

УДК 539.32: 621.793.79

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЛАЗМЕННОГО НАПЫЛЕНИЯ ПОКРЫТИЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД^{1,2}Трифонов Г.И., ¹Поленов В.С., ²Жачкин С.Ю.¹Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина», Воронеж, e-mail: grishakip@yandex.ru;²ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет», Воронеж, e-mail: zhach@list.ru

В статье рассматриваются вопросы математического описания физических и химических преобразований композитного порошкового вещества под действием транспортирующего и плазмообразующего газов, а также электрической дуги. В качестве объекта исследования выбран плазменный поток с композитными частицами порошка. Стоит отметить, что зачастую использованию плазменных технологий препятствует недостаток систематизированной информации о закономерностях и возможностях соответствующих технологических процессов. Поэтому при планировании использования технологии плазменного напыления, в частности при прогнозировании кинематических характеристик плазменного потока, была разработана математическая модель, описывающая распространение упругих волн в трёхкомпонентной среде. Причем для более точного описания эксплуатационных свойств и параметров композитных материалов введено понятие – идеализированная среда. Целесообразность использования идеализированной среды заключается в том, что она в полной мере отражает изменения эксплуатационных и технологических параметров реальных сред в заданном интервале нагрузок и температур. В итоге смоделирована уточненная математическая модель на основе распространения нестационарных волн в трёхкомпонентной среде при образовании плазменного потока напыления. Также в ходе математического моделирования получена таблица теоретическими показателями тензоров напряжений и весовых коэффициентов процесса плазменного напыления. Построены графики зависимости скорости распространения продольных волн в материале плазменного покрытия от физико-механических характеристик – модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Ключевые слова: математическое моделирование, плазменное напыление, упругие волны, трёхкомпонентная среда, модуль Юнга, коэффициент Пуассона

MATHEMATICAL MODELING OF PROCESSES PLASMA SPRAY COATINGS THREE-COMPONENT ENVIRONMENTS^{1,2}Trifonov G.I., ¹Polenov V.S., ²Zhachkin S.Yu.¹Military training and research center of the Air force «Air force academy named after professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin», Voronezh, e-mail: grishakip@yandex.ru;²Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Voronezh State Technical University», Voronezh, e-mail: zhach@list.ru

The article deals with the mathematical description of physical and chemical transformations of composite powder substance under the action of transporting and plasma-forming gases, as well as electric arc. Plasma flow with composite powder particles was chosen as the object of study. It is worth noting that the use of plasma technologies is often hampered by a lack of systematic information about the laws and capabilities of the relevant technological processes. Therefore, when planning the use of plasma deposition technology, in particular when predicting the kinematic characteristics of the plasma flow, a mathematical model describing the propagation of elastic waves in a three-component medium was developed. And for a more accurate description of the performance properties and parameters of composite materials introduced the concept – idealized environment. The feasibility of using an idealized environment is that it fully reflects the changes in the operational and technological parameters of real environments in a given range of loads and temperatures. As a result, a refined mathematical model based on the propagation of unsteady waves in a three-component medium in the formation of a plasma deposition flux is simulated. Also in the process of mathematical modeling, the obtained table of the theoretical indicators of the stress tensor and the weighting coefficients of the plasma spraying process. Graphs of the velocity of longitudinal waves propagation in the plasma coating material on the physical and mechanical characteristics-young's modulus and Poisson's ratio are plotted.

Keywords: mathematical modeling, plasma spraying, elastic waves, three-component medium, Young's modulus, Poisson's ratio

В промышленности уже заняло достаточно прочные позиции плазменное напыление покрытий. При этом зачастую эффективному использованию плазменных технологий препятствует недостаток систематизированной информации о закономерностях и возможностях соответствующих технологических процессов, что затрудняет

выбор оптимальной технологии для решения конкретных производственных задач, назначение режимов обработки, прогнозирование результатов [1].

До настоящего времени источником основной информации о процессе образования плазменной струи с необходимыми эксплуатационными характеристиками

остается эксперимент. Поэтому большое значение при планировании плазменного напыления приобретает экспериментальное построение формальной модели при широком применении математических методов планирования.

При этом стоит учитывать, что при описании физических и химических характеристик плазменного напыления, в частности преобразования композитного порошкового вещества под действием приложенного к нему импульса давления, применение математического моделирования – весьма трудоемкий и сложный процесс. Поэтому разрабатываются математические модели, которые учитывают конкретные преобразования композитного вещества в ходе его эксплуатации [2].

Цель исследования: разработка математической модели на основе распространения нестационарных волн в трехкомпонентной среде при образовании плазменной струи.

Материалы и методы исследования

Вопросу по распространению упругих волн в двухкомпонентных средах посвящено множество научных трактатов и работ. Среди них стоит выделить труды заслуженного ученого М.А. Био [3–5].

Взаимосвязывающее перемещение твердого тела (композитного порошка), газа и жидкости будем рассматривать как перемещение порошка, жидкости и газа в деформируемой пористой среде.

Введем уточнение, что габаритные размеры пор весьма малы в сравнении с расстоянием, на котором значительное изменение претерпевают кинематические и динамические показатели движения. Что в итоге позволяет нам полагать, что три среды сплошные и в любой координате пространства будет три вектора смещения [6].

Доказано, что в такой среде в общем случае распространяется три волны, скорости которых существенным образом зависят от направления распространения волновой поверхности.

Стоит отметить, что материалы (композитный порошок, плазмообразующие газы и плазма) весьма неоднотипно реагируют на приходящиеся на них нагрузки и факторы внешней среды. Следовательно, для каждой среды должны быть заданы реологические соотношения, отражающие ее термомеханические свойства. Отталкиваясь от заданной температуры и давления при плазменном напылении, одно и то же вещество может находиться в твердом, жидком или газообразном состоянии, а его реологическая модель будет либо упругой, либо вязкой и т.д. Чтобы решить приведенную особенность плазменного напыления, для описания эксплуатационных параметров веществ, применяемых на всех стадиях процесса, вводится понятие – идеализированная среда [7].

На базе идеализированной среды запишем систему уравнений, определяющую динамическое поведение упругой, насыщенной жидкостью и газом трехкомпонентной среды в перемещениях компонент [6], выражая коэффициенты Ламе λ , μ через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν по формулам [8]:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda + 2\mu = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \Lambda \quad (1)$$

– полный тензор напряжений в скелете при наличии жидкости и газа в порах:

$$T_{ij} = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{k,k}^{(1)} \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}) +$$

$$+ (1-m)R_0^{(2)} u_{k,k}^{(2)} \delta_{ij} + (1-m)R_0^{(3)} u_{k,k}^{(3)} \delta_{ij} \quad (2)$$

– силы, действующие на плазму (жидкость) и плазмообразующий газ:

$$N = (1-m)R_0^{(2)} u_{k,k}^{(1)} + mR_0^{(2)} u_{k,k}^{(2)} + (1-m)R_0^{(3)} u_{k,k}^{(3)}, \quad (3)$$

$$P = (1-m)R_0^{(3)} u_{k,k}^{(1)} + (1-m)R_0^{(3)} u_{k,k}^{(2)} + mR_0^{(3)} u_{k,k}^{(3)}$$

– уравнения движения пористой среды:

$$\rho_{11} \ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{12} \ddot{u}_i^{(2)} + \rho_{13} \ddot{u}_i^{(3)} = T_{ij,j},$$

$$\rho_{12} \ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{22} \ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{23} \ddot{u}_i^{(3)} = N_{,i}, \quad (4)$$

$$\rho_{13} \ddot{u}_i^{(1)} + \rho_{23} \ddot{u}_i^{(2)} + \rho_{33} \ddot{u}_i^{(3)} = P_{,i}.$$

Здесь ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} – эффективные плотности порошковой механической смеси для плазменного напыления, плазмы и плазмообразующего газа соответственно (кг/м^3); $\rho_{12} < 0$, $\rho_{13} < 0$, $\rho_{23} < 0$ – коэффициенты динамической связи скелета; $R_0^{(2)}$, $R_0^{(3)}$ – коэффициенты сжимаемости компонент, заполненных жидкостью и газом; $u_j^{(a)}$ – перемещения компонент. В скобках цифры сверху обозначают: 1 – твердая компонента, 2 – жидкость, 3 – газ. Предполагается $\rho_{ji} = \rho_{ij}$. По повторяющимся индексам здесь и в дальнейшем проводится суммирование от 1 до 3.

Под волной ускорения в наполненной композитными элементами плазмой и плазмообразующим газом трехкомпонентной пористой среде понимается поверхность, на которой напряжения и силы, направленные на плазменный поток, плазмообразующий газ, композитные элементы и скорости перемещения компонент непрерывны.

Продифференцируем соотношения (2) и (3) по t и получим

$$\dot{T}_{ij} = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} V_{k,k}^{(1)} \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)} (V_{i,j}^{(1)} + V_{j,i}^{(1)}) +$$

$$+ (1-m)R_0^{(2)} V_{k,k}^{(2)} \delta_{ij} + (1-m)R_0^{(3)} V_{k,k}^{(3)} \delta_{ij},$$

$$\dot{N} = (1-m)R_0^{(2)} V_{k,k}^{(1)} + mR_0^{(2)} V_{k,k}^{(2)} + (1-m)R_0^{(3)} V_{k,k}^{(3)}, \quad (5)$$

$$\dot{P} = (1-m)R_0^{(3)} V_{k,k}^{(1)} + (1-m)R_0^{(3)} V_{k,k}^{(2)} + mR_0^{(3)} V_{k,k}^{(3)}.$$

Запишем уравнениям (4) и соотношения (5) разрывов [9]:

$$\frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)} [V_{k,k}^{(1)}] \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)} ([V_{i,j}^{(1)}] + [V_{j,i}^{(1)}]) +$$

$$+ (1-m)R_0^{(2)} [V_{k,k}^{(2)}] \delta_{ij} + (1-m)R_0^{(3)} [V_{k,k}^{(3)}] \delta_{ij} = \dot{T}_{ij},$$

$$\begin{aligned}
(1-m)R_0^{(2)}[V_{k,k}^{(1)}] + mR_0^{(2)}[V_{k,k}^{(2)}] + (1-m)R_0^{(2)}[V_{k,k}^{(3)}] &= [\dot{N}], \\
(1-m)R_0^{(3)}[V_{k,k}^{(1)}] + (1-m)R_0^{(3)}[V_{k,k}^{(2)}] + mR_0^{(3)}[V_{k,k}^{(3)}] &= [\dot{P}], \\
\rho_{11}[\dot{V}_i^{(1)}] + \rho_{12}[\dot{V}_i^{(2)}] + \rho_{13}[\dot{V}_i^{(3)}] &= [T_{ij,j}], \\
\rho_{12}[\dot{V}_i^{(1)}] + \rho_{22}[\dot{V}_i^{(2)}] + \rho_{23}[\dot{V}_i^{(3)}] &= [N_{,i}], \\
\rho_{13}[\dot{V}_i^{(1)}] + \rho_{23}[\dot{V}_i^{(2)}] + \rho_{33}[\dot{V}_i^{(3)}] &= [P_{,i}].
\end{aligned} \tag{6}$$

К соотношениям (6) применим кинематические и геометрические условия совместности первого порядка на поверхности разрыва [10]:

$$\begin{aligned}
[T_{ik,k}] &= s_{ik} v_k, \quad [\dot{T}_{ik}] = -s_{ik} G, \quad [N_{,k}] = \eta v_k, \quad [\dot{N}] = -\eta G, \\
[P_{,i}] &= \gamma v_i, \quad [\dot{P}] = -\gamma G, \quad [V_{i,k}^{(\alpha)}] = \lambda_i^{(\alpha)} v_k, \quad [\dot{V}_i^{(\alpha)}] = -\lambda_i^{(\alpha)} G \quad (\alpha = 1, 2, 3).
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $s_{ik}, \eta, \gamma, \lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}, \lambda_i^{(3)}$ – величины, характеризующие скачки первых производных напряжений, сил, действующих на плазму и плазмообразующий газ и скоростей перемещения компонент; v_i – единичный вектор нормали к волновой поверхности; G – скорость распространения волновой поверхности пористой среды.

Используя условия (7), формулы (6) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \lambda_k^{(1)} v_k \delta_{ij} + \frac{E}{2(1+v)} (\lambda_i^{(1)} v_j + \lambda_j^{(1)} v_i) + (1-m)R_0^{(2)} \lambda_k^{(2)} v_k \delta_{ij} + \\
+ (1-m)R_0^{(3)} \lambda_k^{(3)} v_k \delta_{ij} &= -s_{ij} G, \\
(1-m)R_0^{(2)} \lambda_k^{(1)} v_k + mR_0^{(2)} \lambda_k^{(2)} v_k + (1-m)R_0^{(2)} \lambda_k^{(3)} v_k &= -\eta G, \\
(1-m)R_0^{(3)} \lambda_k^{(1)} v_k + (1-m)R_0^{(3)} \lambda_k^{(2)} v_k + mR_0^{(3)} \lambda_k^{(3)} v_k &= -\gamma G, \\
\rho_{11} \lambda_i^{(1)} G + \rho_{12} \lambda_i^{(2)} G + \rho_{13} \lambda_i^{(3)} G &= -s_{ij} v_j, \\
\rho_{12} \lambda_i^{(1)} G + \rho_{22} \lambda_i^{(2)} G + \rho_{23} \lambda_i^{(3)} G &= -\eta v, \\
\rho_{13} \lambda_i^{(1)} G + \rho_{23} \lambda_i^{(2)} G + \rho_{33} \lambda_i^{(3)} G &= -\gamma v_i.
\end{aligned} \tag{8}$$

Исключая из (8) величины s_{ij}, η, γ , получим однородную систему уравнений относительно $\lambda_k^{(1)}, \lambda_k^{(2)}, \lambda_k^{(3)}$ [11]:

$$\begin{aligned}
\frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} \lambda_k^{(1)} v_k v_i + \frac{E}{2(1+v)} (\lambda_i^{(1)} + \lambda_j^{(1)} v_i v_j) + (1-m)R_0^{(2)} \lambda_k^{(2)} v_k v_i + \\
+ (1-m)R_0^{(3)} \lambda_k^{(3)} v_k v_i &= \rho_{11} G^2 \lambda_i^{(1)} + \rho_{12} G^2 \lambda_i^{(2)} + \rho_{13} G^2 \lambda_i^{(3)}, \\
(1-m)R_0^{(2)} \lambda_k^{(1)} v_k v_i + mR_0^{(2)} \lambda_k^{(2)} v_k v_i + (1-m)R_0^{(2)} \lambda_k^{(2)} v_k v_i &= \\
= \rho_{12} G^2 \lambda_i^{(1)} + \rho_{22} G^2 \lambda_i^{(2)} + \rho_{23} G^2 \lambda_i^{(3)}, \\
(1-m)R_0^{(3)} \lambda_k^{(1)} v_k v_i + (1-m)R_0^{(3)} \lambda_k^{(2)} v_k v_i + mR_0^{(3)} \lambda_k^{(3)} v_k v_i &= \\
= \rho_{13} G^2 \lambda_i^{(1)} + \rho_{23} G^2 \lambda_i^{(2)} + \rho_{33} G^2 \lambda_i^{(3)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Полагая, что $\lambda_k^{(\alpha)} v_k \neq 0$, на волновой поверхности, умножим (9) на v_i и просуммируем по повторяющемуся индексу i , получим однородную систему трех линейных уравнений относительно $w_\alpha = \lambda_k^{(\alpha)} v_k$ ($\alpha = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
\{\Lambda - \rho_{11} G^2\} \omega_1 + \{(1-m)R_0^{(2)} - \rho_{12} G^2\} \omega_2 + \{(1-m)R_0^{(3)} - \rho_{13} G^2\} \omega_3 &= 0, \\
\{(1-m)R_0^{(2)} - \rho_{12} G^2\} \omega_1 + \{mR_0^{(2)} - \rho_{22} G^2\} \omega_2 + \{(1-m)R_0^{(2)} - \rho_{23} G^2\} \omega_3 &= 0, \\
\{(1-m)R_0^{(3)} - \rho_{13} G^2\} \omega_1 + \{(1-m)R_0^{(3)} - \rho_{23} G^2\} \omega_2 + \{mR_0^{(3)} - \rho_{33} G^2\} \omega_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \frac{\rho_{11}}{\rho}, \gamma_{12} = \frac{\rho_{12}}{\rho}, \gamma_{22} = \frac{\rho_{22}}{\rho}, \gamma_{13} = \frac{\rho_{13}}{\rho}, \gamma_{23} = \frac{\rho_{23}}{\rho}, \\ \gamma_{33} &= \frac{\rho_{33}}{\rho}, \rho = \rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} + 2\rho_{13} + 2\rho_{23} + \rho_{33}, \\ \sigma_{11} &= \frac{\Lambda}{M}, \sigma_{12} = \frac{(1-m)R_0^{(2)}}{M}, \sigma_{22} = \frac{mR_0^{(2)}}{M}, \sigma_{13} = \sigma_{23} = \frac{(1-m)R_0^{(3)}}{M}, \\ \sigma_{33} &= \frac{mR_0^{(3)}}{M}, M = \Lambda + 2(1-m)R_0^{(2)} + mR_0^{(2)} + 2(1-m)R_0^{(3)} + mR_0^{(3)}.\end{aligned}\quad (11)$$

С учетом (11) систему (10) запишем в безразмерной форме:

$$\begin{aligned}\{\sigma_{11} - \gamma_{11}a_l^2\}\omega_1 + \{\sigma_{12} - \gamma_{12}a_l^2\}\omega_2 + \{\sigma_{13} - \gamma_{13}a_l^2\}\omega_3 &= 0, \\ \{\sigma_{12} - \gamma_{12}a_l^2\}\omega_1 + \{\sigma_{22} - \gamma_{22}a_l^2\}\omega_2 + \{\sigma_{12} - \gamma_{23}a_l^2\}\omega_3 &= 0, \\ \{(\sigma_{13} - \gamma_{13}a_l^2)\omega_1 + \{\sigma_{13} - \gamma_{23}a_l^2\}\omega_2 + \{\sigma_{33} - \gamma_{33}a_l^2\}\omega_3 &= 0, \quad c_l^2 = \frac{M}{\rho}, \quad a_l^2 = \frac{G_l^2}{c_l^2}.\end{aligned}\quad (12)$$

Условие существования нетривиальных решений системы (12), однородной относительно w_1, w_2, w_3 определяет три скорости волн ускорений в насыщенной жидкостью и газом пористой среде, которые находятся из определителя третьего порядка, составленного из коэффициентов при неизвестных w_1, w_2, w_3 системы (12):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \gamma_{11}a_l^2 & \sigma_{12} - \gamma_{12}a_l^2 & \sigma_{13} - \gamma_{13}a_l^2 \\ \sigma_{12} - \gamma_{12}a_l^2 & \sigma_{22} - \gamma_{22}a_l^2 & \sigma_{12} - \gamma_{23}a_l^2 \\ \sigma_{13} - \gamma_{13}a_l^2 & \sigma_{13} - \gamma_{23}a_l^2 & \sigma_{33} - \gamma_{33}a_l^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Для вычисления определителя Δ справедлива формула разложения данного определителя по элементам i -го столбца [12]:

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad (j = \overline{1,3}), \quad (14)$$

где i – номер столбца; j – номер строки; a_{ij} – элемент определителя, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца; M_{ij} – минор элемента матрицы третьего порядка.

Раскрывая определитель (13) по формуле (14) и сделав замену $z = a_l^2 = \frac{G_l^2}{c_l^2}$, получим кубическое уравнение относительно z :

$$kz^3 + bz^2 + dz + f = 0,$$

$$\begin{aligned}b &= \sigma_{22}\gamma_{11}\gamma_{33} + \sigma_{33}\gamma_{11}\gamma_{22} - \sigma_{13}\gamma_{11}\gamma_{23} - \sigma_{12}\gamma_{11}\gamma_{23} - \sigma_{12}\gamma_{12}\gamma_{33} - \sigma_{33}\gamma_{12}^2 + \sigma_{13}\gamma_{12}\gamma_{13} + \sigma_{13}\gamma_{12}\gamma_{23} + \sigma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} + \\ &+ \sigma_{12}\gamma_{12}\gamma_{13} - \sigma_{22}\gamma_{13}^2 - \sigma_{13}\gamma_{13}\gamma_{22} + \sigma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} - \sigma_{11}\gamma_{23}^2 - \sigma_{12}\gamma_{12}\gamma_{33} + \sigma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} + \sigma_{13}\gamma_{12}\gamma_{23} - \sigma_{13}\gamma_{13}\gamma_{22},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d &= -\sigma_{11}\sigma_{22}\gamma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{33}\gamma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{13}\gamma_{23} + \sigma_{11}\sigma_{12}\gamma_{23} + \sigma_{12}\sigma_{12}\gamma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{33}\gamma_{12} - \sigma_{12}\sigma_{13}\gamma_{13} - \\ &- \sigma_{12}\sigma_{13}\gamma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{12}\gamma_{23} - \sigma_{13}\sigma_{12}\gamma_{12} + \sigma_{13}\sigma_{22}\gamma_{13} + \sigma_{13}\sigma_{13}\gamma_{22} - \sigma_{22}\sigma_{33}\gamma_{11} + \\ &+ \sigma_{12}\sigma_{13}\gamma_{11} + \sigma_{12}\sigma_{33}\gamma_{12} - \sigma_{13}^2\gamma_{12} - \sigma_{12}^2\gamma_{13} + \sigma_{13}\sigma_{22}\gamma_{13},\end{aligned}\quad (15)$$

$$f = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{12}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} + \sigma_{12}\sigma_{13}^2 + \sigma_{13}\sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2\sigma_{22}.$$

Коэффициенты $\sigma_{11}, \dots, \sigma_{33}$ находятся по формулам (11). Решение кубического уравнения (15) находим по формулам Кардана [13]. Для решения уравнения (15) разделим его на k и введем новую переменную $y = z + \frac{b}{3k}$, тогда после преобразования получим:

$$y^3 + 3py + 2q = 0, \quad 3p = \frac{3kd - b^2}{3k^2}, \quad 2q = \frac{2b^3}{27k^3} - \frac{bd}{3k^2} + \frac{f}{k}. \quad (16)$$

Вычислим дискриминант $D = q^2 + p^3$. Если $D < 0$, то рассматриваемое уравнение обладает тремя действительными корнями, которые записываются как комплексные величины. Если $D > 0$, то уравнение имеет несколько различных решений, а именно одно действительное и два мнимых. Если $D = 0$, то имеем три совпавших нулевых корня или имеем три действительных решения, два из которых совпадают.

Таким образом, в трехкомпонентной пористой среде распространяются три продольные волны в зависимости от дискриминанта кубического уравнения. Если связь между компонентами жидкость – газ и упругость – газ в среде отсутствует $\gamma_{13} = 0, \gamma_{23} = 0, \sigma_{23} = 0$, то кубическое уравнение (15) сводится к квадратному уравнению:

$$k_1 z^2 + b_1 z + d_1 = 0, \quad k_1 = \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2, \quad b_1 = 2\sigma_{12}\gamma_{12} - \sigma_{22}\gamma_{11} - \sigma_{11}\gamma_{22}, \quad d_1 = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2. \quad (17)$$

Уравнение (17) совпадает с уравнением работы [6].

Положим в системе (9) $\lambda_i^{(0)}v_i (\alpha = 1, 2, 3)$. Тогда получим $G = G_i$:

$$\begin{aligned} \{\sigma'_{11} - \gamma_{11}a_t^2\}\omega_1 + \gamma_{12}a_t^2\omega_2 + \gamma_{13}a_t^2\omega_3 &= 0, \quad \gamma_{12}a_t^2\omega_1 + \gamma_{22}a_t^2\omega_2 + \gamma_{23}a_t^2\omega_3 = 0, \\ \gamma_{13}a_t^2\omega_1 + \gamma_{23}a_t^2\omega_2 + \gamma_{33}a_t^2\omega_3 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sigma'_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)M'}, \quad M' = \mu + 2(1-m)R_0^{(2)} + mR_0^{(2)} + 2(1-m)R_0^{(3)} + mR_0^{(3)},$$

$$c_t^2 = \frac{M'}{\rho}, \quad a_t^2 = \frac{G_i}{c_t^2}.$$

Условием существования ненулевых решений системы (18) является ее определитель, составленный из коэффициентов при $\lambda_i^{(0)} (\alpha = 1, 2, 3)$ и который должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11}a_t^2 - \sigma'_{11} & \gamma_{12}a_t^2 & \gamma_{13}a_t^2 \\ \gamma_{12}a_t^2 & \gamma_{22}a_t^2 & \gamma_{23}a_t^2 \\ \gamma_{13}a_t^2 & \gamma_{23}a_t^2 & \gamma_{33}a_t^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Раскрывая уравнение (19) по формуле (14), получим выражение для нахождения скорости поперечной волны, распространяющейся в трехкомпонентной среде:

$$a_t = \frac{G_i}{c_t} = \sqrt{\frac{(\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{23}^2)E}{2(1+\nu)M'(\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} - \gamma_{13}^2\gamma_{22} - \gamma_{11}\gamma_{23}^2 + \gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} + \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} - \gamma_{12}^2\gamma_{33})}}. \quad (20)$$

Если связь между плазмой и плазмообразующим газом, композитным материалом и плазмообразующим газом отсутствует, $\gamma_{23} = 0, \gamma_{13} = 0$, то из (20) следует

$$\frac{G_i}{c_t} = \sqrt{\frac{E\gamma_{22}}{2(1+\nu)(\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2)}}. \quad (21)$$

Формула (21) совпадает с формулой, полученной в работе [6].

Результаты исследования и их обсуждение

Согласно внесенным данным в идеализированную среду, а также результатам расчетов уравнений (11), получаем сводную таблицу значений.

Таблица значений тензоров напряжений и весовых коэффициентов

№ п/п	1	2	3	4	5
σ_{11}	1	1	1	1	1
σ_{12}	6,5E-13	6,14E-13	5,86E-13	5,63E-13	5,46E-13
σ_{22}	1,15E-13	1E-13	8,75E-14	7,68E-14	6,75E-14
σ_{13}	1,08E-12	1,06E-12	1,05E-12	1,01E-12	9,71E-13
σ_{23}	1,08E-12	1,06E-12	1,05E-12	1,01E-12	9,71E-13
σ_{33}	1,91E-13	1,73E-13	1,58E-13	1,37E-13	1,2E-13
γ_{34}	1,049211	1,044258	1,039306	1,094341	1,061377
γ_{12}	-0,01	-0,015	-0,02	-0,015	-0,012
γ_{22}	0,020493	0,01647	0,030446	0,030423	0,017399
γ_{13}	-0,04	-0,03	-0,02	-0,08	-0,05
γ_{23}	-0,01	-0,001	-0,01	-0,015	-0,005
γ_{33}	0,050296	0,031272	0,030248	0,095236	0,055224

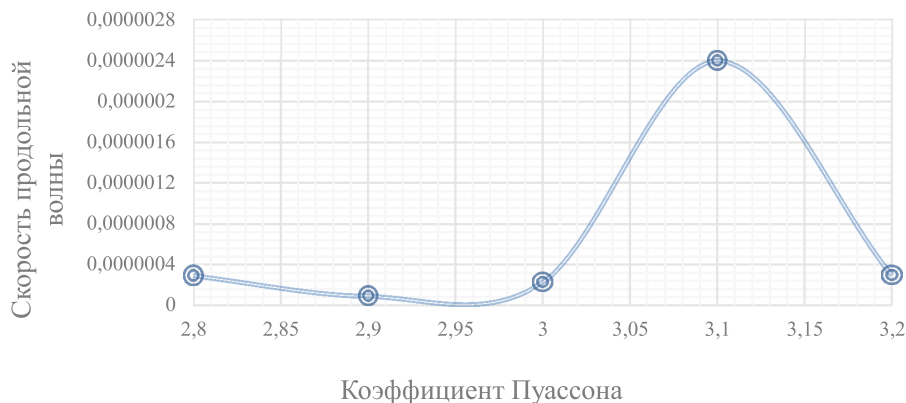


Рис. 1. Зависимость коэффициента Пуассона от скорости распространения продольной волны

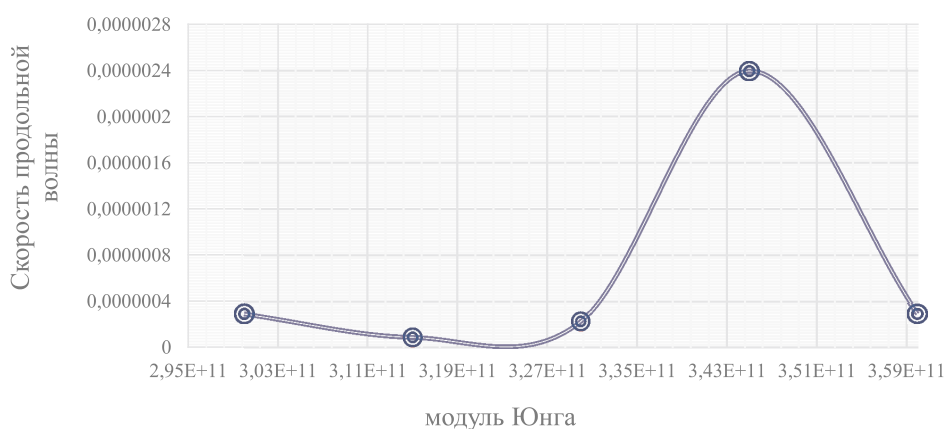


Рис. 2. Зависимость модуля Юнга от скорости распространения продольной волны

На основе таблицы сводных значений тензоров напряжений и весовых коэффициентов составим графики зависимостей. На рис. 1 и 2 изображена зависимость скорости распространения продольной упругой волны в композитном материале от его физико-механических характеристик – модуля Юнга и коэффициента Пуассона.

Выводы

Разработана математическая модель на основе распространения нестационарных волн в трехкомпонентной среде при образовании плазменной струи.

Построены графики зависимости скорости распространения продольных волн в материале плазменного покрытия от его технических модулей, таких как модуль Юнга и коэффициента Пуассона.

Список литературы

1. Пузряков А.Ф. Теоретические основы технологии плазменного напыления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Е. Баумана, 2008. 360 с.
2. Трифонов Г.И., Жачкин С.Ю., Краснова М.Н., Пеньков Н.А. Моделирование кинематики плазменного напыле-

ния на сложнопровольные поверхности // Труды ГОСНИТИ. 2017. Т. 128. С. 133–139.

3. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid I. Low-Frequency Range. J. Acoust. Soc. America. 1956. vol. 28. no 2. P. 168–178.

4. Biot M.A. Theory propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher Frequency Range. J. Acoust. Soc. America. 1956. vol. 28. no 2. P. 179–191.

5. Biot M.A. Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media. Journal of Applied Physic. 1962. vol. 33. no 4. P. 1483–1498.

6. Поленов В.С., Масликова Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 104–108.

7. Ильюшенко А.Ф., Шевцов А.И., Оковитый В.А., Громыко Г.Ф. Процессы формирования газотермических покрытий и их моделирование. Минск: Беларус. навука, 2011. 357 с.

8. Поленов В.С. Основные уравнения динамического деформирования трехкомпонентных сред // Современные тенденции развития естествознания и технических наук: сборник научных трудов по материалам МНПК. Белгород, 2018. С. 31–34.

9. Соснин Н.А., Ермаков С.А., Тополянский П.А. Плазменные технологии. Руководство для инженеров. СПб.: Изд-во Политехи, ун-та, 2013. 406 с.

10. Кукарских Л.А., Белых А.Г. Волновые процессы в пористых средах // V МНПК. Белгород, 2015. № 5. ч. 1. С. 13–16.

11. Симонов Ю.Н., Георгиев М.Н., Симонов М.Ю. Основы физики и механики разрушения. Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2012. 203 с.

12. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения. М.: Альфа-Пресс, 2009. 208 с.

13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Изд.: Астрель, 2010. 992 с.