

УДК 531.8

РАСЧЕТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРАНСМИССИОННОГО ВАЛА В ПРОГРАММНОМ ПАКЕТЕ MOCODISS

Архипов С.В.

ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет», Улан-Удэ, e-mail: svarkh@bsu.ru

В работе рассмотрен принцип построения основных расчетных схем программного пакета MOCODISS (*Modeling of Continuous-Discrete Systems*), предназначенного для расчета достаточно сложных непрерывно-дискретных систем, состоящих из одномерных систем упруго связанных стержней на упругом неоднородном основании и упруго присоединенных к ним цепочек масс. Рассмотрен вопрос применения общей расчетной схемы для разных вариантов исполнения стержневых конструкций. Изложены основные идеи математического аппарата программного пакета MOCODISS для расчета динамических характеристик и напряженно-деформированного состояния стержневых систем. Представлен сравнительный анализ точности расчетов на примере известной модельной задачи. Исследована зависимость собственных характеристик трансмиссионного вала относительно допустимых вариаций длины шлицевого соединения. Выявлен диапазон изменения низших частот, максимальных смещений и усилий при изменении длины шлицевого соединения трансмиссионного вала автомобилей УАЗ.

Ключевые слова: поперечные колебания, трансмиссионный вал, метод сплайн-преобразования координат, частота собственных колебаний, вибрационная амплитуда

CALCULATION OF TRANSVERSE VIBRATIONS OF TRANSMISSION SHAFT IN MOCODISS SOFTWARE PACKAGE

Arkhipov S.V.

Federal Government Budget Educational Institution of Higher Education Buryat State University,
Ulan-Ude, e-mail: svarkh@bsu.ru

The article considers a building-up principle of the basic calculation schemes for MOCODISS software package (*Modeling of Continuous-Discrete Systems*) to calculate more difficult continuous-discrete systems consisting of one-dimensional systems with elastically attached rods on the elastic non-uniform foundation and elastically mounted series of discrete masses. The use of the common calculation scheme for different variants of the rod constructions is considered here. To count the dynamic characteristics and strain-stress state of the rod system the main ideas of a mathematical apparatus of MOCODISS software package are explained. The known model task is used for the comparative analysis of accuracy of calculations. The calculation of transverse vibrations of drive transmission shaft is carried out. The dependence between own characteristics of transmission shaft and length change of flexible spline joint is studied.

Keywords: transverse vibrations, a transmission shaft, method of spline transformations of coordinates, free frequency, vibrational amplitude

Стержни широко применяются в различных машиностроительных сооружениях и приборах. При этом условия работы и взаимодействия стержней с другими элементами конструкции исключительно многообразны [5]. Так, например, трансмиссионные валы испытывают различные виды нагрузок. В силу неуравновешенности масс, работы муфт с перекосом трансмиссионные валы помимо основных крутильных нагрузок испытывают продольные и поперечные нагрузки. Для предотвращения опасных вибраций, снижения динамических нагрузок совершенствуются компенсирующие свойства упругих муфт [8], разрабатываются новые материалы конструкций. Поэтому развитие методов расчета динамических характеристик неоднородных стержневых систем, а также разработка программного обеспечения, реализующего уточненные методики, продолжают оставаться актуальными.

Авторская программа [2] MOCODISS (*Моделирование непрерывно-дискретных систем*) позволяет проектировать и производить расчеты на прочность непрерывно-дискретных систем, представленных неоднородным стержнем и подсистемой дискретных масс на вязкоупругом основании. Пакет состоит из модулей подготовки данных, расчета и анализа результатов. Модуль расчета основан на методе сплайн-преобразования координат.

Теоретические основы сплайн-аппроксимаций заложены в трудах Дж. Алберга [1], Э. Нильсона, Дж. Уолша, А. Сарда, С. Вейнтрауба и др. Значительный вклад внесли В.А. Лазарян, С.И. Конашенко [7], Е.Т. Григорьев, Н.Б. Тульчинская, А.К. Юсупов [9] и др.

В работе изложен принцип построения основных расчетных схем программного пакета MOCODISS. Обсуждаются основные идеи математического аппарата.

Рассмотрен пример расчета известной в литературе задачи о колебаниях крыла самолета [4]. Приведен расчет низших частот поперечных колебаний, перемещений и усилий трансмиссионного вала автомобилей УАЗ при вариациях длины шлицевого соединения.

Основная расчетная схема MOCODISS

В расчетной схеме MOCODISS неоднородный по жесткости и массе стержень аппроксимируется большим числом однородных, за исключением точечных включений в массу, стержней, связанных вязкоупругими шарнирами с двумя степенями свободы сравнительно малой жесткости k_{M_i} и k_{Q_i} . Коэффициент k_{M_i} соответствует угловой жесткости шарнира, k_{Q_i} – поперечной. Каждый однородный стержень такой системы имеет неоднородное вязкоупругое основание, точечную массу M_{rq} в сечении $x = d_{rq}$, вязкоупругое защемление и опору жесткости k_{2rq} и k_{1rq} ($r = \overline{1, n+1}$, $q = \overline{1, N}$) соответственно.

Основная расчетная схема MOCODISS позволяет проводить исследование поперечных колебаний неоднородного стержня с подсистемой дискретных масс, связанных между собой, неподвижным основанием и с некоторыми сечениями $x = d_{rq}$ стержня вязкоупругими связями.

Такая расчетная схема может быть использована при анализе различных строительных конструкций, узлов машин и установок, например колонных аппаратов химических производств и других объектов. В частности, при моделировании коренных валов, несущих основные рабочие органы машины, а также валов передач. Упругие шарниры расчетной схемы позволяют исследовать движение валов, соединенных цилиндрическими шарнирами [6], упругими муфтами. Возможен учет промежуточных опор и закрепленных масс.

Таким образом, приведенная расчетная схема охватывает довольно большой класс элементов машиностроительных конструкций, объединенных общим математическим описанием.

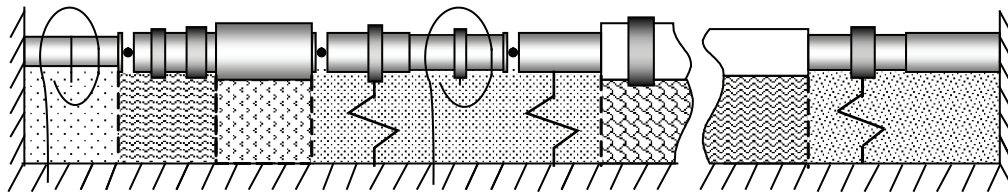


Рис. 1. Пример неоднородного стержня основной расчетной схемы MOCODISS

Краткое описание математической модели

Математическая модель вибрационных поперечных колебаний такой стержневой системы [2] приводит к начально-краевой задаче (1)–(3):

$$\begin{aligned} & \left(1 + \mu_1 \frac{\partial}{\partial t}\right) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[k_2(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + k_1(x) w \right\} + m(x) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial w}{\partial t} \right] = \\ & = \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \sum_{p=1}^P c_{rqp1} \left(1 + \mu_1 \frac{d}{dt}\right) [y_{rqp1}(t) - w(d_{rq}, t)] \sigma_1(x - d_{rq}); \\ & M_{rqp\ell} [\ddot{y}_{rqp\ell} + \mu_0 \dot{y}_{rqp\ell}] + \left(1 + \mu_1 \frac{d}{dt}\right) \times \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ c_{rqp\ell} (y_{rqp\ell} - y_{rqp, \ell-1}) + c_{rqp, \ell+1} (y_{rqp\ell} - y_{rqp, \ell+1}) + \tilde{c}_{rqp\ell} y_{rqp\ell} \right\} = 0. \\ & w(x, 0) = w_0(x); \quad w(x, 0) = \hat{w}_0(x); \\ & y_{rqp\ell}(0) = \bar{y}_{rqp0}; \quad \dot{y}_{rqp\ell}(0) = \hat{y}_{rqp0}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$r = \overline{1, n+1}, \quad q = \overline{1, N}, \quad p = \overline{1, P}, \quad \ell = \overline{1, K};$$

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0; \quad w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Здесь $w(x, t)$, $y_{rqp\ell}(t)$ – перемещения стержня и масс $M_{rqp\ell}$; $c_{rqp\ell}$ – жесткость упругой связи дискретных масс p -й цепочки, закрепленной в сечении $x = d_{rq}$; $\bar{c}_{rqp\ell}$ – жесткость упругой связи массы M_{rqp} с неподвижным основанием; σ_0 и σ_1 – функции единичного скачка и Дирака; μ_0 и μ_1 – внешние и внутренние диссипативные коэффициенты; $EI(x)$ и $m(x)$ – параметры жесткости и массы неоднородного стержня, удовлетворяющие условиям (4) и (5) соответственно; $k_1(x)$ и $k_2(x)$ – характеристики неоднородного основания (6).

$$EI(x) = EI_0 \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_0(x - a_i) \right]^{-1} + \sum_{i=1}^n \left[\left(-\frac{EI_0}{k_{Qi}} \left(\frac{Z'(a_i^*)}{Z(a_i^*)} \right)^2 + \frac{EI_0}{k_{Mi}} \right) \times \right. \right. \quad (4)$$

$$\left. \left. \times \sigma_1(x - a_i^*) - \frac{EI_0}{k_{Qi}} \frac{Z'(a_i^*)}{Z(a_i^*)} \sigma_2(x - a_i^*) \right] \right\}^{-1};$$

$$m(x) = m_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \beta_i \sigma_0(x - a_i) + \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \frac{M_{rq}}{m_0} \sigma_1(x - d_{rq}) \right\}; \quad (5)$$

$$X'' = \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_0(x - a_i) \right]^{-1} + \sum_{i=1}^n \frac{EI_0}{k_{Mi}} \sigma_1(x - a_i^*) \right\} Z - \sum_{i=1}^n \frac{EI_0}{k_{Qi}} Z'(a_i^*) \sigma_2(x - a_i^*);$$

$$Z'' = \lambda^4 \left\{ 1 - \frac{\bar{k}_0}{m_0 v^2} + \sum_{i=1}^n \left[\beta_i - \frac{\bar{k}_i \bar{k}_0}{m_0 v^2} \right] \sigma_0(x - a_i) \right\} X + \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \left\{ \left[\frac{M_{rq}^* \lambda^4}{m_0} - \frac{k_{1rq}}{EI_0} \right] X(d_{rq}) \sigma_1(x - d_{rq}) + \frac{k_{2rq}}{EI_0} X'(d_{rq}) \sigma_2(x - d_{rq}) \right\}. \quad (7)$$

$$M_{rq}^* = M_{rq} + \sum_{p=1}^P M_{rqp1} \frac{\omega_{rqp1}^2}{v^2} [A_{rqp1}^* - 1]. \quad (8)$$

Выражение $\lambda^4 = \frac{m_0 v^2}{EI_0}$ в (7) задает собственные значения системы.

Затем, применив к уравнениям (7) сплайн-преобразование

$$x = \gamma_0 \xi + \sum_{i=1}^n \gamma_i (\xi - b_i) \sigma_0(\xi - b_i),$$

$$k_1(x) = \bar{k}_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^n \bar{k}_i \sigma_0(x - a_i) + \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N \frac{k_{1rq}}{\bar{k}_0} \sigma_1(x - d_{rq}) \right\};$$

$$k_2(x) = \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N k_{2rq} \sigma_1(x - d_{rq}). \quad (6)$$

$$\text{В (4)–(6) и далее } Z = -\frac{M(x)}{EI_0} = \frac{I(x)}{I_0} X'' -$$

приведенный изгибающий момент $M(x)$; EI_0 , m_0 и \bar{k}_0 – параметры жесткости и массы стержня, и упругого основания при $0 < x < a_1$; $I(x)$ момент инерции сечения стержня в точке x ; $I(x) = I_0$ при $0 < x < a_1$; α_i , β_i и \bar{k}_i – коэффициенты скачков параметров стержня и основания в сечениях $x = a_i$. Для преобразований формул принято, что точечные включения в жесткость стержня расположены в сечениях $a_i^* = a_i + 0$.

Применяя классический метод решения начально-краевой задачи (1)–(3), находят частные нетривиальные решения $T(t)X(x)$ и $A_{rqp\ell} T(t)$ подсистемы (1), удовлетворяющие крайевым условиям (3). Для определения амплитуд $A_{rqp\ell}$ дискретных масс rqp -й цепочки найдены рекуррентные формулы относительно перемещений сечений $x = d_{rq}$ стержня.

Далее, задача о совместных колебаниях неоднородного стержня и подсистемы масс сводится [3] к формулировке (7), соответствующей проблеме колебаний неоднородного стержня с жестко присоединенными приведенными массами (8).

получаем уравнение (9) с постоянными коэффициентами в правой и сингулярностями высокого порядка в левой части уравнения

$$\begin{aligned}
 & X_{\xi}^{IV} - \lambda^4 X = \\
 & = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{r=1}^{n+1} \sum_{q=1}^N h_{\alpha r q} X_{\xi}^{(\alpha)}(c_{r q}) \sigma_{\alpha+1}(\xi - c_{r q}) + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{i=1}^n \zeta_{\alpha i} X_{\xi}^{(\alpha)}(b_i - 0) \sigma_{4-\alpha}(\xi - b_i) + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i=1}^n e_{\alpha i} X_{\xi}^{(\alpha+1)}(b_i - 0) \sigma_{\alpha+2}(\xi - b_i^*).
 \end{aligned} \tag{9}$$

В (9) коэффициенты $h_{\alpha r q}$, $\zeta_{\alpha i}$, $e_{\alpha i}$ зависят от параметров стержневой системы [3].

Применяя операционный метод к уравнению (9), исключив коэффициенты $X_{\xi}^{(\alpha)}(c_{r q})$ и $X_{\xi}^{(\alpha)}(b_i - 0)$, получено [3] аналитическое выражение для собственных форм в виде

$$X(\xi) = \sum_{\zeta=0}^3 X_{\xi}^{(\zeta)}(0) \Phi_{\zeta}(\xi), \tag{10}$$

где $\Phi_{\zeta}(\xi)$, $\zeta = \overline{0,3}$ – принято [7] интерпретировать как обобщенные функции А.Н. Крылова.

Найденные аналитические выражения обобщенных функций А.Н. Крылова позволили из (3) определить собственные значения λ_s ($s = 1, 2, 3, \dots$) континуально-дискретной системы. Далее, используя обратное сплайн-преобразование

$$\xi = \gamma_0^* x + \sum_{i=1}^n (x - a_i) \gamma_i^* \sigma_0(x - a_i),$$

найденны собственные формы в начальной системе координат.

Представленный математический аппарат составляет основу расчетного модуля программного пакета MOCODISS.

Сравнительный анализ

Для подтверждения точности разработанных алгоритмов проводились [2], [3] многочисленные сравнения с известными в литературе точными и численными решениями, а также решениями сторонних программных пакетов, реализующих метод конечных элементов. В качестве примера рассмотрим известную задачу о собственных колебаниях консольного стержня [4], высота которого уменьшается по линейному закону, а ширина равна единице (рис. 2).

Стержень разбивается на десять равных частей длиной $0,1 \cdot L$. Жесткость стержня на первом участке равна $EI_0 = 0,2995 \cdot Eb^3/3$, интенсивность массы – $m_0 = 0,4667 \cdot b\rho$, где $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ – плотность материала, $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ – модуль упругости. Величина скачков жесткости α_i (4) соответственно равна 1,29; 2,11; 3,14; 4,37; 5,80; 7,44; 9,30; 11,34; 13,66, а интенсивности массы $\beta_i = 0,333$, $i = \overline{1,9}$. Длина стержня $L = 15 \text{ м}$, высота $b = 0,25 \text{ м}$.

В табл. 1 приведены результаты расчетов для трех низших собственных частот ν_i , соответствующих им значений $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i \cdot L$ и точные значения коэффициентов $\tilde{\lambda}_i$, $i = \overline{1,3}$. В работе [4] приводятся точные значения коэффициентов ϕ_i частоты ν_i : $\phi_1 = 2,48$; $\phi_2 = 9,12$; $\phi_3 = 21,3$. Величины ϕ_i и $\tilde{\lambda}_i$ в данном случае связаны соотношением $\tilde{\lambda}_i = 2,62 \sqrt{\phi_i}$ [7]. Как видно из табл. 1, точные значения $\tilde{\lambda}_i$ и вычисленные по программе MOCODISS достаточно близки.

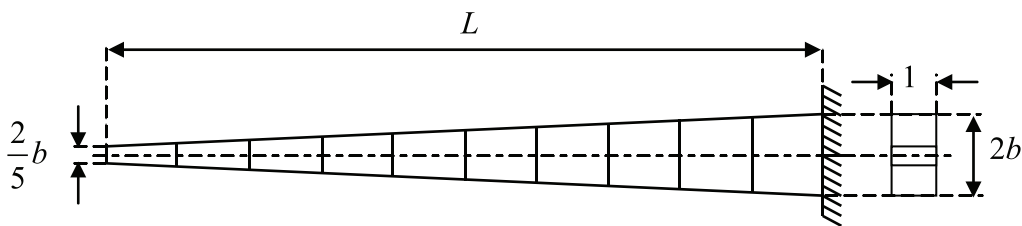


Рис. 2. Консольный стержень

Таблица 1

Собственные частоты ν_i (Гц) и соответствующие им числа $\tilde{\lambda}_i$ консольного стержня

| i | MOCODISS | | Точное значение |
|---|-----------|---------------------|---------------------|
| | ν_i | $\tilde{\lambda}_i$ | $\tilde{\lambda}_i$ |
| 1 | 44,47506 | 4,134 | 4,134 |
| 2 | 162,83863 | 7,910 | 7,909 |
| 3 | 381,42888 | 12,107 | 12,105 |

Вычислительные эксперименты

В следующих вычислительных экспериментах исследована зависимость низших частот колебаний трансмиссионного вала автомобиля от длины шлицевого соединения. Общая расчетная схема карданной передачи автомобиля может быть представлена на рис. 3.

Для определенности на рис. 3 приведены геометрические размеры переднего трансмиссионного вала автомобилей

УАЗ-3741, УАЗ-3962, УАЗ-2206, УАЗ-3303. Шлицевое соединение вала изменяется в диапазоне от 0 до 54 мм. В расчетах предполагается, что каждая часть ступенчатого стержня однородна и выполнена из стали ($E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³). Параметры стержневой системы приведены в табл. 2.

Результаты исследования зависимости собственных частот карданного вала от изменения в указанном диапазоне значений Δx приведены на рис. 4.

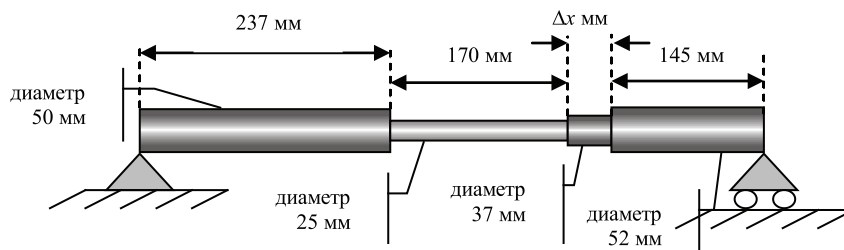


Рис. 3. Общая расчетная схема карданной передачи автомобиля

Таблица 2

Таблица параметров стержневой системы

| MOCODISS: Табличный редактор: kardan.mcp | | | | | | |
|--|--------------|------------|------------|------------|------------|---|
| Наименование: Таблица стержневой системы | | | | | | |
| Код таблицы: 1.2 | | | | | | |
| Массив: BEAM[1..9,1..4] | | | | | | |
| N° | Наименование | 1 | 2 | 3 | 4 | Описание |
| 1 | a[1..4] | 0,2370 | 0,4070 | 0,4556 | 0,6006 | Координаты скачков жесткости и интенсивности массы стержневой системы |
| 2 | d[1..4] | 0,1185 | 0,3220 | 0,4313 | 0,5281 | Координаты точек крепления цепочек к стержню |
| 3 | Sheigh[1..4] | 0 | 0 | 0 | 0 | Высота прямоугольного сечения |
| 4 | Swidth[1..4] | 0 | 0 | 0 | 0 | Ширина прямоугольного сечения |
| 5 | EI[1..4] | 61359,2315 | 3834,9520 | 18399,5326 | 71781,6222 | Распределенная изгибная жесткость стержневой системы |
| 6 | m[1..4] | 15,3153 | 3,8288 | 8,3866 | 16,5650 | Распределенная масса стержневой системы |
| 7 | Mvk[1..4] | 0 | 0 | 0 | 0 | Жестко прикрепленные массы к стержневой системе |
| 8 | kM[1..3] | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | Угловая жесткость шарнира |
| 9 | kQ[1..3] | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | 1000000000 | Поперечная жесткость шарнира |
| 10 | | | | | | |
| 11 | | | | | | |

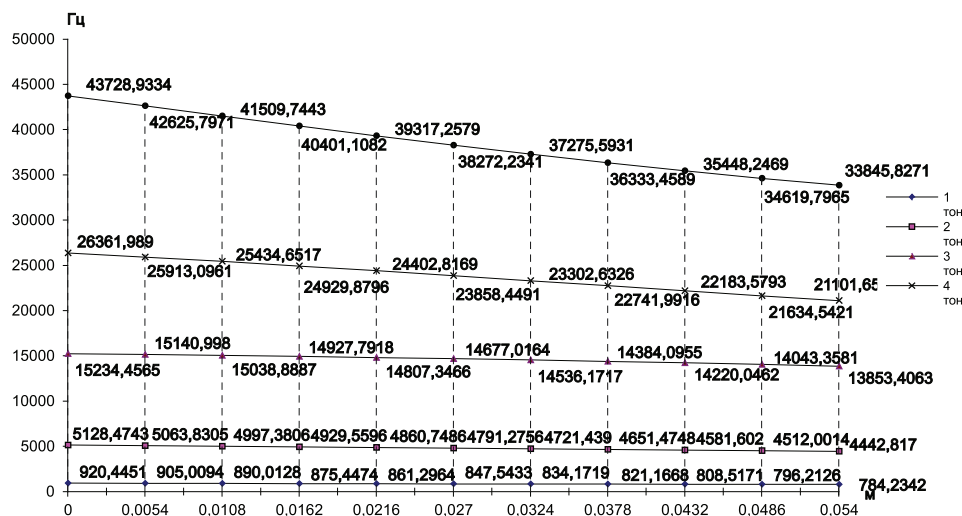


Рис. 4. Зависимость пяти низших частот карданного вала от изменения Δx в диапазоне от 0 до 54 мм

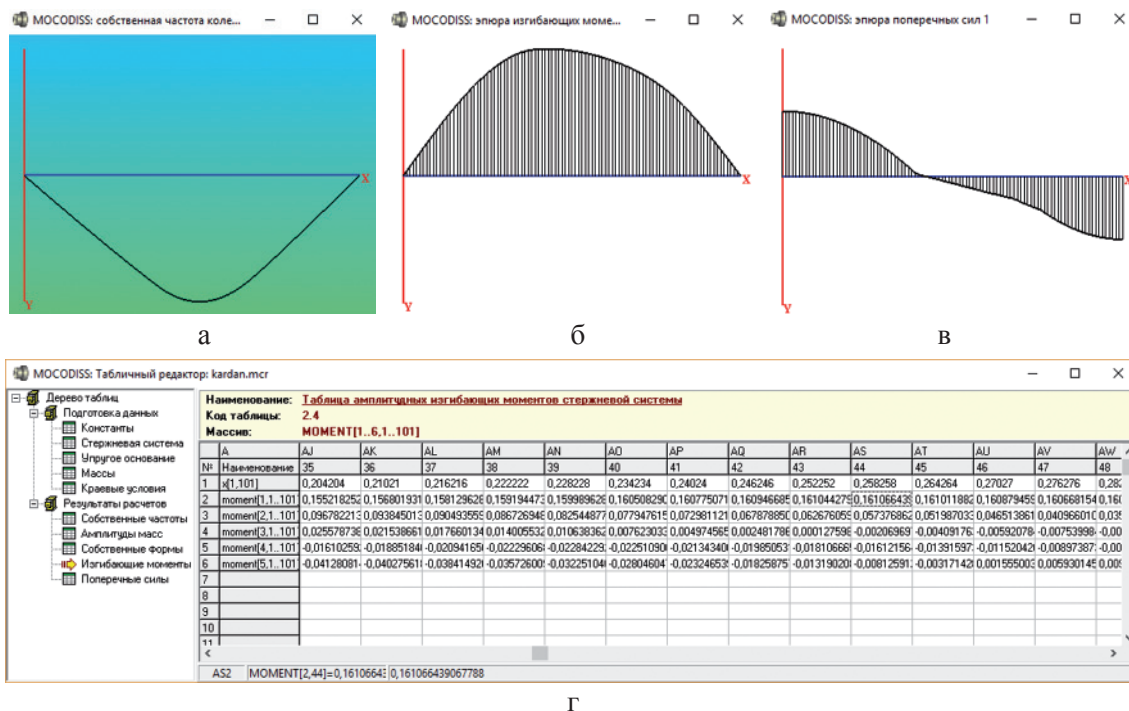


Рис. 5. Модальные окна MOCODISS в режиме результатов расчета: а – первая форма колебаний ($L = 0,6006$ м, частота $796,21$ Гц); б – эпюра изгибающих моментов; в – эпюра поперечных сил; г – таблица изгибающих моментов

Как видно из рис. 4, удлинение карданного вала за счет подвижного шлицевого соединения приводит к уменьшению значений собственных частот. При этом значительно уменьшаются только высшие частоты. Диапазон изменения основной частоты поперечных колебаний вала при допустимых вариациях шлицевого зазора составил от 784,2 до 920,5 Гц.

С увеличением длины вала увеличиваются и максимальные смещения сечений. Результаты расчетов форм собственных колебаний и амплитудных усилий карданного вала, соответствующих длине – 0,6006 м, изображены на рис. 5.

Максимальные смещения первой формы колебаний достигаются на участке второй ступени с наименьшим диаметром поперечного сечения при $x = 312$ мм. Максимальное значение приведенного изгибающего момента равно $0,161 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$ при $x = 258$ мм.

Заключение

Сравнение результатов расчета с известным точным решением доказывает высокую эффективность алгоритмов MOCODISS. Вычислительные эксперименты показали применимость основных расчетных схем программного пакета MOCODISS для задач динамики трансмиссионных валов с подвижным шлицевым соединением. Выявлен

диапазон изменения низших частот, максимальных смещений и усилий при изменении длины шлицевого соединения трансмиссионного вала автомобилей УАЗ.

Разработанный программный пакет MOCODISS найдет свое применение в расчете аппаратов колонного типа, опор электропередач, участков трубопровода и др.

Список литературы

- Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 319 с.
- Архипов С.В. Программный пакет MOCODISS и его применение к расчету стержневых систем на упругом основании // Автомат. и телемех. – 2011. – № 7. – С. 29–38.
- Архипов С.В. Обобщенные функции в задачах механики составных конструкций. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского государственного университета. – 2007. – 160 с.
- Бисплингхофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. Аэроупругость. – М., 1958. – 801 с.
- Жаркова Н.В., Никитин Л.В. Прикладные задачи динамики упругих стержней // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 80–98.
- Зайцев П.А., Баляков Д.Ф., Смирнов Н.А. Обзор шарнирных устройств в современной ракетно-космической технике // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2011. – № 7. – С. 93–95.
- Лазарян В.А., Конашенко С.И. Обобщенные функции в задачах механики. – Киев: Наук. думка, 1974. – 189 с.
- Лысенко А.П. Сборная композитная упругая муфта с повышенным вибропоглощением // Труды ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова. – 2017. – № 1 (379). – С. 56–63.
- Юсупов А.К. Методы прикладной математики в строительной механике: в 4 т. – Махачкала, 2008. – Т. 1. – 268 с.