УДК 519.213/.224.22

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫЧЕТОВ В СИСТЕМЕ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

Смирнов А.А., Саиег Т.Х., Даржания А.Д., Роженко О.Д., Смирнова О.Н.

ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет», Ставрополь, e-mail: shursun@nail.ru

Для построения моделей каналов связи необходимы вероятностные характеристики источника сообщений. Необходимы аналитические выражения для условных и безусловных законов распределения вероятностей для оценки показателей качества. В статье рассматривается представление данных в непозиционной системе исчисления – системе остаточных классов. В таком формате данные представляются вычетами, и их можно обрабатывать параллельно, без учета переносов в разрядах. Проведен анализ частоты появления вычетов различного значения. В статье получены законы распределения вероятностей вычетов в системе остаточных классов. Так же рассмотрены законы распределения с учетом марковского процесса последовательной передачи старших и младших вычетов. На основе выводов предложена теорема о нарушении равномерности распределения источника сообщений при переводе из позиционной системы исчисления в систему остаточных классов.

Ключевые слова: вычет, система остаточных классов, распределение вероятностей, непозиционное исчисление, канал связи, параллельные вычисления

THE PROBABILITY DISTRIBUTION OF DEDUCTIONS IN THE SYSTEM OF RESIDUAL CLASSES

Smirnov A.A., Saieg T.Kh., Darzhaniya A.D., Rozhenko O.D., Smirnova O.N.

Federal Autonomous Educational Institution of Higher Education North-Caucasian Federal University, Stavropol, e-mail: shursun@nail.ru

To build communication channel models, probabilistic characteristics of the source of messages are necessary. Analytic expressions are needed for conditional and unconditional probability distribution laws for the estimation of quality indicators. The article deals with the representation of data in the nonpositional system of calculus – the system of residual classes. In this format, data is represented as a deduction and can be processed in parallel, without taking into account hyphenation in bits. The frequency of the appearance of residues of different values is analyzed. The article gives the distribution laws of the probability of residues in the system of residual classes. The distribution laws, taking into account the markov process, are also considered in the sequential transfer of senior and minor residues. Based on the conclusions, a theorem is proposed on the violation of the uniformity of the distribution of the source of messages when translating from the positional system of the calculus to the system of residual classes.

Keywords: residue, residual class system, probability distribution, non-position calculus, communication channel, parallel computations

В современных системах телекоммуникаций [1, 2] все больший интерес представляет передача данных в параллельном формате данных, представленных в параллельной математике, такой как система остаточных классов (СОК) [3–5].

Изначально представление данных в таком формате позволяет существенно (в разы) увеличить скорость обработки данных, так как позволяет осуществлять операции сложения, вычитания и умножения без учетов переноса в разрядах, в отличие от позиционной системы исчисления (ПСС). Возникает задача передачи таких данных по существующим и перспективным каналам связи [6].

То есть данные представляются не некоторым числом A_i, а результатом его деления на взаимно простые заранее известные числа (основания) p_i. То есть число представляется совокупностью вычетов $\alpha_i = A \bmod p_i$ или набором длины N вычетов $A = (a_1, a_2, ..., a_N)$. При этом операции сложения и умножения могут осуществиться параллельно независимо друг от друга по всем i основаниям, т.е. суммирование чисел A и B будет иметь вид $C = A + B = (a_i + b_i) \bmod p_i$ и умножение $C = A \cdot B = (a_i \cdot b_i) \bmod p_i$.

СОК обладает естественной избыточностью, что позволяет помимо ускорения процедуры обработки данных существенно повысить надежность систем телекоммуникаций. Так как каждый вычет несет часть информации в себе о сигнале в целом, то можно говорить о возможности повышения надежности за счет возможности деградации структуры сети и снижения точности расчетов. Частным случаем такой передачи данных можно считать дельта-модуляцию.

При моделировании и построении каналов связи (КС) прежде всего, необходимо учитывать вероятностные характеристики источника сообщения. Очевидно, что в этом случае вычеты, имеющие различные абсолютные значения, будут иметь различную вероятность появления. Или различные законы распределения вероятностей вычетов по каждому основанию или впоследствии в отдельных подканалах. Именно вероятностное описание источника сообщения определяет модель КС. От этого будут зависеть переходные вероятности в подканалах, оптимальные пороги решающих схем и в конечном результате функциональные схемы реализации оптимальных решающих устройств. Также одной из проблем передачи данных в формате СОК по последовательным КС является обеспечение их эффективного помехоустойчивого кодирования. Также при проектировании параллельных КС для передачи параллельных данных отсутствует научно обоснованный подход к выбору полосы пропускания, типу линии выделяемой отдельному подканалу и др. параметров КС, определяемых вероятностными характеристиками. Кроме того, информационные характеристики определяются его вероятностными характеристиками. Очевидно, что отсутствие таких закономерностей сдерживает развитие параллельных КС в СОК. Таким образом, целью статьи является определение законов распределения вероятностей вычетов в системе остаточных классов.

Определим вероятность передачи вычета $\alpha_i = p_i - 1$ по основанию p_i в СОК при условии, что исходные данные в ПСС имеют равномерное распределение вероятностей.

Для любой системы вычетов максимальное значение вычета будет определяться максимальным же значением основания $\max[\alpha_i] = \max[p_i - 1]$. Возможна передача всех значений от 1 до $\max[\alpha_i]$. Вероятность передачи одного из вычетов α_i по основанию p_i с учетом нуля будет определяться как [6]

$$P(\alpha_i) = \frac{1}{\alpha_i + 1} = \frac{1}{p_i}. \qquad (1)$$

Для передачи всего числового диапазона $P = \prod_{i=1}^{L} p_i$ необходимо передать все α_i вычеты, где $i = 1,\dots, L$, L – число оснований, по всем основаниям. В общем случае число задействованных оснований для представления числа может быть меньше числа оснований системы СОК или $N \le L$. Тогда общая вероятность передачи определенного вычета по всем основаниям будет складываться из вероятностей его передачи по каждому из оснований.

Так вычет $\alpha_i = 0$ может быть передан по любому основанию, поскольку 0 является элементом каждого класса вычета. Вычет $\alpha_i = c$ может быть передан только по основаниям $p_i > c$. Согласно формуле полной вероятности вероятность передачи вычета α_i во всем блоке данных должна определяться согласно формуле полной вероятности [7] его передачи по всем L основаниям

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} P(p_i) P(\alpha_i), \qquad (2)$$

где N – число передаваемых вычетов в блоке данных, $P(p_i)$ – вероятность передачи любого вычета по основанию p_i, то есть вероятность использования p_i основания, $P(\alpha_i)$ – вероятность передачи α_i вычета по основанию p_i. Если использовать равномерную передачу, при которой в блоке данных передаются вычеты по каждому основанию один раз $N = L$, то $P(p_i)$ можно считать равномерным и определить, как

$$P(p_i) = 1/L. \qquad (3)$$

Если при этом блок передаваемых данных содержит вычеты по всем основаниям $N = L$, а распределение передаваемых значений равномерно, то подстановка выражений (3) и (1) в выражение (2) дает

$$P(\alpha_k) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} P(\alpha_k) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \frac{\psi(p_i - \alpha_k)}{p_i}, \qquad (4)$$

где $\psi(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ модифицирования кусочно-постоянная функция Хевисайда, функция учитывающая тот факт, что вероятность передачи вычета α_i по основанию $p_i \le \alpha_i$ будет равна 0. Так согласно (3) вероятность передачи 0 будет равна

$$P(0) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} \frac{1}{p_i}.$$

На основании изложенного можно сформулировать теорему:

Перевод последовательного алфавита с равномерным распределением элементов из ПСС в СОК с последовательной передачей вычетов приводит к неравномерному и взаимозависимому распределению вычетов, причем закон распределения вероятностей по вычетам имеет вид (4).

Докажем данную теорему. Первое утверждение теоремы очевидно. Каждый элемент алфавита в ПСС должен быть представлен по всем основаниям набором вычетов, поэтому после записи вычета по старшему основанию обязательно следует вычет по младшему основанию, если нет дополнительного правила перемежения вычетов по псевдослучайному закону. Такая строгая последовательность означает наличие статистической взаимосвязи между элементами. Так же очевидно, что минимальные вычеты являются элементами множества вычетов по всем основаниям, в то время как максимальные вычеты являются элементами множества вычетов только по максимальным основаниям, т.е. $\min\alpha_k \in \{\alpha\}|_{p_i}$, $\max\alpha_k \in \{\alpha\}|_{\max p}$. Таким образом, имеет место неравномерность распределения вычетов.

Вторая часть теоремы частично представлена при выводе выражения (4). Остается показать, что данное выражение удовлетворяет условию единичной нормировки, т.е. равенству 1 суммы вероятностей полной группы событий.

Пусть $\alpha_k = k$, тогда заметим, что $\psi(p_i - \alpha_k) = \psi(p_i - k) = 1$ только при условии $k \le p_i$. Легко показать, что

$$\sum_{k=0}^{p_L-1} P(\alpha_k) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{p_L-1}\sum_{i=1}^{L}\frac{\psi(p_i-\alpha_k)}{p_i} =$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{p_L-1}\sum_{i=1}^{L}\frac{\psi(p_i-k)}{p_i} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=0}^{p_L-1}\frac{\psi(p_i-k)}{p_i} =$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\sum_{k=0}^{p_i}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}1 = 1.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим пример, так для оснований $p_i = 2, 3, 5$, т. е. для $L = 3$ согласно (4) получим

$$P(0) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{31}{90} \approx 0,34 .$$

То есть каждый третий вычет будет иметь значение равное 0. Заметим, что вычет $\alpha_i = 1$ является также элементом каждого класса вычетов по любым основаниям. То есть $P(0) = P(1)$. Тогда в каждой тройке переданных вычетов два из них будут 1 или 0. Определим вероятность передачи остальных вычетов $\alpha = 2$. Согласно (4)

$$P(2) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{45} \approx 0,18 ,$$

$$P(3) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15} \approx 0,07 ,$$

$$P(4) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{15} \approx 0,07 .$$

Сумма вероятностей передачи вычетов $P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 0,34 + 0,34 + 0,18 + 0,07 + 0,07 = 1$, поскольку она составляет полную группу событий.

Очевидно, что для максимальных вычетов $\psi(p_i - \max[\alpha_k]) = 1$ только для $i = L$. Тогда согласно (4) вероятность появления максимальных вычетов

$$P(\max[\alpha_k]) = \frac{1}{Lp_L} , \tag{5}$$

где $p_L = \max[p_i]$ – максимальное основание.

Рассмотрим взаимозависимую передачу вычетов. Будем считать последовательность передачи вычетов простейшим Марковским процессом, когда условное распределение последующего состояния зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний последовательности. Пусть вычеты передаются последовательно от меньшего основания к большему основанию. Тогда если передан максимальный вычет с вероятностью согласно (5) $P(\max\alpha_k) = \frac{1}{Lp_L}$, то следующий вычет будет только минимальным (или 0 или 1) и передан с условной вероятностью $P(\min\alpha_k / \max\alpha_k) = 0,5$. То есть вероятность передачи пары наибольшего и наименьшего вычетов составит

$$P(\max\alpha_k, \min\alpha_k) = P(\min\alpha_k / \max\alpha_k)P(\max\alpha_k) = \frac{1}{2Lp_L} . \tag{6}$$

При последовательной передаче вычетов вероятность передачи максимального вычета после максимального будет равна 0, т.е. $P(\max\alpha_k, \max\alpha_k) = 0$. Так как по каждому основанию может быть передан минимальный вычет, то условная вероятность $P(\min\alpha_k / \min\alpha_k) = P(\min\alpha_k) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{1}{p_i}$, а вероятность, того, что после минимального вычета будет минимальный вычет, равна

$$P(\min\alpha_k, \min\alpha_k) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{1}{p_i}\cdot\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\frac{1}{p_i} = \frac{1}{L^2}\left(\sum_{i=1}^{L}\frac{1}{p_i}\right)^2 . \tag{7}$$

Аналогично с учетом того, что вероятность передачи одного из максимальных вычетов не изменится при передаче одного из минимальных вычетов, так как минимальные вычеты могут быть переданы по любому основанию, следовательно $P(\max \alpha_k / \min \alpha_k) = P(\max \alpha_k) = \frac{1}{Lp_L}$, и вероятность передачи пары минимального и максимального вычетов будет равна

$$P(\min \alpha_k, \max \alpha_k) = P(\max \alpha_k / \min \alpha_k) P(\min \alpha_k) = \frac{1}{p_L L^2} \sum_{i=1}^{L} \frac{1}{p_i}. \qquad (8)$$

Выражения (6–8) позволяют рассчитать вероятности появления пар вычетов в последовательной передаче данных в формате СОК.

Анализ проведенных вычислений показывает, что чаще передаются вычеты 0 и 1. Следовательно, при передаче по каналам связи их необходимо кодировать более помехоустойчивым кодом. Однако необходимо помнить, вычеты большего абсолютного значения более важны при переводе данных из СОК в ПСС.

Другим важным выводом является тот факт, что для передачи данных в формате СОК целесообразно использовать асинхронные форматы передачи данных, так как резервирование временного окна при временном уплотнении TDMA подканалов в параллельном КС для передачи всего диапазона вычетов $\alpha_i = 1 \ldots\ p_i - 1$ нецелесообразно, поскольку вычеты с меньшим значением передаются гораздо чаще.

Для устранения статистической зависимости между вычетами, приводящей к снижению информационной производительности источника сообщения, целесообразно использовать дополнительное статистическое кодирование, повышающее энтропию источника сообщения [7].

В вычислительных системах с двоичной системой счисления используются протоколы, форматы данных, разрядность шин адреса и данных кратных числам $2^i = 2$, 4, 8, 16, 32 … Это обусловлено разрядностью операционных систем, а также длиной машинных слов и команд машинного кода X86, кратных байту (8 бит)

Очевидно, для уменьшения информационных потерь и адаптации существующих КС к каналам с передачей данных в СОК необходимо использовать основания близкие к 2^i, такими могут быть числа Мерсенна [3, 6] $p_i = 2^i - 1$. Тогда выражение (4) примет вид

$$P(\alpha) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} P(\alpha_i) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} \frac{\psi(p_i - 2^i - 1)}{2^i - 1}. \qquad (9)$$

Например, для оснований $p_i = 3$, 7, 31, однозначно представляющих диапазон чисел $P = \prod_{i=1}^{L} p_i = 651$ без учета 0, необходимо передавать максимальный вычет $\max[\alpha_i] = \max[p_i - 1] = 30$. Вероятность передачи вычетов равных 0, 1 или 2 будет равна и составит

$$P(<3) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{31}\right) \approx 0{,}17.$$

То есть вероятность передачи 0, 1 и 2 составит $P(0, 1, 2) \approx 3 \cdot 0{,}17 = 0{,}51$ или каждый второй переданный вычет равен 0, 1 или 2. Таким образом, на остальные вычеты приходится вероятность $P(3 \ldots 30) = 1 - 3 \cdot 0{,}17 = 0{,}49$.

Анализ выражений позволяет сделать выводы:

1. Полученное выражение (4) позволяет оценить неравномерное распределение вычетов в системе остаточных классов при переводе, источник сообщений с равномерным законом распределения алфавита в позиционной системе исчисления.

2. Полученные выражения (5–8) позволяют учесть вероятность распределения вычетов при их последовательной передаче с учетом марковской взаимосвязи. Данные выражения можно учесть при построении функциональных схем оптимальных приемников.

3. Выражения (4–9) необходимо учитывать при оптимальном помехоустойчивом кодировании данных в различных каналах связи [8].

4. На основе полученных выражений можно делать практические рекомендации построения алгоритмов деградации вычислительных структур с потерей точности вычислений, но сохранении работоспособности канала связи.

5. Аналитическое выражение (9) учитывает возможную максимальную адаптацию к существующим двоичным каналам связи. При этом в качестве оснований используются ближайшие к 2^i взаимно простые вычеты.

Таким образом, аналитические выражения (2–9) позволяют разрабатывать модели каналов связи при передаче данных в СОК. В дальнейшем на их основе необходимо развить теорию информации для данных, представленных в СОК. Знание законов распределения позволит оценивать такие параметры канала связи, как пропускная способность, скорость передачи информации, а также показателей качества, таких как помехоустойчивость, достоверность и др. показателей [7, 9]. Выражения (4–9) позволят проводить обоснованное статистическое моделирование КС при передаче данных в СОК, адаптировать существующие КС к передаче данных в СОК.

Список литературы

1. Стратегия развития отрасли информационных технологий в Российской Федерации на 2014–2020 годы и на перспективу до 2025 года // Минкомсвязь России, [М.]. Официальный сайт URL: http://minsvyaz.ru/ru/documents/4084/ (дата обращения: 10.06.17).

2. Величко В.В., Катунин Г.П., Шувалов В.П. Основы инфокоммуникационных технологий. – М.: Горячая Линия – Телеком, 2009. – 718 с.

3. Червяков Н.И., Малофей О.П., Шапошников А.В. и др. Нейрокомпьютеры в информационных и экспертных системах. – М.: Радиотехника, 2008. – 320 с.

4. Червяков Н.И., Лавриненко И.Н. Разработка математических методов моделирования модулярного нейропроцессора цифровой обработки сигналов. – Изд-во: Lambert, 2012. – 184 с.

5. Червяков Н.И. и др. Модулярные параллельные вычислительные структуры нейропроцессорных систем. – М.: Физматлит, 2003. – 288 с.

6. Смирнов А.А., Плетнев И.Н., Уруджев И.Р. Помехоустойчивость параллельных каналов связи в системе остаточных классов // Проектирование и технологии электронных средств. – 2016. – № 2. – С. 45–48.

7. Клюев Л.Л. Теория электрической связи. – М.: Инфра-М, 2016. – 448 с.

8. Смирнов А.А., Бондарь В.В., Сахнюк П.А. Модулярное интегрирование класса показательных функций // Наука. Инновации. Технологии. ФГАУ ВПО Северокавказский федеральный университет. – 2014. – № 4. – С. 77–85.

9. Зюко А.Г., Кловский Д.Д, Коржик В.И., Назаров М.В. Теория электрической связи. Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1999. – 342 с.