УДК 519.2: 336.763

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ В МОДЕЛЯХ СО СКАЧКАМИ

Никоненко Н.Д.

Южно-Российский институт управления – филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Ростов-на-Дону, e-mail: natdniko@mail.ru

В данной статье рассматриваются модели (B, S)-рынка со скачками. Обосновывается значение исследования данных моделей, указывается важность управления финансовым риском. Анализируется эффективный инструмент управления финансовым риском на примере опционов. Рассматривается задача определения справедливой цены опционов в моделях со скачками. Данная задача рассматривается как вычисление условного математического ожидания процесса со скачками. В качестве указанного процесса рассматривается экспоненциальный процесс Леви, который иллюстрирует поведение рискового актива на (B, S)-рынке. Исследуемая задача сводится к определению условного математического ожидания дискретизированного экспоненциального процесса Леви по времени (мера Леви конечна). Полученные результаты сравниваются со случаем бесконечной меры Леви. Анализируется возможность получения аналитической формулы. Приводятся примеры решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: опцион, условное математическое ожидание, процессы Леви, дискретизация по времени

CALCULATION OF OPTION PRICES IN MODELS WITH JUMPS

Nikonenko N.D.

The South Russian Institute of Management – branch of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Rostov-on-Don, e-mail: natdniko@mail.ru

It is discussed (B, S)-market model with jumps. The importance of the study of these models is explained, indicated the importance of financial risk management. Effective tool for financial risk management on the example of options is analyzed. The problem of determining fair prices of options in models with jumps is explored. This problem is considered as a computation of conditional expectation of a process with jumps. As a specified process is an exponential Levy process, which illustrates the behavior of a risky asset on (B, S)-market. The investigated problem is reduced to definition of conditional expectation sampled on time exponential Levy process (finite measure Levy). The obtained results are compared with the case of infinite measure Levy. The possibility of obtaining analytical formulas is analyzed. Examples of solution of the investigated problem are given.

Keywords: option, conditional expectation, Levy processes, sampling on time

Одной из задач, возникающих на финансовом рынке, является управление финансовым риском. Существуют различные инструменты и подходы для управления риском. Эффективным инструментом для управления финансовым риском являются опционы. Указанная эффективность обуславливается их свойством защиты владельца от неблагоприятного исхода, а в случае благоприятного исхода возможность получения дополнительной прибыли. Однако возникает задача определения справедливой цены опциона (подробнее об опционах см. [1]).

Если рассматривать поведение цен рисковых активов, их траекторию, можно заметить, что в поведении цен рисковых активов наблюдаются скачки (рис. 1, данные приведены из [2]).

Для моделирования цен на финансовом рынке будем использовать процессы Леви, поскольку они обладают широким набором математических свойств, так как траектории указанных процессов имеют скачки. Процессы Леви используются для моделирования различных объектов в разных сферах деятельности, в том числе и для моделирования поведения цен рисковых активов, но здесь возникает ряд сложностей, которые обусловлены неполнотой рассматриваемого (B,S)-рынка.

Цель исследования

Целью исследования, приведенного в данной статье, является получение метода вычисления цен опционов для дискретизированных процессов Леви в случае конечной меры Леви.

Материалы и методы исследования

Определение цены опционов можно рассматривать как задачу вычисления условного математического ожидания.

Будем считать, что дисконтированная цена рискового актива является экспоненциальным процессом Леви (1):

$$S_t = e^{X_t},\ X_t - \text{процесс Леви.} \qquad (1)$$

Введем обозначение: f – дисконтированное финансовое обязательство (опцион можно рассматривать как ограниченную функцию).

Тогда задача определения безарбитражной цены хеджирования финансового обязательства (которое является дисконтированным) в момент времени t, если в данный момент времени дисконтированная цена рискового актива равна S:

$$V(t,S)=E\left(f\left(S_T\right)/S_t=S\right). \qquad (2)$$

Если мера является мартингальной (риск-нейтральной), то задача (2) решается. Если исходная мера не является мартингальной, то сначала необходимо перейти к эквивалентной мартингальной мере (подробнее см. [3]).

Применяя свойства процесса Леви, задачу (2) можно рассматривать в виде

$$V(t,S)=Ef\left(Se^{X_{T-t}}\right). \qquad (3)$$

Рассмотрим дискретизацию экспоненциального процесса Леви S_t. Отметим, что данный вид дискретизации применяется, если мера Леви конечна.

Будем рассматривать регулярные промежутки времени при дискретизации по времени: $0,\Delta,2\Delta,\ldots$, тогда получим случайное блуждание $X_{n\Delta}\equiv\sum_{k=1}^{n}h_k$. Тогда случайные величины $h_k=X_{k\Delta}-X_{(k-1)\Delta}$ – одинаково распределенные, их распределение совпадает с распределением X_Δ, является безгранично делимым. В итоге, указав шаг дискретизации, получаем семейство случайных блужданий $X_{n\Delta}$ (случайные блуждания с пропущенными шагами рассмотрены в [4]).

После дискретизации по времени процесс S_t поведения рискового актива, (1) перепишем в

$$S_k=S_{k-1}e^{h_k},\ k=1,\ldots,N^{T-t}. \qquad (4)$$

Естественная фильтрация имеет вид

$$F_k=\sigma\left\{(\varepsilon_1,\delta_1),\ldots,(\varepsilon_k,\delta_k)\right\},F_0=\{\varnothing,\Omega\}.$$

$$h_k=\Delta m+\varepsilon_k+\sigma\delta_k. \qquad (5)$$

Процесс (4) – дискретизированный по времени процесс Леви на интервале $[0,T-t]$ с достаточно малым шагом дискретизации $\Delta=\dfrac{T-t}{N^{T-t}}$, $\varepsilon_k=\sum_{j=1}^{\xi_\Delta^{(k)}}\eta_j$, ε_k независимы, $\varepsilon_k=\sum_{j=1}^{\xi_\Delta^{(k)}}\eta_j$, $\xi_\Delta^{(k)}$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda\Delta$, η_j – независимые и одинаково распределенные случайные величины с законом распределения $F(dx)$, δ_k – стандартные нормальные величины, $\xi_\Delta^{(k)}$ и δ_k – независимые случайные величины.

Соотношение для определения Δ при заданной точности α имеет вид

$$\frac{2e^{-\lambda\Delta}(\lambda\Delta)^3}{12-3\lambda\Delta}\le\alpha.$$

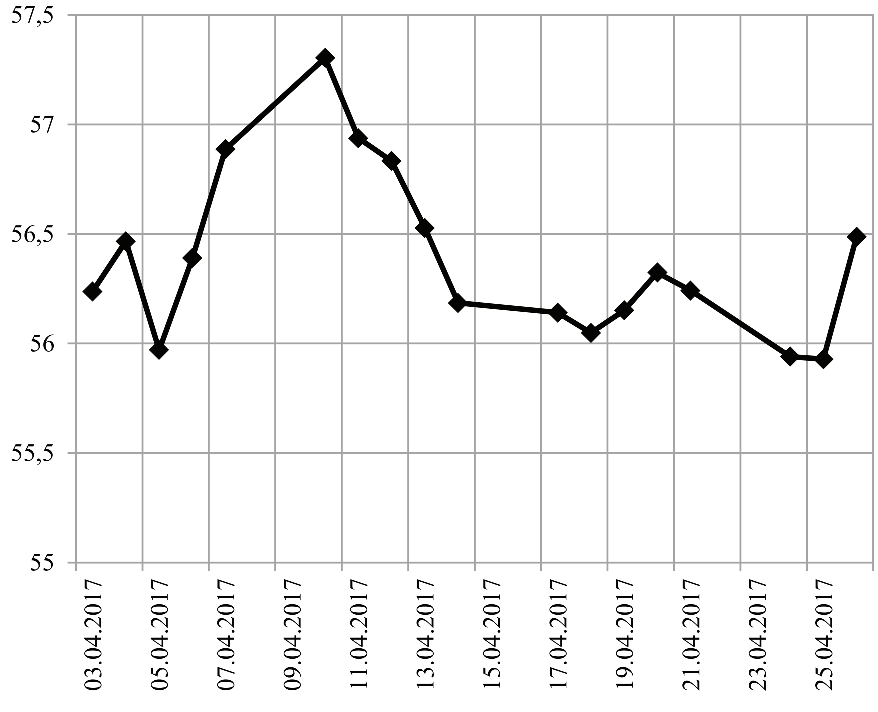

Рис. 1. Средневзвешенный курс (руб./долл.). Расчет «сегодня»

Если величина шага дискретизации Δ является достаточно малой величиной, то со степенью точности α можно считать, что число скачков на каждом интервале разбиения скачок или есть, или скачка нет, то есть невозможной является ситуация, когда на интервале будет не менее двух скачков.

В [6] был предложен подход для случая бесконечной меры Леви.

Тогда (5) примет вид

$$h_k = \mu_k + \rho_k \xi_k + \sigma\delta_k, \qquad (6)$$

$\mu_k = \text{const}$, $P(\rho_k = 1) = p$; $P(\rho_k = 0) = q = 1 - p$; ξ_k – независимая случайная величина, закон распределения – $F(dx)$; δ_k – стандартные нормальные величины; случайные величины ρ_k, ξ_k, δ_k являются независимыми.

В данном случае фильтрация будет следующая:

$$F_k = \sigma\ \{(\rho_1\ \delta_1),...,(\rho_k\ \delta_k)\}.$$

Рассмотрим два случая:

1) ξ_k (скачок) в формуле (6) изменяется по закону $P(\xi_k = 1) = \mu$, $P(\xi_k = -1) = \eta = 1 - \mu$, $\delta_k \in N(0,1)$, $N = 20$, $T = 10$, $\sigma = 0{,}05$ (рис. 2);

2) скачок в формуле (6) изменяется по экспоненциальному закону, $\delta_k \in N(0,1)$, $N = 20$, $T = 10$ (рис. 3). Рис. 2 и рис. 3 отражают эволюцию индекса h_k, который имеет скачки в случайные моменты времени.

Определим условие мартингальности для процесса (4) и h_k изменяются по закону (6). Условие мартингальности имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x dF(x) = \frac{e^{-\frac{\sigma^2}{2} - m\Delta} - q}{p}. \qquad (7)$$

Заметим, что если не выполняется условие (7), то необходимо переходить к мартингальной мере. Для этого можно использовать преобразование Гирсанова или Эшера.

Преобразование Гирсанова для моделей (4) будем искать при помощи процесса плотности:

$$Z_k = Z_{k-1} e^{\gamma_k + \varphi_k h_k}, Z_0 = 1,\ \ k = 1, 2, .., N^{T-t}. \qquad (8)$$

Преобразование Эшера для моделей (4) имеет вид (подробнее о преобразовании Эшера [5, 6]):

$$Z_k = Z_{k-1} \frac{e^{\varphi_k h_k}}{E_P e^{\varphi_k h_k}}. \qquad (9)$$

Для моделей (4), как было показано в [6], преобразование Эшера и Гирсанова совпадают.

Для параметра преобразования Эшера должно выполняться соотношение

$$p\int_{-\infty}^{\infty} e^{\varphi_k x} dF(x) + q =$$

$$= e^{\frac{\sigma^2(2\varphi_k + 1)}{2} + m\Delta}\left(p\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\varphi_k + 1)x} dF(x) + q\right). \qquad (10)$$

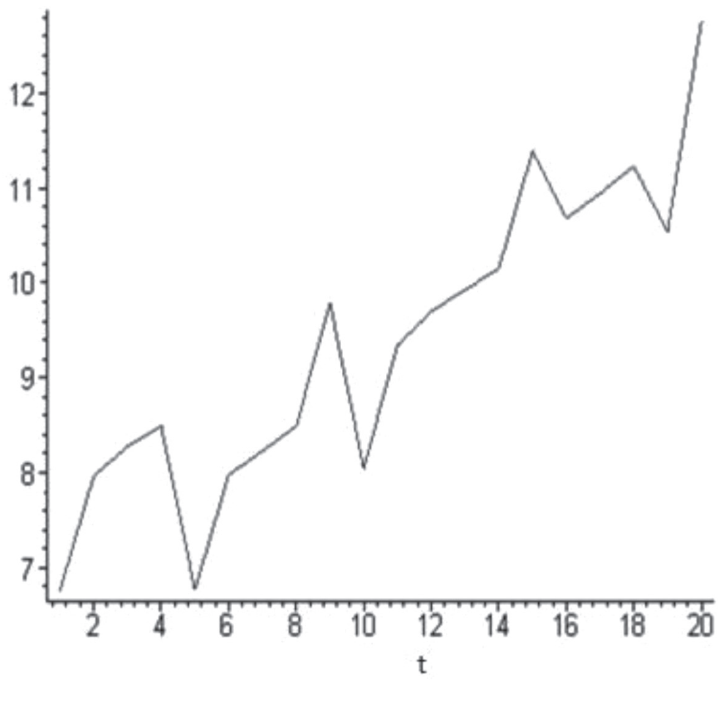

Рис. 2. Изменение h_k. Ситуация 1

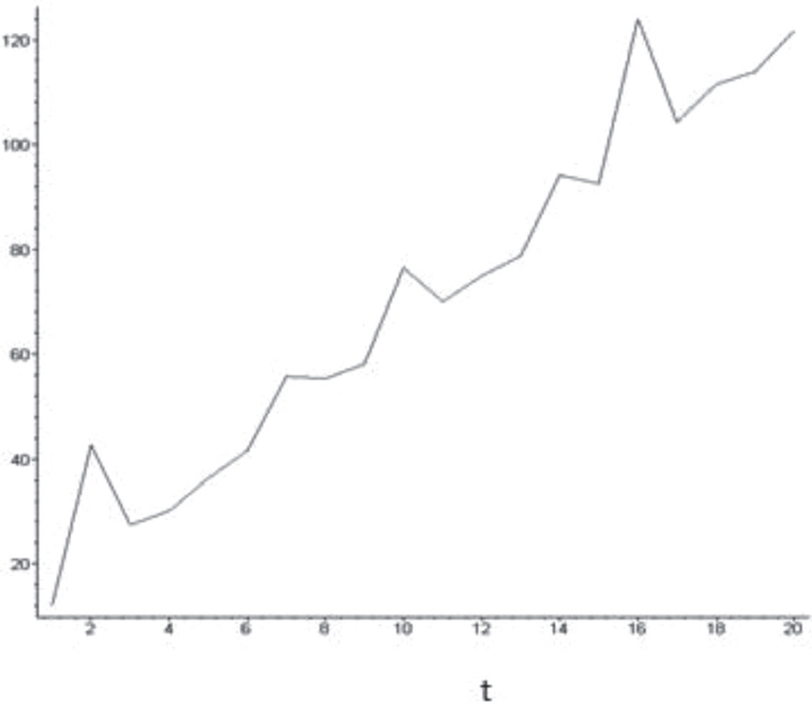

Рис. 3. Изменение h_k. Ситуация 2

Если в (6) случайные величины ξ_k распределены по закону Пуассона, интенсивность равна λ, тогда (6) примет вид

$$h_k = m\Delta + \rho_k \xi_k + \sigma\delta_k. \qquad (11)$$

Условие (7) примет вид

$$\lambda = \frac{1}{e-1}\ln\left(\frac{e^{-m\Delta} - qe^{\frac{\sigma^2}{2}}}{p}\right), p \neq 0, q \neq 0. \qquad (12)$$

Условие для параметра преобразование Эшера:

$$pe^{\lambda(e\varphi-1)} + q = e^{\frac{\sigma^2(2\varphi+1)}{2}+m\Delta}\left(pe^{\lambda\left(e^{\varphi+1}-1\right)} + q\right). \qquad (13)$$

В случае выполнения условия для мартингальной меры, условие для интервала дискретизации имеет вид $\Delta < -\dfrac{\ln(q)\sigma^2}{2m}$.

Рассмотрим случай (11), если (6) имеет вид

$$S_k = S_{k-1}e^{h_k}, h_k = \mu + \rho\xi_k. \qquad (14)$$

Тогда исходя из условия мартингальности, соотношение для определения интервала дискретизации имеет вид $\Delta < -\dfrac{\ln(q)}{m}$.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим задачу перехода к мартингальной мере (определения цены хеджирования, дисконтированное финансовое обязательство можно рассматривать как опцион европейского типа):

$$E_P\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_{N^{T-t}}\right)\right). \qquad (15)$$

Введем допущение: $S_{N^{T-t}}$ эволюционирует по закону (4) и h_k изменяется по закону (5).

$$S_{N^{T-t}} = S_0 e^{H_{N^{T-t}}};\ H_{N^{T-t}} = \sum_{k=1}^{N^{T-t}} h_k = m(T-t) + \sum_{k=1}^{\eta}\xi_k + \sigma\delta;\ P_\eta(l) = C^l_{N^{T-t}} p^l q^{N^{T-t}-l};\ \delta \in N\left(0, N^{T-t}\right).$$

$$E_P\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_{N^{T-t}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N^{T-t}}}\sum_{l=0}^{N^{T-t}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_0 e^{m(T-t)+iy+\sigma x}\right)\right)dF^{l*}(y)\right)e^{-\frac{x^2}{2N^{T-t}}}dx\right)P_\eta(l), \qquad (16)$$

где F^{l*} – l-кратная свертка распределения F с собой.

Пример 1. Если h_k изменяется согласно (11), тогда

$$G = \frac{1}{\left(pe^{\lambda\left(e^{\varphi}-1\right)}+q\right)e^{\frac{(\varphi\sigma)^2}{2}}}, \tag{17}$$

$$E_P\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_{N^{T-t}}\right)\right) = E_P\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_0 e^{H_{N^{T-t}}}\right)\right) =$$

$$= G^{N^{T-t}} \sum_{l=0}^{N^{T-t}} E_P\left(e^{\varphi\sum_{k=1}^{l}\xi_k+\varphi\sigma\delta} f\left(S_0 e^{m(T-t)+\sum_{k=1}^{l}\xi_k+\sigma\delta}\right)\right)P_\eta(l) =$$

$$= \frac{G^{N^{T-t}}}{\sqrt{2\pi N^{T-t}}} \sum_{l=0}^{N^{T-t}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(e^{\varphi j+\varphi\sigma x} f\left(S_0 e^{m(T-t)+j+\sigma x}\right)\right)\frac{e^{-\lambda l}(\lambda l)^j}{j!}\right)e^{-\frac{x^2}{2N^{T-t}}}dx\right)P_\eta(l).$$

Следовательно, (16) примет вид

$$E_P\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_{N^{T-t}}\right)\right) = \frac{G^{N^{T-t}}}{\sqrt{2\pi N^{T-t}}} \sum_{l=0}^{N^{T-t}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left(e^{\varphi j+\varphi\sigma x} f\left(S_0 e^{m(T-t)+j+\sigma x}\right)\right)\frac{e^{-\lambda l}(\lambda l)^j}{j!}\right)e^{-\frac{x^2}{2N^{T-t}}}dx\right)P_\eta(l). \tag{18}$$

Напомним, что мы получили аналитическую формулу в случае конечной меры Леви для определения цены хеджирования опциона Европейского типа.

Пример 2. Рассмотрим случай, если в (6) ξ_k будет независимой случайной величиной, распределенной по симметризованному геометрическому закону распределения.

Проведем симметризацию геометрического закона распределения, используя подход, предложенный в [7]:

$$\hat{p}_n = P(\xi_k = n) = P(\xi_k = -n) = \hat{p}_{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j p_{j+n} = \sum_{j=0}^{\infty}\left(q^j p\right)\left(q^{j+n}p\right) =$$

$$= p^2 q^n \sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} = p^2 q^n \sum_{j=0}^{\infty}\left(q^2\right)^j = \frac{p^2 q^n}{1-q^2}, 0 < p \le 1, q = 1-p.$$

Исходная мера является мартингальной, если выполнено условие

$$\exp\left(-\mu_k - \frac{\sigma^2}{2}\right) = \frac{2p^3}{\left(1-q^2\right)\left(1-eq\right)}. \tag{19}$$

Плотность представляется в виде

$$Z_{N^{T-t}} = \prod_{k=1}^{N^{T-t}}\left(Ge^{\varphi(\rho_k\xi_k+\sigma\delta_k)}\right) = G^{N^{T-t}} \exp\left(\varphi\sum_{k=1}^{N^{T-t}}(\rho_k\xi_k+\sigma\delta_k)\right), \tag{20}$$

где φ – параметр преобразования Эшера, $G = \dfrac{e^{-\frac{(\varphi\sigma)^2}{2}}\left(1-e^{\varphi}q\right)}{A+q\left(1-e^{\varphi}q\right)}, A = \dfrac{2p^3}{1-q^2}$.

$$E_P\left(Z_{N^{T-t}} f\left(S_{N^{T-t}}\right)\right) = \frac{G^{N^{T-t}}}{\sqrt{2\pi N^{T-t}}} \sum_{l=0}^{N^{T-t}} \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(e^{\varphi j+\varphi\sigma x} f\left(S_0 e^{m(T-t)+j+\sigma x}\right)\right)\left(\frac{p^2 q^j}{1-q^2}\right)^l\right)e^{-\frac{x^2}{2N^{T-t}}}dx\right)P_\eta(l). \tag{21}$$

Заключение

В статье предложен численный метод вычисления цен опционов в моделях (B,S)-рынка, который является стохастическим аналогом метода сеток с равномерным шагом. В данном методе шаг выбирается в зависимости от индивидуальных свойств процесса Леви. В результате применения указанного метода получена аналитическая формула для определения безарбитражной цены хеджирования дисконтированного финансового обязательства (опцион Европейского типа). Наличие аналитической формулы существенно упрощает вычислительный процесс, позволяет при вычислении цен опционов не использовать метод деревьев, который обладает достаточно большой вычислительной сложностью, для уменьшения которой необходимо переходить к параллельным вычислениям. Заметим, что в данном случае мера Леви является конечной. Кроме того, появляется возможность проведения различных видов анализа на основе аналитической формулы. В случае, если мера является бесконечной, то возникает ряд сложностей с получением аналитической формулы. Для данного случая численный метод вычисления безарбитражной цены дисконтированного финансового обязательства отличается от сеточных методов. Указанный метод приводит к случайному разбиению временной шкалы.

Список литературы

1. Галиц Л. Финансовая инженерия: инструменты и способы управления финансовым риском / Л. Галиц. – М.: ТВП, 1998. – 600 с.

2. Динамика курсов доллара США и евро к рублю и показатели биржевых торгов// Центральный банк Российской Федерации: сайт. – URL: http://www.cbr.ru/hd_base/Default.aspx?Prtid=micex_doc (дата обращения: 27.04.2017).

3. Jacod J. Limit Theorems for Stochastic Processes / J. Jacod, A.N. Shiryaev. – 2nd ed. – Berlin: Springer, 2002. – 660 p.

4. Белявский Г.И. Случайные блуждания с пропущенными слагаемыми / Г.И. Белявский, Н.В. Данилова, Н.Д. Никоненко // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – № 16:4. – С. 21–28.

5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики / А.Н. Ширяев. – В 2 т. Т. 2. Теория. – М.:ФАЗИС,1998. – 544 с.

6. Белявский Г.И. Алгоритм расчета безарбитражной цены финансового обязательства на основе дискретизации процессов Леви по состоянию / Г.И. Белявский, Н.Д. Никоненко// Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2012. – № 3. – С. 56−59.

7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – В 2 т. Т. 2; пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 752 с.