

УДК 532.542:621

## НОВАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЕСОЧНОЙ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ СТЕНКИ ТРУБЫ

Кондратьев А.С., Нья Т.Л., Швыдько П.П.

*Московский политехнический университет, Москва, e-mail: ask41@mail.ru*

Проведенный ранее обзор известных эмпирических методов расчета коэффициентов гидравлического сопротивления в круглой трубе с произвольной песочной шероховатостью стенки показал, что все рассмотренные методы расчета течения при переходном режиме не обеспечивают совпадение с опытными данными в области минимальных значений коэффициентов гидравлического сопротивления. Предложенные ранее авторами эмпирические зависимости обеспечивают совпадение с опытными данными в указанной области. При этом эти зависимости являются эмпирическими. В данной работе, на основе анализа известных опытных данных Никурадзе, сформулирована физико-математическая модель течения жидкости при переходном режиме как суперпозиция течения вдоль гидравлически гладкой и предельно шероховатой поверхностей. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с опытными данными, в том числе в области минимальных значений коэффициента гидравлического сопротивления. На основе выполненных численных расчетов получена зависимость, аппроксимирующая результаты численных расчетов профиля скорости при произвольной степени песочной шероховатости стенки трубы.

**Ключевые слова:** турбулентный режим течения, стенка с песочной шероховатостью, гидравлически гладкая стенка, коэффициент гидравлического сопротивления, аппроксимация профиля скорости

## THE NEW FORMULA FOR CALCULATION HYDRAULIC RESISTANCE COEFFICIENT FOR ARBITRARY SAND ROUGHNESS SURFACE OF THE PIPE WALL

Kondratev A.S., Nha T.L., Shvydtko P.P.

*Moscow Polytechnic University, Moscow, e-mail: ask41@mail.ru*

A previous review of known empirical methods for calculating the hydraulic resistance coefficients in the circular pipe with an arbitrary sand roughness of the wall showed that all the considered methods for calculating the flow in the transitional regime do not provide a coincidence with the experimental data in the region of the minimum values of the hydraulic resistance coefficients. Proposed earlier by the authors empirical relationships provide a coincidence with the experimental data in this field. At the same time, these dependencies are empirical. In this paper, on the basis of analysis of the known experimental data of Nikuradze, a physico-mathematical model of fluid flow under the transition regime is formulated as a superposition of flow along a hydraulically smooth and to the limit rough surface. The calculation results satisfactorily agree with the experimental data, including, in the field of minimum values of the hydraulic resistance coefficient. On the basis of the numerical calculations performed, a dependence is obtained that approximates the results of numerical calculations of the velocity profile for an arbitrary degree of sand roughness of the pipe wall.

**Keywords:** turbulent flow regime, wall with sandy roughness, hydraulically smooth wall, the hydraulic resistance coefficient, approximation of the velocity profile

В сравнении с движением жидкости вдоль гидравлически гладкой поверхности движение жидкости вдоль шероховатых поверхностей в расчетно-теоретическом плане изучено в значительно меньшей мере. Тем не менее, даже при расчете течения вдоль гидравлически гладкой поверхности, вблизи стенки предпочитают использовать простейшие аппроксимационные зависимости [4]. Классические работы по движению жидкости в трубопроводах с песочной шероховатостью стенки, выполненные И. Никурадзе, на первый взгляд, имеют чисто теоретический интерес. Однако, например, при движении водопесчаных потоков при небольших скоростях вдоль нижней образующей трубы возможно образование неподвижного слоя песчаных частиц, в результате чего в этой

области течения создаются условия, которые близки к условиям в опытах И. Никурадзе. Поэтому дальнейшее совершенствование методов расчета течения вдоль поверхности с песочной шероховатостью имеет не только теоретический аспект, но и практическое значение в задачах гидротранспортирования измельченных твердых материалов по трубопроводам.

Традиционно, при движении жидкости вдоль поверхности с песочной шероховатостью различают три характерных области.

1. Режим течения без проявления шероховатости

$$0 \leq v_{\tau} k_s / \nu \leq \alpha; \lambda = \lambda(\text{Re}),$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического сопротивления;  $k_s$  – величина песочной шероховатости стенки;  $v_{\tau}$  – динамическая

скорость;  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости;  $Re$  – число Рейнольдса, рассчитанное по диаметру трубы, средней скорости и кинематической вязкости жидкости.

По данным различных авторов, эмпирическая величина  $\alpha$  несколько различается, так по [3]  $\alpha = 3$  и по [5]  $\alpha = 5$ .

2. Режим течения с полным проявлением шероховатости  $\nu_\tau k_s / \nu \geq \beta$ ;  $\lambda = \lambda(k_s / R)$ .

По данным различных авторов эмпирическая величина также  $\beta$  несколько различается, так по [3]  $\beta = 60$  и по [5]  $\beta = 70$ .

3. Переходной режим течения  $\alpha \leq \nu_\tau k_s / \nu \leq \beta$ ;  $\lambda = \lambda(k_s / R, Re)$ .

Отличительной чертой переходного режима течения является наличие минимума значения коэффициента гидравлического сопротивления, положение которого определяется величинами  $k_s / R$  и  $Re$  (см. рис. 1).

Для расчета профилей скорости и коэффициентов гидравлического сопротивления при режимах течения без проявления шероховатости и с полным проявлением шероховатости имеются вполне приемлемые с точки зрения погрешности расчетные соотношения (см., например, [3, 5]).

Применительно к переходному режиму течения можно отметить следующее. В работах [3, 5] показано, что на основе теоретического анализа экспериментальных данных И. Никурадзе расчет профиля скорости и коэффициента гидравлического сопротивления может быть выполнен с помощью зависимости

$$B(\nu_\tau k_s / \nu) = U / \nu_\tau - 2,5 \times \lg(y / k_s) = \sqrt{8/\lambda} + 3,75 - 2,5 \times \lg(R / k_s). \quad (1)$$

Экспериментальная зависимость величин  $B(\nu_\tau k_s / \nu)$  от безразмерной величины  $\lg(\nu_\tau k_s / \nu)$  показана на рис. 2. Из выражения (1) следует, что если известен аналитический вид зависимости  $B(\nu_\tau k_s / \nu)$ , то по формуле (1) можно определить профиль скорости для  $y \geq k_s$  и коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$ . Верно и обратное, если независимым способом определяется, например, величина  $\lambda$ , то по формуле (1) можно определить величину  $B(\nu_\tau k_s / \nu)$  и профиль скорости.

В статьях [1, 2] авторов настоящей работы, рассмотрены опубликованные в технической литературе работы, в которых использовались различные варианты получения аналитических зависимостей, для расчета коэффициента гидравлического сопротивления и профиля скорости при переходном режиме течения. Проведенный анализ показал, что полученные расчетные соотношения не могут использоваться при переходном режиме, поскольку

они не обеспечивают совпадения с опытными данными в области минимальных значений коэффициентов гидравлического сопротивления. Предложенные расчетные зависимости лишь обеспечивают плавный переход от режима течения вдоль гидравлически гладкой поверхности к режиму течения с предельным проявлением шероховатости.

В работе [1], в соответствии с подходом, связанным с обсуждением выражения (1), при переходном режиме функция  $B = B(\nu_\tau k_s / \nu)$  аппроксимировалась выражением

$$B(\nu_\tau k_s / \nu) = 3,7 \times [1 - \exp(-\psi / 2)] + 40\psi^{11/5} \exp(-2,75\psi) + 5,5;$$

при

$$0,1 \leq \psi \leq 3,2, \quad (2)$$

где  $\psi = \lg(\nu_\tau k_s / \nu)$  – безразмерный комплекс.

При известном значении  $B(\nu_\tau k_s / \nu)$  по формуле (1) можно рассчитать профиль скорости и коэффициент гидравлического сопротивления. Сравнение опытных и расчетных данных по коэффициенту гидравлического сопротивления показало вполне удовлетворительное соответствие на уровне примерно 5%, за исключением области при  $R/k_s = 15$  и  $Re = 4000$ , где расхождение возрастало до 20%. Примечательно, что использование аппроксимационной зависимости (2) обеспечивает минимальные значения коэффициента гидравлического сопротивления, зависящее от величины безразмерной шероховатости  $R/k_s$  и числа Рейнольдса  $Re$ .

В развитие такого эмпирического подхода, в работе [2], поставленная задача решалась с использованием другого подхода. Известно, что для «технической шероховатости» формула Колбрука – Уайта справедлива при всех трех режимах течения. Далее, предполагая, что функциональный вид зависимости сохранялся, была предложена обобщенная формула Колбрука – Уайта в виде зависимости

$$\lambda = \{-2 \lg[k_s / (R \times 7,413) + 2,5226 \times f / (Re \sqrt{\lambda})]\}^{-2}, \quad (3)$$

где  $f$  – поправочная функция, зависящая от безразмерного комплекса  $(k_s \nu_\tau / \nu)$ .

Проведенные параметрические расчеты показали, что удовлетворительное соответствие с опытными данными по коэффициенту гидравлического сопротивления имеет место при следующем виде поправочной функции:

$$f = 1 - 2,2 \times \lg(k_s \nu_\tau / \nu). \quad (4)$$

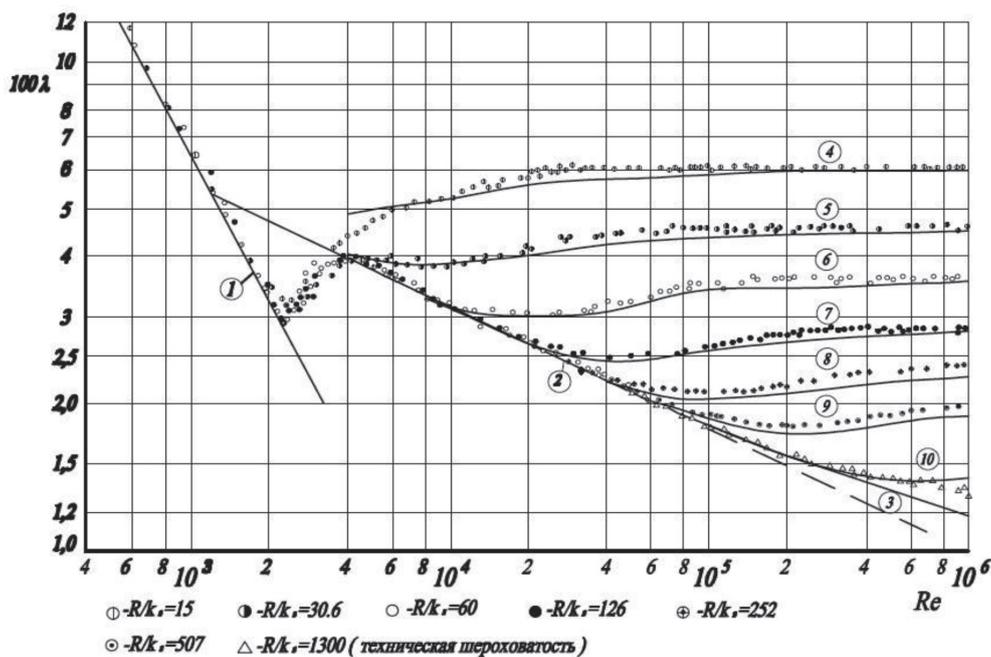


Рис. 1. Закон сопротивления для гладких и шероховатых труб. Кривая 1 соответствует ламинарному режиму течения. Кривая 2 соответствует формуле Блазиуса. Кривая 3 соответствует формуле Прандтля. Кривые 4–10 расчет по формулам (5)–(9)

В этом случае использование зависимости (1) также позволяет определять всю совокупность характеристик потока: профиль скорости и коэффициент гидравлического сопротивления. Уровень расхождения расчетных и экспериментальных значений снижается примерно в два раза, в том числе и при  $R/k_s = 15$  и  $Re = 4000$ . Такой результат представляется ожидаемым, поскольку аппроксимировалась не промежуточная величина  $B(v_{\tau s}/v)$ , а конечное значение расчетной величины  $\lambda$ .

Зависимости (2), (3) и (4) являются эмпирическими, поэтому и соответствующие итоговые формулы относятся к зависимостям такого рода. Как любые эмпирические зависимости, они могут использоваться только в диапазоне изменения опытных данных, в том числе и для интерполяции между опытными значениями, например, при промежуточных значениях высоты элементов песочной шероховатости  $0 \leq k_s \leq 507$ . Однако на практике при трубопроводном транспорте внутренняя поверхность трубы, в плане шероховатости редко бывает однородной. Например, даже при перекачке воды из природных водоемов за счет донных отложений вдоль нижней образующей трубы возникает слой твердого осадка, имеющего определенную степень шероховатости. При гидротранспортировании измельченных твердых материалов по горизонтальным трубопроводам,

даже при отсутствии твердого осадка вдоль нижней образующей трубы, шероховатость поверхности переменна. В нижней придонной области течения перемещаются наиболее крупные частицы, причем их объемное содержание выше, чем в среднем по потоку. В верхней части наблюдается обратная картина. В этой области перемещаются частицы мелких фракций, и их объемное содержание меньше, чем в среднем по потоку. В результате взаимодействия движущихся частиц с внутренней поверхностью трубы поверхность трубы становится шероховатой, причем шероховатость придонной части трубы выше шероховатости в верхней части трубы. В этом случае эмпирические зависимости, не учитывающие переменность шероховатости стенки трубы по высоте, могут использоваться лишь для предварительных оценок.

Для разработки методики расчета в случае поверхности с переменной шероховатостью необходимо сформулировать адекватную физико-математическую модель течения. Исходным элементом этой модели является подтверждение того, что при равномерной песочной шероховатости поверхности коэффициент гидравлического сопротивления достаточно удовлетворительно совпадает с опытными данными. На основании обзора публикаций, выполненного в работах [1, 2], представим коэффициент гидравлического сопротивления

трубы с произвольной песочной шероховатостью в виде зависимости

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \omega_s) + \omega_s \lambda_s, \quad (5)$$

где  $\lambda$ ,  $\lambda_0$  и  $\lambda_s$  – коэффициент гидравлического сопротивления: усредненный по всей поверхности; над частью поверхности с гидравлически гладкой стенкой; над частью поверхности с полным проявлением песочной шероховатости соответственно. А  $\omega_0 = (1 - \omega_s)$  и  $\omega_s$  – доли поверхности: над частью поверхности с гидравлически гладкой стенкой и над частью поверхности с полным проявлением песочной шероховатости.

В качестве зависимостей для расчета коэффициентов гидравлического сопротивления для гидравлически гладкой поверхности использовалась формула Прандтля [5]

$$\lambda_0 = [2 \lg(\text{Re} \lambda^{1/2}) - 0,8]^{-2} \quad (6)$$

и формула Кармана [5] при полном проявлении шероховатости

$$\lambda_s = [2 \lg(R/k_s + 1,74)]^{-2}. \quad (7)$$

Поскольку при песочной шероховатости поверхность полностью заполнена частицами, а их влияние на гидравлическое сопротивление проявляется после того, как вершины частиц выходят за пределы вязкого подслоя, то величину  $\omega_s$  можно определить с помощью выражения [1]

$$\omega_s = (1 - \delta/k_s)^2 = [1 - (\delta/R)/(k_s/R)]^2, \quad (8)$$

где  $\delta$  – толщина вязкого подслоя.

Величин безразмерной толщины вязкого подслоя определяется выражением

$$\bar{\delta} = \delta/R = 4\sqrt{2}\eta / (\text{Re}\sqrt{\lambda}). \quad (9)$$

В выражении (9) принималось, что зона вязкого течения  $\eta$  определяется выражением  $\eta = \delta v_\tau / \nu = 3$ , как среднее значение между значениями Райхардта [1]  $\eta = 2$  и Кармана [5]  $\eta = 5$ .

Совокупность выражений (5)÷(9) позволяет рассчитать зависимость  $\lambda = \lambda(\text{Re}, R/k_s)$ . Причем если  $k_s \leq \delta$ , то есть элементы песочной шероховатости не выходят за толщину вязкого подслоя, то величина  $\lambda$  рассчитывается по формуле (6).

На рис. 1 приведены результаты сравнения опытных данных и расчета по формулам (5)÷(9).

Результаты расчетов достаточно удовлетворительно согласуются с опытными данными Никурадзе, и в том числе в области минимума значений коэффициентов гидравлического сопротивления, что практически не отражено в зависимостях других авторов.

Используя полученные таким образом расчетные значения  $\lambda$ , можно рассчитать величину  $B$  по формуле (1). Результаты расчетов показаны на рис. 2.

Профиль относительной расчетной скорости  $U/v_\tau$  в трубе с произвольной песочной шероховатостью стенки трубы определяется по известной формуле [5]

$$U/v_\tau = 2,5 \ln(y/k_s) + B, \quad (10)$$

в которой величина  $B$  рассчитывалась по (1), а величина  $\lambda$  по (5)÷(9). Расчеты выполнялись для указанных на рис. 3 чисел Рейнольдса при различных степенях степени песочной шероховатости стенки трубы  $15 \leq R/k_s \leq 507$ . В качестве абсциссы использовался безразмерный параметр [3]

$$\chi = [2,5\nu / (v_\tau y) + k_s / y]^{-1}.$$

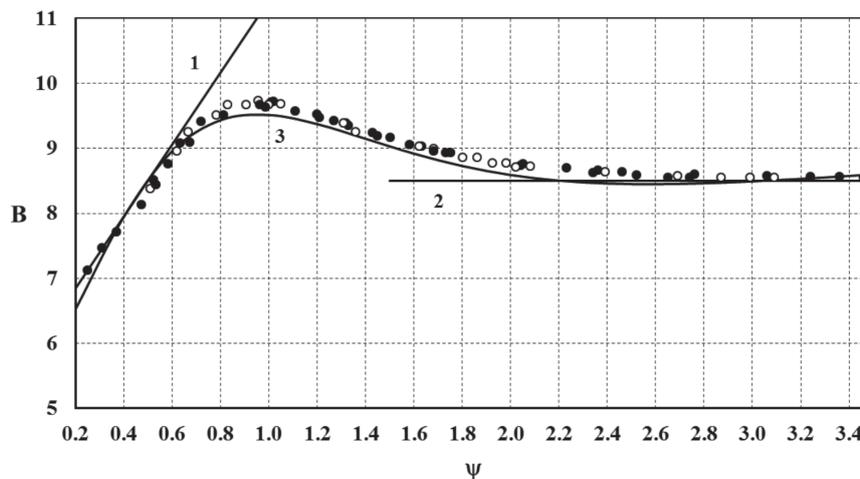


Рис. 2. Зависимость величины  $B$  от  $\psi$ . Кривая 1 соответствует режиму без проявления шероховатости. Кривая 2 соответствует режиму с полным проявлением шероховатости. Кривая 3 – расчет по формуле (2)

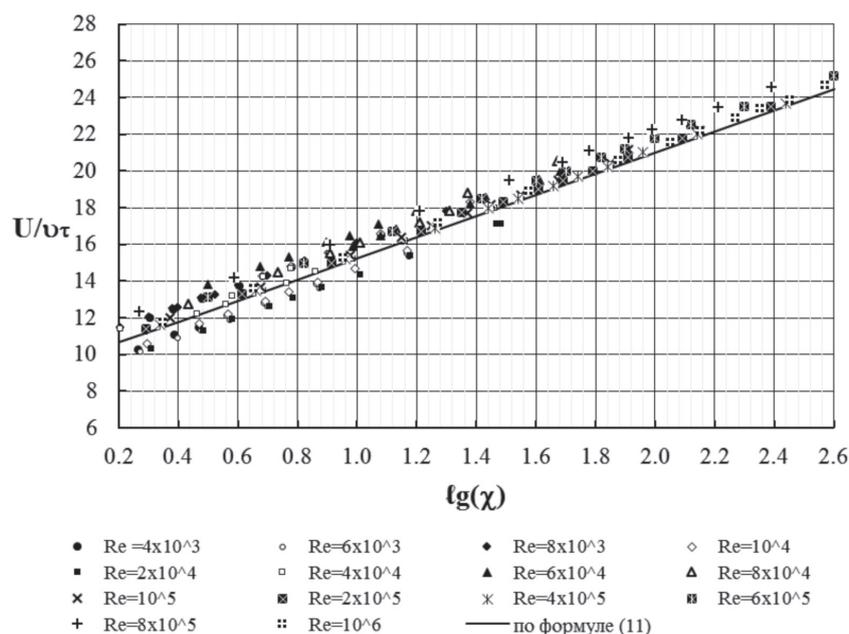


Рис. 3. Расчетные значения относительной скорости  $U/v_\tau$ , определенные по формуле (10), и их аппроксимация по формуле (11)

Результаты численных расчетов с погрешностью 10% аппроксимируются зависимостью

$$U/v_\tau = 9,5 + 5,75 \times \lg \chi. \quad (11)$$

Расчет профиля скорости является важной задачей, но конечной практической целью расчетных исследований, как правило, является определение коэффициентов гидравлического сопротивления, при которых использование инженерных аналитических зависимостей представляется предпочтительным.

В вычислительном плане, аппроксимация, предложенная в [2] (формулы (3), (4)), значительно упрощает процедуру расчета для однородной степени шероховатости поверхности. Соотношения, полученные в данной работе, при примерно одинаковом расхождении с опытными данными, включают физическое обоснование получаемых зависимостей и в связи с этим представляются более достоверными, что дает возможность не только для интерполяции внутри диапазона эксперименталь-

ных значений высоты песочной шероховатости  $15 \leq R/k_s \leq 507$ , но и экстраполяции за указанные пределы. Это также является обоснованием для проведения расчета профиля скорости над поверхностью с песочной шероховатостью, при переменной степени шероховатости поверхности, и может определять интегральный коэффициент гидравлического сопротивления в таких трубопроводах.

#### Список литературы

1. Кондратьев А.С., Нья Л.Т., Швыдько П.П. Инженерный метод расчета коэффициента гидравлического сопротивления и профиля скорости при произвольной песочной шероховатости стенки трубы // Гидравлика. Сетевой журн. – 2016. – Вып. 2. Декабрь. – 14 с.
2. Кондратьев А.С., Нья Л.Т., Швыдько П.П. Обобщение формулы Колбрука – Уайта на течение жидкости в трубе с произвольной песочной шероховатостью стенки // Фундаментальные исследования. – 2017. – № 1. – С. 74–78.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Физматгиз, 2008. – 846 с.
4. Луцкий А.Е., Северин А.В. Простейшая реализация метода пристеночных функций. – М.: ИПМ РАН, 2013. – 24 с.
5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Физматгиз, 1974. – 712 с.