УДК 519.813

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ПОСТАВОК

Гоголин В.А., Николаева Е.А.

ФГБОУ ВО «Кузбасский государственный технический университет имени Т.Ф. Горбачева», Кемерово, e-mail: nikolaevaea@yandex.ru

Классическая транспортная задача – это математическая задача линейного программирования специального вида о поиске оптимального распределения однородных объектов с минимизацией затрат на их перемещение. В литературе данная задача широко изучена, в данной работе описана транспортная задача, в которой введены дополнительные ограничения, связанные с выполнением всех поставок в заданный срок. Это дополнительные ограничения, связанные со скоростью поставок, и ограничения, задающие момент времени к которому груз должен быть доставлен, то есть дополнительно введены два вида ограничений, одни относительно поставщиков, другие относительно заказчиков. Учет времени поставок оказывает существенное влияние на оптимальное распределение поставок и значение минимума транспортных затрат. В работе показано, что с возрастанием скоростей поставок решение транспортной задачи с учетом времени поставок будет стремиться к решению классической транспортной задачи.

Ключевые слова: задача линейного программирования, линейная форма, транспортная задача, закрытая транспортная задача, минимизация затрат на перемещение

TRANSPORT TAKE WITH TIME OF SUPPLY

Gogolin V.A., Nikolaeva E.A.

Federal Budget Educational Institution of Higher Education Kuzbass State Technical University named after T.F. Gorbachev, Kemerovo, e-mail: nikolaevaea@yandex.ru

Classic transportation problem is a mathematical problem of linear programming a special type of search for optimal allocation of homogeneous objects minimizing the cost of their move. In the literature this problem is widely studied, this paper describes the transportation problem, which introduced additional restrictions related to the execution of all deliveries in a given period of time. These are additional constraints associated with the speed of delivery and limitations specifies the time to which the shipment is to be delivered, that is additionally introduced two kinds of constraints, one concerning suppliers relative to other customers. Records the time of supply of the eye-shows a significant impact on the optimal allocation of supply and minimum transportation costs. It is shown that with increasing velocity of the supply solution of the transport problem considering the time of supply will tend to the solution of classical transport problems.

Keywords: the problem of linear programming, linear form, transport problem, closed transport problem, minimization of costs for moving

Основной задачей математического моделирования транспортных перевозок является построение оптимального плана перевозок [1]. В классической постановке Монж – Канторовича предполагается оптимизация по времени или стоимости перевозок однородного груза без учета временных требований заказчика, то есть требований выполнения сроков поставок. Это серьезное допущение значительно сужает возможности использования классической транспортной задачи при решении прикладных вопросов. В данной работе предлагается обобщение математической модели транспортных перевозок с учетом времени поставок.

Классическая транспортная задача

Математическая постановка классической транспортной задачи сводится к следующему [2–4]: требуется найти минимум линейной формы с $n + m$ переменными:

$$F(X) = c_{11} \cdot X_{11} + c_{12} \cdot X_{12} + \ldots + c_{mn} \cdot X_{mn}. \quad (1)$$

С выполнением баланса по поставкам от m поставщиков

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} = A_1; \\ \ldots \\ X_{m1} + X_{m2} + \ldots X_{mn} = A_m. \end{cases}$$

С выполнением баланса по заказам от n заказчиков

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + \ldots + X_{m1} = B_1; \\ \ldots \\ \mathrm{X}_{1\mathrm{n}} + X_{2n} + \ldots + X_{mn} = B_n. \end{cases}$$

Очевидно, принимается, что $X_{ij} \geq 0$.

Коэффициенты c_{ij} линейной формы (1) определяют стоимость или время перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му заказчику; X_{ij} – количество груза, отправляемое от i-го поставщика к j-му заказчику.

Одним из видов транспортных задач является так называемая транспортная задача в замкнутой форме – суммарные объемы

поставок и заказов равны. Замкнутая транспортная задача в классической ее постановке решается методом потенциалов, который достаточно полно изложен в работах [3, 6].

Транспортная задача с учетом времени поставок

В данной работе в замкнутую транспортную задачу вводятся два типа дополнительных ограничений. Одни дополнительные ограничения связаны с выполнением всех поставок в заданный срок, то есть у каждого заказчика есть определенный срок, к которому необходимый ему груз должен быть доставлен.

Другие дополнительные ограничения связаны со скоростью поставки от поставщика к заказчику, то есть у каждого поставщика есть определенные технологические ограничения, вследствие которых он не может доставить груз быстрее.

Каждый из n заказчиков задает сроки поставок, которые формируют вектор сроков поставок:

$$S = \left(S_1, ...S_n\right).$$

Каждый из m поставщиков задает скорости поставок от i-го поставщика к j-му заказчику, которые формируют матрицу скоростей поставок:

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} . & . & . v_{1n} \\ . & . & . \\ v_{m1} . & . & . v_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы поставок v_{ij} задает возможный объем вывозимых грузов от i-го поставщика к j-му заказчику в единицу времени.

Для того, чтобы каждый i-ый поставщик мог бы в срок не более чем за S_j единиц времени поставить свой груз в размере X_{ij}, j-му заказчику требуются следующие дополнительные $m + n\times$ограничений по скоростям поставок:

$$X_{ij} \le S_j \cdot v_{ij}. \qquad (2)$$

Это первое дополнительное ограничение.

В то же время скорости поставок должны быть такими, чтобы не позже назначенного заказчиком срока S_j, заказы в объемах B_j должны быть выполнены. Таким образом, получаем второе дополнительное ограничение, связывающее сроки и скорости поставок:

$$S_j \sum_{i=1}^{m} v_{ij} \ge B_j,\ j = 1,...,n. \qquad (3)$$

Кроме этого, необходимо обеспечить вывоз всех объемов поставок, что приводит ко второму условию на сроки заказов и скорости поставок:

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} \cdot S_j \ge A_i,\ i = 1,...,m. \qquad (4)$$

Условия (3, 4) являются условиями разрешимости транспортной задачи с учетом времени поставок. Напомним, что условием разрешимости классической транспортной задачи является условие замкнутости [2, 4].

Таким образом, сформулированная транспортная задача с учетом времени поставок обобщает классическую транспортную задачу и формулируется следующим образом.

Требуется найти минимум линейной формы (1) с ограничениями (2, 3, 4):

$$F(X) = c_{11} \cdot X_{11} + c_{12} \cdot X_{12} + ... + c_{mn} \cdot X_{mn} \to \min,$$

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + ... + X_{1n} = A_1; \\ ... \\ X_{m1} + X_{m2} + ...X_{mn} = A_m; \\ X_{11} + X_{21} + ... + X_{m1} = B_1; \\ ... \\ \mathrm{X}_{1\mathrm{n}} + X_{2n} + ... + X_{mn} = B_n; \\ X_{ij} \le S_j \cdot v_{ij}; \\ i = 1,...,m, \\ j = 1,...,n. \end{cases}$$

Модель транспортной задачи при введении дополнительных условий можно использовать для оптимизации процесса перевозок, учитывая основное требование, а именно: выполнение всех поставок в заданный срок. Приведенная транспортная задача с учетом времени поставок решается симплекс-методом.

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим примеры решения классической транспортной задачи и транспортной задачи с учетом времени поставок.

Классическая транспортная задача. Имеется три поставщика с заданными запасами товаров:

$$A = \left(110, 190, 90\right).$$

и четыре заказчика с соответствующими потребностями:

$$B = \left(80, 60, 170, 80\right).$$

Матрица тарифов имеет вид

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Модель транспортной задачи является замкнутой.

Математическая модель данной транспортной задачи имеет вид: требуется найти минимум следующей линейной формы:

$$F(X) = 4X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 3X_{14} +$$
$$+2X_{21} + 5X_{22} + 4X_{23} + 6X_{24} +$$
$$+3X_{31} + 4X_{32} + 7X_{33} + X_{34} \to \min,$$

при условии $X_{ij} \geq 0$ и следующих ограничениях:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 110; \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 190; \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 90; \\ X_{11} + X_{21} + X_{31} = 80; \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 60; \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 170; \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 80. \end{cases}$$

Задача решалась методом потенциалов. Решение имеет вид

$$X_{12} = 50,\ X_{13} = 60,\ X_{21} = 80,$$
$$X_{23} = 110,\ X_{32} = 10,\ X_{34} = 80,$$
$$F_{\min}(X) = 1330.$$

Транспортная задача с учетом времени поставок. В условия предыдущего примера добавим вектор сроков поставок:

$$S = (4, 3, 6, 4),$$

и матрицу скоростей поставок:

$$V = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 8 \\ 10 & 10 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Легко установить, что необходимые условия разрешимости задачи (3, 4) выполняются.

Дополнительные двенадцать ограничений по срокам поставок (2) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} X_{11} \leq 4 \cdot 8 = 32; \\ X_{12} \leq 3 \cdot 6 = 18; \\ X_{13} \leq 6 \cdot 10 = 60; \\ X_{14} \leq 4 \cdot 8 = 32; \\ X_{21} \leq 4 \cdot 10 = 40; \\ X_{22} \leq 3 \cdot 10 = 30; \\ X_{23} \leq 6 \cdot 14 = 84; \\ X_{24} \leq 4 \cdot 10 = 40; \\ X_{31} \leq 4 \cdot 3 = 12; \\ X_{32} \leq 3 \cdot 6 = 18; \\ X_{33} \leq 6 \cdot 6 = 36; \\ X_{34} \leq 4 \cdot 6 = 24. \end{cases}$$

Переобозначим переменные в целевой функции (1) и в ограничениях (2, 3, 4).

$$X_{11} = x_1,\quad X_{12} = x_2,\quad X_{13} = x_3,\quad X_{14} = x_4,$$
$$X_{21} = x_5,\quad X_{22} = x_6,\quad X_{23} = x_7,\quad X_{24} = x_8,$$
$$X_{31} = x_9,\quad X_{32} = x_{10},\quad X_{33} = x_{11},\quad X_{34} = x_{12}.$$

Получим следующую математическую постановку задачи в новых обозначениях.

Найти минимум линейной формы:

$$F(x) = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 2x_5 +$$
$$+5x_6 + 4x_7 + 6x_8 + 3x_9 + 4x_{10} + 7x_{11} + x_{12},$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 110; \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 190; \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 90; \\ x_1 + x_5 + x_9 = 80; \\ x_2 + x_6 + x_{10} = 60; \\ x_3 + x_7 + x_{11} = 170; \\ x_4 + x_8 + x_{12} = 80; \\ x_1 \leq 32;\ x_2 \leq 18; \\ x_3 \leq 60;\ x_4 \leq 32; \\ x_5 \leq 40;\ x_6 \leq 30; \\ x_7 \leq 84;\ x_8 \leq 40; \\ x_9 \leq 12;\ x_{10} \leq 18; \\ x_{11} \leq 36;\ x_{12} \leq 24. \end{cases}$$

Задача решена симплекс-методом. Решение имеет вид

$$x_1 = 28,\ x_2 = 12,\ x_3 = 50,\ x_4 = 20,$$
$$x_5 = 40,\ x_6 = 30, x_7 = 84,\ x_8 = 36,$$
$$x_9 = 12,\ x_{10} = 18,\ x_{11} = 36,\ x_{12} = 24,$$
$$F_{\min}(x) = 1698.$$

Наглядное сравнение решений классической транспортной задачи и транспортной задачи с учетом времени поставок приведено в таблице.

Отсюда видно, что учет времени поставок оказывает существенное влияние на оптимальное распределение поставок и значение минимума транспортных затрат.

Следует отметить, что с возрастанием скоростей поставок решение транспортной задачи с учетом времени поставок будет стремиться к решению классической транспортной задачи. В случае, когда правые части ограничения (4) будут не меньше потребностей соответствующего заказчика, эти ограничения будут автоматически выполнены и решения обеих задач совпадут.

Сравнение решений классической транспортной задачи
и транспортной задачи с учетом времени поставок

Без ограничения сроков поставок						С ограничением сроков поставок					
	1	2	3	4	Запасы		1	2	3	4	Запасы
1	0	50	60	0	110	1	28	12	50	20	110
2	80	0	110	0	190	2	40	30	84	36	190
3	0	10	0	80	90	3	12	18	36	24	90
Потребности	80	60	170	80		Потребности	80	60	170	80	
$F_{\min}(x) = 1330$						$F_{\min}(x) = 1698$					

Если рассматриваемая транспортная задача является открытой, то необходимо ввести дополнительного заказчика с объемом заказов, делающих задачу замкнутой. Тарифы перевозок к этому заказчику задаются равными нулю, а время поставок к нему достаточно большим.

Учет времени поставок при моделировании транспортных перевозок позволит находить более адекватные оптимальные решения в задачах логистики [1], в транспортных задачах горной промышленности [7], металлургии [8], пищевой промышленности [9] и других областях.

Заключение

В статье описана транспортная задача, в которую введены дополнительные ограничения, связанные с выполнением всех поставок в заданный срок. Показано, что учет времени поставок оказывает существенное влияние на оптимальное распределение поставок и значение минимума транспортных затрат. Также отмечено, что с возрастанием скоростей поставок решение транспортной задачи с учетом времени поставок будет стремиться к решению классической транспортной задачи.

Список литературы

1. Лубенцова В.С. Математические методы и модели в логистике / В.С. Лубенцова. – Самара: Самар. гос техн. ун-т. 2008. – 157 с.

2. Данциг Д. Линейное программирование, его применения и обобщения / Д. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.

3. Палий И.А. Линейное программирование / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008. – 258 с.

4. Кузнецов А.В. Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. – СПб.: Лань, 2013. – 352 с.

5. Мунасыпов Н.А. Линейное программирование / Н.А. Мунасыпов. – М.: Пресса, 2015. – 122 с.

6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. – СПб.: Лань, 2011. – 352 с.

7. Резниченко С.С. Математические методы и моделирование в горной промышленности / С.С. Резниченко, А.А. Ашихмин. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 401 с.

8. Горенский Б.М. Моделирование процессов и объектов в металлургии / Б.М. Горенский, Л.А. Лапина, А.Ш. Любанова и др. – Красноярск: ИПК СФУ, 2008. – 145 с.

9. Тырин А.Ю. Модели транспортного обслуживания в цепях поставок пищевой промышленности // Вестник КузГТУ. – 2011. – № 4. – С. 89–92.