УДК 519.6:532.546.2

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИВЕДЕННЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ УПРУГИХ ОПОР РОТОРА

Сафина Г.Ф.

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет», Нефтекамский филиал, Нефтекамск, e-mail: safinagf@mail.ru

Рассмотрена обратная спектральная задача определения коэффициентов приведенных жесткостей упругих опор ротора по известным частотам его свободных колебаний. Задача сформулирована с учетом не только упругих опор ротора, но и абсолютно жестких закреплений его краев. Исследована возможность существования и единственности решения поставленной в таком виде задачи. Сформулирована и доказана теорема о единственности решения поставленной обратной задачи, позволяющая определить достаточное число частот колебаний ротора. Приведен метод решения обратной задачи, сведенный к решению системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Представленный алгоритм решения позволяет по известным значениям трех частот колебаний ротора определить единственным образом значения коэффициентов приведенных жесткостей левой и правой его опор. Показано, что этим методом можно определить также и абсолютно жесткие закрепления краев ротора. Приведены примеры решений обратной задачи, подтверждающие сформулированные выводы.

Ключевые слова: ротор на опорах, приведенная жесткость, частотное уравнение, частота колебаний, единственность решения, метод диагностирования

UNIQUENESS OF THE RECONSTRUCTION IS GIVEN STIFFNESS OF ELASTIC SUPPORT OF THE ROTOR

Safina G.F.

Bashkir State University, Neftekamsk branch, Neftekamsk, e-mail: safinagf@mail.ru

The examples of decisions of the reverse task confirming the formulated outputs are given.The considered inverse spectral problem of determining the coefficients given stiffness of elastic support of the rotor at a known frequency of free transverse Flexural vibrations. The problem is formulated, taking into account not only the elastic support of the rotor, but also absolutely rigid anchoring its edges. Investigated the possibility of the existence and uniqueness of the solution of the task. To do this, along with the given boundary problem is considered another boundary value problem. Formulated and proved the theorem on the uniqueness of solving this kind of inverse spectral problems. Found a method of solving the inverse problem is reduced to solving a system of three equations with four unknowns. The algorithm of the decision allows on the known values of three frequencies of oscillation of the rotor to determine uniquely the values of the coefficients given the rigidities of the left and right supports. It is shown that this method can also be determined and absolutely rigid fixing of the edges of the rotor. Examples of solutions of the inverse problem, confirming the conclusions.

Keywords: the rotor poles, given stiffness, frequency equation, oscillation frequency, uniqueness of solution, method of diagnosis

В работе исследована обратная задача определения коэффициентов приведенных жесткостей упругих опор ротора по известным частотам его свободных колебаний. Прямая задача определения частот свободных колебаний ротора на упругих опорах рассматривается во многих трудах по теории колебаний, например [1–4]. Исследования по прямой задаче и постановка обратной спектральной задачи проведены в работе [5], в которой получен метод двойственного определения коэффициентов относительных жесткостей опор ротора по двум известным значениям частот колебаний ротора.

Целью же данной работы является исследование существования и доказательство единственности решения поставленной задачи, а также определение алгоритма решения задачи с учетом не только упругих опор ротора, но и абсолютно жестких закреплений его краев. Приведенный алгоритм решения задачи позволит также определить достаточное число частот колебаний ротора для единственности восстановления приведенных жесткостей его опор.

Задача по свободным поперечно-изгибным колебаниям ротора, как вращающегося стержня на упругих опорах, сводится к решению дифференциального уравнения [1–4]:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial y^4} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \eta_0 z = 0 \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0; \\ \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=l} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{y=0} + \dfrac{1}{C_{\text{прл}}} EI \left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0; \\ z_{y=l} + \dfrac{1}{C_{\text{прп}}} EI \left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)_{y=l} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где $a = \sqrt{\dfrac{EI}{\rho S}}$, $\eta_0 = \dfrac{C_0}{EI}$, z – перемещение стержня ротора, $C_{\text{прл}}$, $C_{\text{прп}}$ – приведенные жесткости левой и правой опор ротора соответственно, E – модуль упругости материала ротора, I – момент инерции поперечного сечения ротора, ρ – плотность материала, S – площадь поперечного сечения ротора, C_0 – коэффициент жесткости распределенной опоры, l – длина пролета ротора (рисунок).

В работе [5, с. 135] представлено решение прямой задачи (1), (2) и получено уравнение в виде:

$$2sh\lambda \sin\lambda + \lambda^3 (K_{\text{л}} + K_{\text{п}})(sh\lambda \cos\lambda - \sin\lambda ch\lambda) + \\ + \lambda^6 K_{\text{л}} K_{\text{п}} (1 - ch\lambda \cos\lambda) = 0, \quad (3)$$

в котором $\lambda(\omega) = \sqrt{\dfrac{l^4 \left(\rho S \omega^2 - C_0 \right)}{EI}}$ – собственное значение, ω – частота свободных поперечных колебаний ротора, $K_{\text{л}}$, $K_{\text{п}}$ – коэффициенты относительной жесткости опор ротора, выражающиеся как

$$K_{\text{л,п}} = \frac{EI}{C_{\text{прл,п}} l^3}. \quad (4)$$

Поставлена и исследована обратная задача идентификации коэффициентов относительной жесткости опор ротора по известным значениям двух частот его поперечных колебаний. Получены аналитические формулы, которые определяют коэффициенты (4) двойственным образом.

В продолжение исследований [5] в данной работе представим другой метод решения обратной задачи, который позволяет учитывать не только упругие опоры, но и возможность определения абсолютно жестких закреплений краев ротора. И в отличие от предыдущего алгоритма решения позволит также доказать единственность определения упругих опор ротора. Для решения такой задачи краевые условия (2) представим в виде

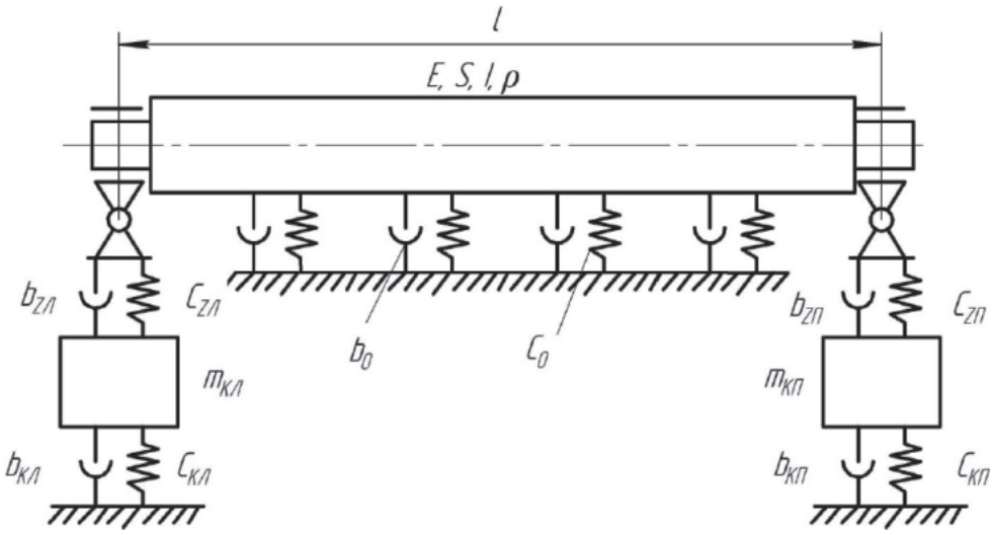
$$\begin{cases} U_1(z) = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0; \\ U_3(z) = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{y=l} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2(z) = a_0 z_{y=0} + a_1 \left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0; \\ U_4(z) = b_0 z_{y=l} + b_1 \left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)_{y=l} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В краевых условиях (2) и (5) коэффициенты связаны соотношениями

$$\frac{C_{\text{пр.л}} l^3}{EI} = \frac{a_0}{a_1}; \frac{C_{\text{пр.п}} l^3}{EI} = \frac{b_0}{b_1};$$

$$(a_0,\ a_1,\ b_0,\ b_1 \in R). \quad (6)$$



Модель ротора

Коэффициенты форм $U_2(z)$ и $U_4(z)$ краевых условий (5) представим в виде элементов следующей матрицы:

$$A = \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{Vmatrix}.$$

Ненулевые миноры F_{ij} данной матрицы, составленные из столбцов с номерами i и j ($i = 1, 2, 3$; $j = 2, 3, 4$), имеют вид

$$F_{13} = a_0 b_0 , \; F_{14} = a_0 b_1 ,$$

$$F_{23} = a_1 b_0 , \; F_{24} = a_1 b_1 . \qquad (7)$$

Тогда **обратная задача** восстановления коэффициентов условий (5) сводится к нахождению матрицы A с точностью до линейных преобразований ее строк, что равносильно определению линейной оболочки $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ векторов $\vec{a} = (a_0, \; a_1, \; 0, \; 0)^T$ и $\vec{b} = (0, \; 0, \; b_0, \; b_1)^T$.

Рассмотрим также краевые условия

$$\begin{cases} U_1(z) = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0; \\ U_3(z) = \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{y=l} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2(z) = \tilde{a}_0 z_{y=0} + \tilde{a}_1 \left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)_{y=0} = 0; \\ U_4(z) = \tilde{b}_0 z_{y=l} + \tilde{b}_1 \left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3} \right)_{y=l} = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

с коэффициентами $\tilde{a}_0$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{b}_0$, $\tilde{b}_1$, отличными от a_0, a_1, b_0, b_1. Линейную оболочку на векторах $\vec{a}' = (\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, 0, 0)^T$ и $\vec{b}' = (0, 0, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1)^T$ обозначим как $\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle$. Тогда если наряду с задачей (1), (5) исследовать также задачу (1), (8), то можно сформулировать и доказать следующую теорему, определяющую единственность решения сформулированной выше обратной задачи.

Теорема. *Если спектральные задачи (1), (5) и (1), (8) имеют совпадающие ненулевые собственные значения (с учетом их кратностей) и при этом выполняются равенства*

$$a_0^2 + a_1^2 \neq 0 , \; b_0^2 + b_1^2 \neq 0 ,$$

$$\tilde{a}_0^2 + \tilde{a}_1^2 \neq 0 , \; \tilde{b}_0^2 + \tilde{b}_1^2 \neq 0 , \qquad (9)$$

то совпадают и их линейные оболочки $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, $\langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle$.

Доказательство.

Представление краевых условий задачи в виде (5) требует получения соответствующего частотного уравнения, отличного от уравнения (3). Для этого проведем следующие преобразования.

Известно, что линейно-независимыми решениями уравнения (1) являются функции $z_1(y) = S(\alpha y)$, $z_2(y) = V(\alpha y)$, $z_3(y) = U(\alpha y)$, $z_4(y) = T(\alpha y)$, в которых $S(\alpha y)$, $V(\alpha y)$, $U(\alpha y)$, $T(\alpha y)$ – функции Крылова [4, с. 150] от спектрального параметра $\alpha = \alpha(\omega)$, где $\alpha^4 = (\omega^2 / a^2) - \eta_0$. Тогда общее решение уравнения (1) представится в виде

$$z(y) = C_1 z_1(y) + C_2 z_2(y) + C_3 z_3(y) + C_4 z_4(y) =$$

$$= C_1 S(\alpha y) + C_2 V(\alpha y) + C_3 U(\alpha y) + C_4 T(\alpha y) .$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 воспользуемся краевыми условиями (5) и получим следующую систему уравнений:

$$U_i(z) = U_i(C_1 z_1(y) + C_2 z_2(y) + C_3 z_3(y) + C_4 z_4(y)) =$$

$$= C_1 U_i(z_1(y)) + C_2 U_i(z_2(y)) + C_3 U_3(z_3(y)) + C_4 U_4(z_4(y)) = 0 , \qquad (10)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

Частотное уравнение задачи (1), (5) получим стандартно, учитывая условие существования ненулевого решения системы (10) относительно констант C_1, C_2, C_3, C_4, а именно из равенства

$$\begin{Vmatrix} U_1(z_1(y)) & U_1(z_2(y)) & U_1(z_3(y)) & U_1(z_4(y)) \\ U_2(z_1(y)) & U_2(z_2(y)) & U_2(z_3(y)) & U_2(z_4(y)) \\ U_3(z_1(y)) & U_3(z_2(y)) & U_3(z_3(y)) & U_3(z_4(y)) \\ U_4(z_1(y)) & U_4(z_2(y)) & U_4(z_3(y)) & U_4(z_4(y)) \end{Vmatrix} = 0. \qquad (11)$$

Тогда корни характеристического уравнения (11) будут совпадать со спектральными значениями $\alpha = \alpha(\omega)$, содержащими в себе частоту свободных колебаний ротора на упругих опорах.

С учетом условий (5), функций Крылова $S(\alpha y)$, $V(\alpha y)$, $U(\alpha y)$, $T(\alpha y)$ и их производных до третьего порядка включительно, равенство (11) представим в виде

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_0 & 0 & 0 & a_1\alpha^3 \\ U(\alpha l) & V(\alpha l) & S(\alpha l) & T(\alpha l) \\ b_0 S(\alpha l)+b_1\alpha^3 T(\alpha l) & b_0 T(\alpha l)+b_1\alpha^3 U(\alpha l) & b_0 U(\alpha l)+b_1\alpha^3 V(\alpha l) & b_0 V(\alpha l)+b_1\alpha^3 S(\alpha l) \end{Vmatrix} = 0.$$

Раскрыв последнее уравнение с учетом функции Крылова и миноров (7) матрицы A получим уравнение

$$\Delta(\alpha l) = F_{13} f_1(\alpha l) + (F_{23} - F_{14}) f_2(\alpha l) + F_{24} f_3(\alpha l) = 0, \quad (12)$$

в котором $f_k(\alpha l)$ (k = 1, 2, 3) выражаются как

$$\begin{aligned} f_1(\alpha l) &= 2 sh\alpha l \sin \alpha l, \\ f_2(\alpha l) &= \alpha^3 (sh\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l ch\alpha l), \\ f_3(\alpha l) &= \alpha^6 (1 - ch\alpha l \cos \alpha l). \end{aligned} \quad (13)$$

Из свойств общей теории линейных операторов следует, что $\Delta(\alpha l)$ является целой функцией порядка ½ [6, с. 46]. Поэтому характеристический определитель $\Delta(\alpha l)$ задачи (1), (5) и соответствующий характеристический определитель

$$\Delta(\tilde{\alpha} l) = \tilde{F}_{13} f_1(\tilde{\alpha} l) + (\tilde{F}_{23} - \tilde{F}_{14}) f_2(\tilde{\alpha} l) + \tilde{F}_{24} f_3(\tilde{\alpha} l) = 0 \quad (14)$$

задачи (1), (8) связаны тождественным равенством

$$\Delta(\alpha l) \equiv K \ \Delta(\tilde{\alpha} l), \quad (15)$$

где K – константа, отличная от нуля.

Отсюда с учетом (9), (12), (14), (15) получаем, что

$$(a_0 b_0 - \tilde{a}_0 \tilde{b}_0) f_1(\alpha l) + (a_1 b_0 - \tilde{a}_1 \tilde{b}_0) f_2(\alpha l) - (a_0 b_1 - \tilde{a}_0 \tilde{b}_1) f_2(\alpha l) + (a_1 b_1 - \tilde{a}_1 \tilde{b}_1) f_3(\alpha l) \equiv 0. \quad (16)$$

С помощью команд математического пакета Maple можно показать, что определитель, составленный из коэффициентов при переменных в разложении функций (13) в степенной ряд, не равен нулю. Откуда следует линейная независимость рассматриваемых функций $f_k(\alpha l)$ (k = 1, 2, 3).

С учетом последнего утверждения и из равенства (16) имеем

$$(0,\ a_0 b_0,\ a_1 b_0,\ a_0 b_1,\ a_1 b_1,\ 0)^T = K\ (0,\ \tilde{a}_0 \tilde{b}_0,\ \tilde{a}_1 \tilde{b}_0,\ \tilde{a}_0 \tilde{b}_1,\ \tilde{a}_1 \tilde{b}_1,\ 0)^T, \quad (17)$$

что равносильно пропорциональности бивекторов $\vec{a} \Lambda \vec{b}$ и $\vec{a}' \Lambda \vec{b}'$.

Между классами пропорциональных бивекторов (отличных от нуля) и двумерными подпространствами векторного пространства существует биективное соответствие [7, с. 178]. В этом соответствии каждому подпространству отвечает внешнее произведение $\vec{x}_1 \Lambda \vec{x}_2$ векторов произвольного его базиса $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, а каждому бивектору $\vec{x}_1 \Lambda \vec{x}_2$ – подпространство $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle$. Поэтому из (17) следует, что $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}', \vec{b}' \rangle$. **Теорема доказана**.

Из теоремы следует, что линейная оболочка $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, построенная на векторах $\vec{a} = (a_0,\ a_1,\ 0,\ 0)^T$ и $\vec{b} = (0,\ 0,\ b_0,\ b_1)^T$, восстанавливается единственным образом. Это утверждение, в свою очередь, равносильно единственности решения обратной задачи определения коэффициентов приведенных жесткостей опор ротора.

Построим теперь решение обратной задачи. Пусть α_1, α_2, α_3 – три первые собственные значения задачи (1), (5), являющиеся корнями уравнения (12) и соответствующие первым трем частотам ω_1, ω_2, ω_3 колебаний ротора. Тогда с учетом (15) собственные значения α_1, α_2, α_3 удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha_i l) &= F_{13} f_1(\alpha_i l) + (F_{23} - F_{14}) f_2(\alpha_i l) + \\ &+ F_{24} f_3(\alpha_i l) = 0, \ (i = 1,\ 2,\ 3). \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что (18) представляют собой систему трех уравнений от четырех неизвестных F_{13}, F_{14}, F_{23}, F_{24}. И как следует из теоремы, эта система имеет единственное решение с точностью до постоянного множителя. По-другому, равенства (18) одно-

значно с точностью до константы задают бивектор

$$(0,\ F_{13},\ F_{14},\ F_{23},\ F_{24},\ 0)^T.$$

Определив таким образом все неизвестные миноры F_{ij}, можно единственным образом восстановить краевые условия спектральной задачи (1), (5).

Применение метода рассмотрим на примерах.

Пример 1. Пусть $\alpha_1 = 0{,}9077, \alpha_2 = 4{,}7296,$ $\alpha_3 = 7{,}8531$ – собственные значения задачи (1), (5), соответствующие первым трем собственным частотам колебаний ротора при физических параметрах

$$l = 0{,}1 \text{ м}, S = 0{,}0035 \text{ м}^2, E = 2\cdot 10^{11} \text{ Н}\cdot\text{м}^{-2},$$

$$I = 5\cdot 10^{-6} \text{ м}^4, \rho = 7850 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}, \eta = 0{,}25. \quad (19)$$

Найдем матрицу A с точностью до эквивалентных матриц, по-другому, определим коэффициенты приведенных жесткостей опор ротора.

Решение. Система (18) при заданных собственных значениях и параметрах (19) перепишется следующим образом:

$$-3{,}270929\cdot F_{13} + 0{,}743406\cdot(F_{14} - F_{23}) + 0{,}126376\cdot F_{24} = 0;$$
$$226{,}4442\cdot F_{13} + 12186{,}157\cdot(F_{14} - F_{23}) + 597{,}9981\cdot F_{24} = 0;$$
$$-5147{,}4075\cdot F_{13} + 1245374{,}89\cdot(F_{14} - F_{23}) - 62243{,}7364\cdot F_{24} = 0.$$

Решение системы:

$$F_{13} = 0{,}25000010C;\ F_{24} = 1{,}25000044C;\ F_{14} = 0{,}99999981C;\ F_{23} = 4{,}99999785C,\ C = \text{const} \neq 0.$$

Тогда

$$(0,\ F_{13},\ F_{14},\ F_{23},\ F_{24},\ 0)^T \approx (0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 20,\ 0)^T.$$

Если $\vec{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T$ – произвольный вектор искомой линейной оболочки $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$, то его координаты удовлетворяют условию

$$rank \begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = 2.$$

Поскольку, например, $M_{13} \neq 0$, то последнее условие равносильно следующим равенствам:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix} = 0,\ \begin{Vmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

Откуда: $x_1F_{23} - x_2F_{13} = 0,\ -x_3F_{14} + x_4F_{13} = 0.$

Если, учитывая (7), $F_{13} = a_0b_0 \approx 1,\ F_{14} = a_0b_1 \approx 4,\ F_{23} = a_1b_1 \approx 5,$ то можно считать, что $5x_1 - x_2 = 0$ и $-4x_3 + x_4 = 0,$ тогда $\vec{x} = (x_1,\ 5x_1,\ x_3,\ 4x_3)^T.$

Значит, матрица A имеет вид $A = \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}.$

Далее с учетом (6) и (19) найдем соответствующие коэффициенты приведенных жесткостей опор ротора: $C_{\text{прл}} = 2\cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-1}, C_{\text{прп}} = 2{,}5\cdot 10^8 \text{ Н}\cdot\text{м}^{-1}.$

Пример 2. Известны первые три собственных значения

$$\alpha_1 = 3{,}1416,\ \alpha_2 = 6{,}2832,\ \alpha_3 = 9{,}4248$$

краевой задачи (1), (5) при физических параметрах (19). Определим условия упругих его закреплений.

Решение. Система уравнений (18) в этом случае имеет решение:

$$F_{13} = 0{,}7618\cdot 10^{15}C;\ F_{24} = 0{,}9999947C;\ F_{14} = 0{,}9999989C;\ F_{23} = 0{,}99999785C,\ C = \text{const} \neq 0.$$

Имеем: $(0,\ F_{13},\ F_{14},\ F_{23},\ F_{24},\ 0)^T \approx (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)^T.$

Преобразования, аналогичные в примере 1, ведут к следующим приближениям:

$$F_{13} = a_0 b_0 \approx 1,\ F_{14} = a_0 b_1 \approx 0,\ F_{23} = a_1 b_1 \approx 0.$$

Откуда: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

При этом с учетом равенств (6) и (19) получаем, что коэффициенты приведенных жесткостей опор ротора стремятся к бесконечности, что говорит об абсолютно жестком закреплении обоих краев ротора.

Таким образом, по известным трем частотам поперечно-изгибных колебаний ротора можно определить единственным образом значения коэффициентов приведенных жесткостей левой и правой его опор, в том числе и абсолютно жесткие закрепления.

Список литературы

1. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. – М.: Физматлит, 2009. – 272 с.

2. Александров А.В. Строительная механика. Динамика и устойчивость упругих систем: учеб. пособие для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Зылев; под ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 2008. – 384 с.

3. Гладвел Г.М.Л. Обратные задачи теории колебаний. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2008. – 608 с.

4. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.

5. Сафина Г.Ф., Раянова И.М. Двойственность диагностирования коэффициентов жесткостей опор ротора // Физическое образование в вузах. – 2016. – Т. 22, № S1. – С. 134–136.

6. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.