tilde{\varepsilon}_{n+1}^i(t_{k+1}))^2}{2\sigma^2} \right), \dots, \exp \left(-\frac{(\tilde{\varepsilon}_{n+m}^i(t_{k+1}))^2}{2\sigma^2} \right) \right);$$

$$R^i(t_{k+1}) = B_r(t_{k+1})C_y^{-1}(t_{k+1})B_r^T(t_{k+1});$$

$$P^i(t_{k+1} | t_k) = B_p(t_{k+1} | t_k)C_x^{-1}(t_{k+1})B_p^T(t_{k+1} | t_k);$$

$$B^i(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P^i(t_{k+1} | t_k)H^T(t_{k+1}) + R^i(t_{k+1});$$

$$K^i(t_{k+1}) = P^i(t_{k+1} | t_k)H^T(t_{k+1})B^i(t_{k+1})^{-1};$$

$$\hat{x}^i(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K^i(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1}).$$

Если $\frac{\|\hat{x}^i(t_{k+1} | t_{k+1}) - \hat{x}^{i-1}(t_{k+1} | t_{k+1})\|}{\|\hat{x}^{i-1}(t_{k+1} | t_{k+1})\|} \leq \varepsilon$, то $\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^i(t_{k+1} | t_{k+1})$ и конец цикла по i .

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K^i(t_{k+1})H(t_{k+1})]P^i(t_{k+1} | t_k).$$

Конец цикла по k .

Фильтр Вана – Гао – Чжана – Ма (в англоязычных публикациях он известен как фильтр VBMSGF (От Variation Bayesian Maximum Correntropy Gaussian Filter)) [9] так же основан на критерии максимальной коррентропии в сочетании с вариационным байесовским оцениванием и используется при оценивании вектора состояния системы с неизвестными ковариационными матрицами негауссовских шумов.

Инициализация:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t_0 | t_0) &= \bar{x}(t_0), \quad P(t_0 | t_0) = P(t_0); \\ \mathbf{v}(t_0 | t_0) &= \mathbf{v}_0, \quad V(t_0 | t_0) = V_0, \quad \sigma = \sigma_0, \quad \rho = \rho_0 \in (0, 1], \quad L = L_0. \end{aligned}$$

Выполнять в цикле по $k = \overline{0, N-1}$

Одношаговое предсказание:

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t | t_k) = F(t)x(t) + \Psi(t)u(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

$$\frac{d}{dt}P(t | t_k) = F(t)P(t | t_k) + P(t | t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Фильтрация:

$$\mathbf{v}(t_{k+1} | t_k) = \rho(\mathbf{v}(t_k | t_k) - n - 1) + n + 1;$$

$$V(t_{k+1} | t_k) = \sqrt{\rho}IV(t_k | t_k)(\sqrt{\rho}I)^T;$$

$$\hat{x}^1(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k);$$

$$P^1(t_{k+1} | t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k);$$

$$\mathbf{v}(t_{k+1} | t_{k+1}) = 1 + \mathbf{v}(t_{k+1} | t_k);$$

$$V^1(t_{k+1} | t_{k+1}) = V(t_{k+1} | t_k);$$

$$\varepsilon(t_{k+1}) = y(t_{k+1}) - H(t_{k+1})\hat{x}(t_{k+1} | t_k);$$

Выполнять в цикле по $i = \overline{1, L}$

$$S^i(t_{k+1})(S^i(t_{k+1}))^T = (\mathbf{v}(t_{k+1} | t_{k+1}) - n - 1)^{-1}V^i(t_{k+1} | t_{k+1});$$

$$\tilde{\varepsilon}^i(t_{k+1}) = S^i(t_{k+1})^{-1}\varepsilon(t_{k+1});$$

$$C^i(t_{k+1}) = \text{diag} \left(\exp \left(-\frac{(\tilde{\varepsilon}_1^i(t_{k+1}))^2}{2\sigma^2} \right), \dots, \exp \left(-\frac{(\tilde{\varepsilon}_m^i(t_{k+1}))^2}{2\sigma^2} \right) \right);$$

$$R^i(t_{k+1}) = S^i(t_{k+1})C^i(t_{k+1})^{-1}(S^i(t_{k+1}))^T;$$

$$B^{i+1}(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1} | t_k)H^T(t_{k+1}) + R^i(t_{k+1});$$

$$\begin{aligned}
K^{i+1}(t_{k+1}) &= P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^{i+1}(t_{k+1})^{-1}; \\
\hat{x}^{i+1}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K^{i+1}(t_{k+1}) \varepsilon(t_{k+1}); \\
P^{i+1}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= P(t_{k+1} | t_k) - K^{i+1}(t_{k+1}) B^{i+1}(t_{k+1}) (K^{i+1}(t_{k+1}))^T; \\
V^{i+1}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= V(t_{k+1} | t_k) + H(t_{k+1}) P^{i+1}(t_{k+1} | t_{k+1}) H^T(t_{k+1}) + \\
&+ (y(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}^{i+1}(t_{k+1} | t_{k+1})) (y(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}^{i+1}(t_{k+1} | t_{k+1}))^T.
\end{aligned}$$

Конец цикла по i .

$$\begin{aligned}
V(t_{k+1} | t_{k+1}) &= V^{L+1}(t_{k+1} | t_k); \\
\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \hat{x}^{L+1}(t_{k+1} | t_{k+1}); \\
P(t_{k+1} | t_{k+1}) &= P^{L+1}(t_{k+1} | t_{k+1}).
\end{aligned}$$

Конец цикла по k .

Фильтр Сярккя – Нумменмаа не относится к коррентропийным. Он получен на основе вариационного байесовского оценивания в предположении, что ковариационная матрица шума измерений $R(t_{k+1})$ порядка m считается диагональной и неизвестной.

Инициализация:

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t_0 | t_0) &= \bar{x}(t_0), \quad P(t_0 | t_0) = P(t_0); \\
\alpha(t_0 | t_0) &= (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \dots, \alpha_{m0}), \quad \beta(t_0 | t_0) = (\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{m0}); \\
L &= L_0.
\end{aligned}$$

Выполнять в цикле по $k = \overline{0, N-1}$

Одношаговое предсказание:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t | t_k) = F(t)x(t) + \Psi(t)u(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}];$$

$$\frac{d}{dt} P(t | t_k) = F(t)P(t | t_k) + P(t | t_k)F^T(t) + \Gamma(t)Q(t)\Gamma^T(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Фильтрация:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t_{k+1}) &= y(t_{k+1}) - H(t_{k+1}) \hat{x}(t_{k+1} | t_k); \\
\alpha(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_1(t_k | t_k), \dots, \frac{1}{2} + \alpha_m(t_k | t_k) \right); \\
\beta^0(t_{k+1} | t_{k+1}) &= \beta(t_k | t_k).
\end{aligned}$$

Выполнять в цикле по $i = \overline{1, L}$

$$R^i(t_{k+1}) = \text{diag} \left(\frac{\beta_1^{i-1}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\alpha_1(t_{k+1} | t_{k+1})}, \dots, \frac{\beta_m^{i-1}(t_{k+1} | t_{k+1})}{\alpha_m(t_{k+1} | t_{k+1})} \right);$$

$$B^i(t_{k+1}) = H(t_{k+1})P(t_{k+1} | t_k)H^T(t_{k+1}) + R^i(t_{k+1});$$

$$K^i(t_{k+1}) = P(t_{k+1} | t_k) H^T(t_{k+1}) B^i(t_{k+1})^{-1};$$

$$\hat{x}^i(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1} | t_k) + K^i(t_{k+1})\varepsilon(t_{k+1});$$

$$P^i(t_{k+1} | t_{k+1}) = [I - K^i(t_{k+1})H(t_{k+1})]P(t_{k+1} | t_k).$$

Выполнять в цикле по $j = \overline{1, m}$

$$\beta_j^i(t_{k+1} | t_{k+1}) = \beta_j(t_k | t_k) + \frac{1}{2} \left((y(t_{k+1}) - H(t_{k+1})\hat{x}^i(t_{k+1} | t_{k+1})) \right)_j^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (H(t_{k+1})P^i(t_{k+1} | t_{k+1})H^T(t_{k+1}))_{jj}.$$

Конец цикла по j .
Конец цикла по i .

$$\hat{x}(t_{k+1} | t_{k+1}) = \hat{x}^L(t_{k+1} | t_{k+1});$$

$$P(t_{k+1} | t_{k+1}) = P^L(t_{k+1} | t_{k+1});$$

$$\beta(t_{k+1} | t_{k+1}) = \beta^L(t_{k+1} | t_{k+1}).$$

Конец цикла по k .

Результаты исследования и их обсуждение

Проведем исследование эффективности указанных подходов на примере модели прямолинейного равноускоренного движения объекта под влиянием внешней среды. Первая компонента состояния – это положение объекта, вторая – скорость, третья – ускорение. Предположим, измеряется (с некоторой ошибкой) скорость объекта. Модели состояния и измерения приведены ниже.

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w(t), \quad t \in [0, 10];$$

$$y(t_{k+1}) = [0 \quad 1 \quad 0]x(t_{k+1}) + v(t_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, 99.$$

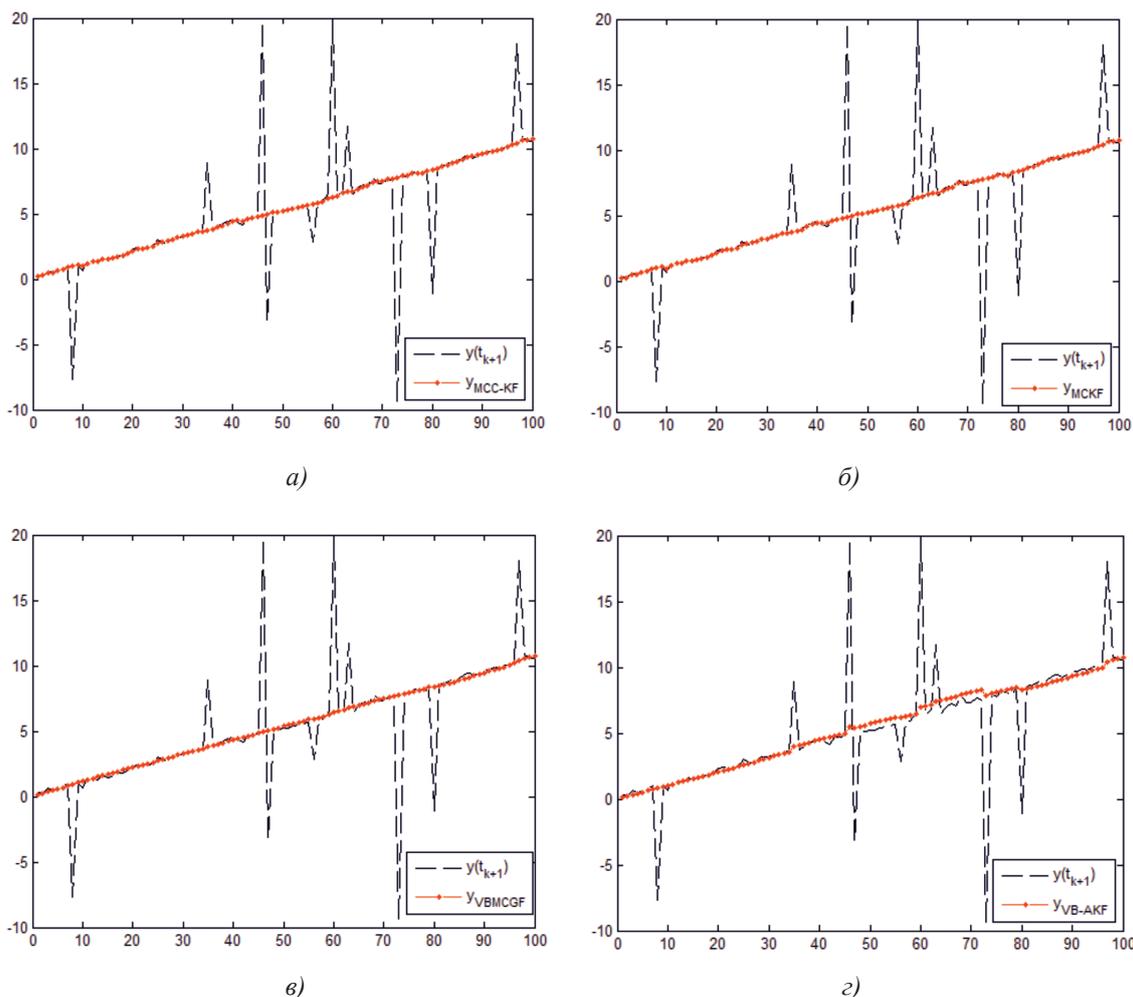
Будем считать, что выполняются все априорные предположения, высказанные при постановке задачи, причем $Q(t_{k+1}) = \text{diag}[0.01, 0.01, 0.01]$, $R(t_{k+1}) = 0.01$, $\bar{x}(t_0) = [0, 0, 1]^T$, $P_0 = \text{diag}[0.01, 0.01, 0.01]$. Примем, что измерения производятся равномерно через каждые $\Delta t = 0,1$ с и значения различных параметров в исследуемых фильтрах выбраны в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

Значение параметров робастных фильтров

Фильтр	Значение параметров фильтра
МСС-KF	$\sigma_0 = 10$
МСКF	$\sigma_0 = 10, \varepsilon_0 = 10^{-8}$
VBMCGF	$v_0 = 4, V_0 = \text{diag}[0, 1, 0, 1], \sigma_0 = 10, \rho_0 = 0,8, L_0 = 4$
VB-AKF	$\alpha_{i_0} = \beta_{i_0} = 1, i = 1, \dots, m, L_0 = 4$

Смоделируем с помощью программной среды Matlab выборку с аномальными наблюдениями, задав коэффициент загрязнения выборки $\lambda = 0,1$ и дисперсию шума аномальных наблюдений $R_A(t_{k+1}) = 10000R(t_{k+1})$. Предположим, что обрабатываются данные со случайным характером аномальных измерений. Приведем графическое представление результатов фильтрации на рисунке.



Графическое представление $y(t_{k+1})$ и $\hat{y}(t_{k+1})$ при использовании:
 а) MCC-KF; б) MCKF; в) VBMCGF; г) VB-AKF

Для ослабления зависимости результатов оценивания от выборочных данных проведем $M = 100$ различных запусков системы. О качестве оценивания будем судить по значению усредненного квадратного корня среднеквадратичной ошибки (Root Mean Square Error), которое будем вычислять для каждой компоненты вектора состояния по следующей формуле:

$$RMSE_i = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=0}^{N-1} (x_i^j(t_{k+1}) - \hat{x}_i^j(t_{k+1} | t_{k+1}))^2}.$$

Здесь под $x_i^j(t_{k+1})$ и $\hat{x}_i^j(t_{k+1} | t_{k+1})$ понимаются, соответственно, значения i -й компоненты вектора состояния и оценки фильтрации, полученные при j -м запуске системы. Численные результаты фильтрации представлены в табл. 2.

Таблица 2

Численные результаты процедуры фильтрации

Фильтр	$RMSE_1$	$RMSE_2$	$RMSE_3$	$\ RMSE\ $
MCC-KF	0,180	0,093	0,112	0,232
MCKF	0,173	0,092	0,107	0,224
VBMCGF	0,271	0,162	0,111	0,334
VB-AKF	0,926	0,358	0,133	1,002

Исходя из табл. 2, можно сделать вывод, что среди рассмотренных фильтров наиболее устойчивыми к обработке измерительных данных с аномальными наблюдениями оказались фильтры Изанлу – Фейкуриана – Джазди – Саймона и Чена – Лю – Чжао – Принципэ.

Выводы

В работе проведено исследование эффективности некоторых современных робастных фильтров для моделей стохастических непрерывно-дискретных систем. При этом наилучшие и вполне сопоставимые между собой результаты показали фильтры Изанлу – Фейкуриана – Джазди – Саймона и Чена – Лю – Чжао – Принципэ. Учитывая относительную простоту программной реализации первого из указанных фильтров, авторы рекомендуют его к практическому применению.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00283.

Список литературы

1. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / пер. с англ. М.: Связь, 1976. 496 с.
2. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров случайных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1990. 208 с.
3. Grewal M.S., Andrews A.P. Kalman filtering: theory and practice using MATLAB. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008. 575 p.
4. Sarkka S., Nummenmaa A. Recursive noise adaptive Kalman filtering by variational Bayesian approximations. IEEE Transactions on Automatic control. 2009. Vol. 54. P. 596–600.
5. Bavdekar V.A., Deshpande A.P. and Patwardhan S.C. Identification of process and measurement. Journal of Process Control. 2011. Vol. 21. P. 585–601.
6. Gao W., Li J., Zhou J., Li Q. Adaptive Kalman filtering with recursive noise estimator for integrated SINS/ DVL systems. The journal of navigation. 2015. Vol. 68. P. 140–161.
7. Izanloo R., Fakoorian S.A., Yazdi H.S., Simon D. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise. Annual Conference on Information Science and Systems (CISS), Princeton, USA: proceedings. 2016. P. 500–505.
8. Chen B., Liu X., Zhao H., Principe J. Maximum correntropy Kalman filter. Automatica. 2017. Vol. 76. P. 70–77.
9. Wang G., Gao Z., Zhang Y., Ma B. Adaptive Maximum Correntropy Gaussian Filter Based on Variational Bayes. Sensors 2018. Vol. 18 (6). 1960.
10. Чубич В.М., Прокофьева А.Э. Сравнительный анализ некоторых робастных фильтров для нестационарных линейных дискретных систем // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21. № 12 (131). С. 123–137.
11. Kulikova M.V. Square-root algorithms for maximum correntropy estimation of linear discrete-time systems in presence of non-Gaussian noise. Systems & Control Letters. 2017. Vol. 108. P. 8–15.