

УДК 004.8:519.86/.87

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ВОСПИТАНИЯ РОБОТОВ С ПОМОЩЬЮ СРЕДСТВ МАССОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

^{1,2}Пенский О.Г., ¹Ощепкова Н.В.

¹ФГБОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет»,
Пермь, e-mail: ogpensky@mail.ru;

²ФГБОУ ВО «Пермский государственный аграрно-технологический университет
имени академика Д.Н. Прянишникова», Пермь, e-mail: ogpensky@mail.ru

На основе существующей теории роботов с неабсолютной памятью впервые поставлена математическая задача получения наибольшего воспитания роботов – психологических аналогов человека с помощью средств массовой информации. Доказано, что для получения наибольшего воспитания у роботов необходимо в каждом воспитательном цикле, состоящем из непрерывных трансляций передач медиапроектов и пропусков передач в трансляциях, делать не более одного пропуска. Решена задача нахождения количества полных воспитательных циклов, количества непрерывных воспитательных тактов и количество фиктивных тактов в каждом полном воспитательном цикле, обеспечивающих наибольшее воспитание робота при завершении воспитания. На основе методов математического анализа показано, что для получения наибольшего воспитания робота с помощью средств массовой информации достаточно в полных воспитательных циклах после непрерывных трансляций передач медиапроекта делать не более одного пропуска передач в эфире. Доказано, что большему значению коэффициента памяти равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями соответствует большее воспитание, полученное в результате воздействия на робота равными полными воспитательными циклами, причем чем больше количество этих циклов, тем больше воспитание робота. Решена задача получения наибольшего воспитания с помощью средств массовой информации для роботов – цифровых двойников.

Ключевые слова: робот, медиа, воспитание, память робота, математическое моделирование

MATHEMATICAL MODELS OF EDUCATION OF ROBOTS WITH MEANS OF MASS MEDIA

^{1,2}Penskiy O.G., ¹Oschepkova N.V.

¹Perm State National Research University, Perm, e-mail: ogpensky@mail.ru;

²Perm State Agrarian-Technological University named after Academician D.N. Pryanishnikov,
Perm, e-mail: ogpensky@mail.ru

On the basis of the existing theory of robots with non-absolute memory, the mathematical task of obtaining the greatest education of robots-psychological analogues of man with the help of mass media was put for the first time. It is proved that in order to receive the greatest education in robots, it is necessary to do not more than one badge in every educational cycle, consisting of continuous broadcasts of media projects and transmission passes in broadcasts. The problem of finding the number of complete educational cycles, the number of continuous educational measures, and the number of fictitious cycles in each complete educational cycle, ensuring the greatest education of the robot at the end of education, was solved. Based on the methods of mathematical analysis, it is shown that in order to get the most education of a robot with the help of the mass media, it is enough in full educational cycles after continuous broadcasts of the media project to make no more than one skipping broadcast on the air. It is proved that the greater value of the memory coefficient of a uniformly forgetful robot with equal emotions corresponds to the greater education resulting from the impact on the robot by equal complete educational cycles, and the more the number of these cycles, the more the robot is raised. The task of obtaining the greatest education through the media for robots-digital doubles is solved.

Keywords: robot, media, education, robot memory, mathematical modeling

В настоящее время в России начались исследования, посвященные математическому моделированию эффективного воздействия средств массовой информации на человека [1, 2], моделированию психологии человека [3], исследованию воздействия СМИ на человека [4] на основе анализа поведения цифровых двойников, являющихся роботами с неабсолютной памятью [5, 6]. Необходимость проведения численных экспериментов, основанных на методах математического моделирования, обусловлена важностью прогнозирования результатов формирования общественного сознания [6, 7].

Для математического описания эффективного формирования воспитания роботов

воспользуемся теорией математического анализа [8].

Пусть n – количество полных воспитательных циклов [5] трансляции передачи, m_n – количество непрерывных трансляций передачи в воспитательном цикле с номером n , k_n – количество пропущенных трансляций в этом же воспитательном цикле, θ_n – коэффициент памяти робота ($\theta_n \in (0, 1 - \delta)$, $0 < \delta < 1$, $\delta = \text{const}$) в полном воспитательном цикле с порядковым номером n , q_n – элементарное воспитание (эмоциональное воздействие) у робота – цифрового двойника, возникшее в результате ознакомления с передачей в полном воспитательном цикле с порядковым номером n .

Согласно работе [5] формулу воспитания $W_{m_n, k_{n-1}}$ цифрового двойника, полученного им в результате непрерывных трансляций m_n в полном воспитательном цикле n , можем записать на основе соотношений

$$W_{m_n, k_{n-1}} = q_n \frac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n} + \theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}},$$

где

$$F_{m_1, k_1} = q_1 \theta_1^{k_1} \frac{1 - \theta_1^{m_1}}{1 - \theta_1},$$

$$F_{m_{n-1}, k_{n-1}} = \theta_{n-1}^{k_{n-1}} \left(q_{n-1} \frac{1 - \theta_{n-1}^{m_{n-1}}}{1 - \theta_{n-1}} + \theta_{n-1}^{m_{n-1}} F_{m_{n-2}, k_{n-2}} \right), \quad (1)$$

$$F_{m_0, n_0} = 0.$$

Постановка задачи определения наибольшего воспитания цифрового двойника

С учетом равенств (1) можно сформулировать следующую задачу: «Найти количество полных воспитательных циклов, количество непрерывных воспитательных тактов и количество фиктивных тактов в каждом полном воспитательном цикле, обеспечивающих наибольшее воспитание робота при завершении воспитания».

Последняя фраза математически описывается следующим образом:
найти

$$\max_{n, m_1, k_1, \dots, m_n, k_n} W_{m_n, k_{n-1}} =$$

$$= \max_{n, m_1, k_1, \dots, m_n, k_n} \left(q_n \frac{1 - \theta_n^{m_n}}{1 - \theta_n} + \theta_n^{m_n} F_{m_{n-1}, k_{n-1}} \right). \quad (2)$$

Пусть выполняются допущения

$$\theta_n = \theta = \text{const}, \quad k_n = k = \text{const}, \quad m_n = m = \text{const},$$

$$q_n = q = \text{const} > 0, \quad n = 2, \dots, \infty. \quad (3)$$

В этом случае задача (2) эквивалентна следующей задаче:
найти

$$\max_{n, m, k} W_{n, m, k} = \max_{n, m, k} \left(q \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} + \theta^m F_{n-1, m, k} \right). \quad (4)$$

Так как справедливо соотношение $q = \text{const} > 0$, то задачу (3) можно записать в следующем виде:

$$\max_{n, m, k} Z_{n, m, k} = \max_{n, m, k} \left(\frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} + \theta^m G_{n-1, m, k} \right), \quad (5)$$

где $G_{n-1, m, k} = \frac{F_{n-1, m, k}}{q}$, то есть

$$G_{0, m, k} = 0,$$

$$G_{n-1, m, k} = \theta^k \left(\frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} + \theta^m G_{n-2, m, k} \right), \quad n \geq 2.$$

Решение оптимизационной задачи

Так как при выполнении условий (3) последовательность $\psi_n = W_{m_n, k_{n-1}} - W_{m_{n-1}, k_{n-2}}$ является монотонно возрастающей [5], то зафиксируем произвольное значение n и определим величины m и k , обеспечивающие $\max_{n, m, k} Z_{n, m, k}$ при этом фиксированном $n \geq 2$.

Нетрудно доказать справедливость формулы

$$Z_{n, m, k} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \sum_{i=0}^{n-1} (\theta^{m+k})^i. \quad (6)$$

Согласно равенству (6) можно сделать вывод о том, что большему значению коэффициента памяти θ , если робот является равномерно забывчивым с равноценными эмоциями, соответствует большее воспитание, полученное в результате воздействия на него равными полными воспитательными циклами, причем чем больше количество этих циклов, тем больше воспитание робота.

Нетрудно заметить, что соотношение $\sum_{i=0}^{n-1} (\theta^{m+k})^i$ является частичной суммой геометрической прогрессии со знаменателем θ^{m+k} . Частичная сумма Σ_n этой геометрической прогрессии определяется формулой

$$\Sigma_n = \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}}, \quad (7)$$

где $n \geq 2$.

С учетом (7) равенство (6) примет вид

$$Z_{n, m, k} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}}. \quad (8)$$

Анализируя формулу (8), можно сделать вывод о том, что, чем больше фиктивных тактов в равных полных воспитательных циклах, тем меньше воспитание робота. Согласно соотношению (8) справедливы свойства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Z_{n, m, k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}} = \frac{1}{1 - \theta},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Z_{n, m, k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta}.$$

Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (8), получим соотношение

$$Z_{\infty, m, k} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{n, m, k} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}} = \frac{1 - \theta^m}{(1 - \theta)(1 - \theta^{m+k})}.$$

Таким образом, предельное воспитание $Z_{\infty, m, k}$ равномерно забывчивого робота с равноценными эмоциями описывается формулой

$$W_{\infty, m, k} = q \frac{1 - \theta^m}{(1 - \theta)(1 - \theta^{m+k})}.$$

В силу того, что последовательность $Z_{n, m, k}$ является положительной и монотонно возрастающей по параметру n , справедливо соотношение

$$0 < W_{n, m, k} < q \frac{1 - \theta^m}{(1 - \theta)(1 - \theta^{m+k})}.$$

Сформулируем и докажем ряд теорем.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны и являются монотонно возрастающими, то функция $U(x) = f(x)g(x)$ монотонно возрастающая.

Доказательство.

Справедливо соотношение

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx}.$$

Так как в силу условий теоремы 1 справедливы неравенства

$$f(x) > 0, \frac{df(x)}{dx} > 0, g(x) > 0, \frac{dg(x)}{dx} > 0,$$

то $\frac{dU(x)}{dx} > 0$, а поэтому $U(x) = f(x)g(x)$ является монотонно возрастающей функцией.

Теорема доказана.

Теорема 2. Функция $Z_{n, m, k} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}}$ является монотонно возрастающей по параметру m .

Доказательство.

Пусть функция $f(m)$ удовлетворяет соотношению $f(m) = \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta}$, а $g(m) = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta^{m+k}}$. Тогда справедливо равенство $Z_{n, m, k} = f(m)g(m)$.

Легко видеть, что функция $f(m)$ является положительной и монотонно возрастающей.

Также очевидна справедливость неравенства $g(m) > 0$.

Покажем, что функция $g(m)$ является монотонно возрастающей.

Несложные преобразования позволяют получить формулу

$$\frac{dg(m)}{dm} = \frac{d}{dm} \left(\frac{1 - \theta^m}{1 - \theta^{m+k}} \right) = \frac{\frac{\theta^m}{\ln \theta} (\theta^k - 1)}{(1 - \theta^{m+k})^2}.$$

Так как справедливо неравенство $0 < \theta < 1$, то $\frac{dg(m)}{dm} > 0$, то есть функция $g(m)$ монотонно возрастающая.

А следовательно, в силу свойств функции $f(m)$ согласно теореме 1 функция

$Z_{n, m, k} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}}$ является монотонно возрастающей по параметру m .

Теорема доказана.

Теорема 3. Функция $Z_{n, m, k} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta^{m+k}}$ монотонна по параметру k , начиная с некоторого порядкового номера $\bar{N}$, где $n \geq \bar{N}$.

Доказательство.

Представим функцию $Z_{n,m,k}$ в виде $Z_{n,m,k} = f(k)g(k)$, где функция $f(k)$ удовлетворяет соотношению $f(k) = \frac{1 - (\theta^{m+k})^{n-1}}{1 - \theta}$, а $g(k) = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta^{m+k}}$.

Согласно формуле производной от произведения функций справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{n,m,k}}{dk} &= \frac{df(k)}{dk} g(k) + f(k) \frac{dg(k)}{dk} = \\ &= -\frac{1}{1-\theta} \frac{\theta^{(n-1)(m+k)}}{\ln \theta} (n-1) \frac{1-\theta^m}{1-\theta^{m+k}} + \frac{\theta^{m+k}}{\ln \theta (1-\theta^{m+k})^2} (1-\theta^m) \frac{1-\theta^{(n-1)(m+k)}}{1-\theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть

$$\frac{dZ_{n,m,k}}{dk} \geq 0. \quad (10)$$

После несложных преобразований соотношения (9) нетрудно показать, что справедливость неравенства (10) определяется справедливостью формулы

$$-\theta^{(n-1)(m+k)} (n-1) + \frac{\theta^{m+k} [1 - \theta^{(n-1)(m+k)}]}{1 - \theta^{m+k}} \leq 0. \quad (11)$$

Перейдем в обеих частях соотношения (11) к пределу при $n \rightarrow \infty$, тогда получим

$$-\lim_{n \rightarrow \infty} \theta^{(n-1)(m+k)} (n-1) + \frac{\theta^{m+k}}{1 - \theta^{m+k}} \leq 0. \quad (12)$$

Очевидна цепочка соотношений

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{Lx} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b} \right)^{Lx} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{b^{Lx}} = \frac{\infty}{\infty}, \quad (13)$$

если выполняются неравенства $L \geq 1$ и $b \geq 1$.

Раскроем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ в соотношении (13) по правилу Лопиталья [4], тогда получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{b^{Lx}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln b}{L b^{Lx}} = \frac{\ln b}{\infty} = 0. \quad (14)$$

Пусть $b = \frac{1}{\theta}$, $x = n-1$, $L = m+k$, тогда согласно формуле (14) соотношение (12) примет вид

$$0 + \frac{\theta^{m+k}}{1 - \theta^{m+k}} \leq 0. \quad (15)$$

Однако при фиксированных положительных значениях m и k справедливо строгое неравенство $\frac{\theta^{m+k}}{1 - \theta^{m+k}} > 0$, поэтому с учетом соотношения (15) получаем: $0 > 0$, то есть справедлива формула $\frac{dZ_{n,m,k}}{dk} < 0$, а

значит, функция $Z_{n,m,k}$ является монотонно убывающей по параметру k , начиная с некоторого порядкового номера $\bar{N}$, где $n \geq \bar{N}$.

Теорема доказана.

Исходя из анализа доказанного свойства монотонного убывания функции $Z_{n,m,k}$ по параметру k , можно заключить, что одним из оптимальных параметров решения задачи (5) будет $k = 1$.

Таким образом, с учетом (8) целевая функция задачи (5) примет вид

$$Z_{n,m,1} = \frac{1 - \theta^m}{1 - \theta} \frac{1 - (\theta^{m+1})^{n-1}}{1 - \theta^{m+1}}. \quad (16)$$

Заключение

Таким образом, решением задачи (5) являются наибольшие значения n и m , обусловленные возможностями практики, и $k=1$. Иными словами, этот вывод можно сформулировать следующим образом: «Для получения наибольшего воспитания робота – цифрового двойника с помощью средств массовой информации достаточно в полных воспитательных циклах после непрерывных трансляций передач медиа-проекта делать не более одного пропуска передач».

Список литературы

1. Бахитова Р.Х., Исламов И.Я. Региональные телеканалы: роль и место в медиаэкономике (на примере Башкирского спутникового телевидения) // Вестник УГАЭС. Наука и образование. Серия: Экономика. 2014. № 2(8). С. 70–74.
2. Исламов И.Я. Развитие региональной медиаэкономики на примере Башкирского спутникового телевидения // Научный журнал НИУ ИТМО. Серия: Экономика и экологический менеджмент. 2011. № 2. С. 346–353.
3. Наследов Д.А. Математические методы психологического исследования // Анализ и интерпретация данных. СПб.: Речь, 2004. 392 с.
4. Пенский О.Г. Математическая модель и программная реализация вычисления наибольшего интереса аудитории к медиапроекту // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. № 1 (36). С. 77–81.
5. Пенский О.Г., Шарапов Ю.А., Ощепкова Н.В. Математические модели роботов с неабсолютной памятью и приложения моделей. Пермь: Изд-во ПермГУ, 2018. 310 с.
6. Osipov G.S., Panov A.I., Chudova N.V. Behavior Control as a Function of Consciousness. II. Synthesis of a Behavior Plan. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. T. 54. № 6. P. 882–896.
7. Карпов В.Э. Эмоции и темперамент роботов. Поведенческие аспекты // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 5. С. 166–185.
8. Виноградов О.Л. Математический анализ: учебник для вузов. М.: BNV, 2017. 752 с.