

УДК 51-76:616-71

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПРИМЕНИМОСТИ СТАЦИОНАРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧ МНОГОЧАСТОТНОЙ ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ

Алексян Г.К., Денисов П.А., Черноиван Д.Н.

ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова», Новочеркасск, e-mail: graer@yandex.ru

В работе предложена методика оценки применимости математической модели стационарных токов для решения обратных задач реконструкции проводимости биологического объекта для многочастотной электроимпедансной томографии. Методика заключается в решении серии модельных прямых задач для интересующего диапазона частот инжектируемого гармонического тока с использованием стационарной и символической математических моделей поля с последующим сравнением значений амплитуд потенциалов на измерительных электродах. Методика проиллюстрирована численными экспериментами, проведенными с использованием программного пакета конечноэлементного анализа Femm 4.2. Результаты численных экспериментов показывают, что важное значение при определении применимости стационарной модели имеют значения диэлектрической проницаемости. Это означает, что при выборе модели необходимо учитывать, какие ткани составляют исследуемую область биологического объекта. Сделан вывод о приоритете использования модели поля гармонических токов для многочастотной электроимпедансной томографии в силу того, что применение стационарной модели для решения обратной задачи приводит к потере части информации, а именно сведений о распределении диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, реконструкция проводимости, математическое моделирование, численные эксперименты

METHODOLOGY OF STATIONARY MATHEMATICAL MODELS APPLICABILITY ASSESSMENT FOR MULTIFREQUENCY ELECTRICAL IMPEDANCE TOMOGRAPHY PROBLEMS

Aleksanyan G.K., Denisov P.A., Chernov Ivan D.N.

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), e-mail: graer@yandex.ru

Method of evaluating the applicability of stationary currents mathematical model for biological object conductivity reconstruction solution of inverse problems for multifrequency electrical impedance tomography is proposed in the work. The technique is consists in solving series problems for injected harmonic current frequency range using stationary and symbolic mathematical models of the field and then comparing the values of potentials amplitudes on the measuring electrodes. The technique is illustrated by numerical experiments performed with the use of finite element analysis software package Femm 4.2. Results of numerical experiments show that the values of dielectric permeability have an important role for determining applicability of stationary model. It means what it is necessary to take into account the type of tissue in the explored area of a biological object for selection of the model. The conclusion was made that using of model of the field of harmonic currents have priority for multifrequency electroimpedance tomography owing to the fact that application of stationary model for the solution of the return task leads to loss of a part of information, namely data on distribution of dielectric permeability.

Keywords: electrical impedance tomography, conductivity recovering, mathematical modeling, numerical experiments

Задачей электроимпедансной томографии (ЭИТ) является получение информации о распределении проводимости в объеме рассматриваемого биологического объекта. Методика проведения ЭИТ заключается в последовательной подаче токовых импульсов на различные пары электродов и снятие значений потенциалов относительно заземленного электрода на всех остальных. Полученные значения потенциалов используются для решения обратной задачи, с помощью которой для каждой пары токовых электродов приближенно восстанавливают картины распределения проводимостей, называемые проекциями. Затем проекции усредняются.

Многочастотная ЭИТ основана на использовании нелинейной зависимости проводимости σ и диэлектрической проницаемости ϵ биологических тканей от частоты инжектируемого тока, что позволяет получать дополнительную информацию, например оценить соотношение внутриклеточной и межклеточной жидкостей.

Цель исследования

Целью исследования является оценка возможности применения математической модели стационарных токов для решения обратной задачи реконструкции проводимости биологического объекта для многочастотной ЭИТ.

Материалы и методы исследования

Для достижения поставленной цели была разработана методика, заключающаяся в решении серии модельных прямых задач расчета распределения плотности тока для интересующего диапазона частот инжектируемого гармонического тока с использованием стационарной и символической математических моделей поля с последующим сравнением значений амплитуд потенциалов на измерительных электродах. Методика основана на применении численных методов решения полевых задач. В работе используются математические модели электромагнитного поля в виде программного пакета конечноэлементного анализа Femm 4.2, а также модели, описывающие зависимость электрических параметров биологических тканей от частоты инжектируемого тока.

Модель живой клетки

Зависимость параметров σ и ϵ от частоты инжектируемого тока вызвана сложной неоднородной структурой ткани, состоящей из клеток. Эквивалентную электрическую схему живой клетки можно представить в виде участка электрической цепи, состоящей из трех элементов: внутреннего сопротивления клетки R_e , сопротивления межклеточной жидкости R_i и емкости мембран C_m (рис. 1, а) [2]. Здесь под C_m понимается емкость системы из двух мембран, через которые ток проходит последовательно, то есть $C_m = C_{\text{мембр}}/2$, где $C_{\text{мембр}}$ – характеристика клеточной мембраны. Следует отметить, что существуют и другие схемы замещения [5], отражающие неоднородную внутреннюю структуру клетки с различной степенью точности.

Для такой электрической схемы может быть определен импеданс [2]

$$Z = R_{\text{ЭКВ}} + jX_{C_{\text{ЭКВ}}}$$

где

$$R_{\text{ЭКВ}} = \frac{R_e + \omega^2 C_m^2 \cdot R_e \cdot R_i \cdot (R_e + R_i)}{1 + \omega^2 C_m^2 \cdot (R_e + R_i)^2},$$

$$X_{C_{\text{ЭКВ}}} = \frac{\omega \cdot C_m^2 \cdot R_e^2}{1 + \omega^2 C_m^2 \cdot (R_e + R_i)^2},$$

ω – угловая частота, связанная с частотой f инжектируемого тока согласно формуле $f = 2\pi\omega$. Данная аппроксимация зависимости эквивалентных электрических интегральных параметров биологического объекта успешно используется для оценки соотношения объемов внутриклеточной и межклеточной жидкостей.

Аналогичные формулы могут быть получены и для локальных параметров – проводимости σ и диэлектрической проницаемости ϵ . Их удобно объединить в обобщенную локальную характеристику

$$\dot{\gamma} = \sigma + j\omega\epsilon, \quad (1)$$

называемую комплексной проводимостью. Здесь j – мнимая единица.

Формуле для комплексной проводимости, имеющей действительную и мнимую части, соответствует эквивалентная схема замещения, представленная на рис. 1, б. Здесь два элемента, активное сопротивление R_e и емкость C_m , соединены параллельно. Им соответствуют удельная проводимость σ и диэлектрическая проницаемость ϵ при условии, что рассматриваемая электрическая цепь приходится на единицу длины

вдоль линии тока, то есть R_e и C_m являются удельными параметрами. В этом случае будут справедливы зависимости

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{R_e} + \frac{R_i \cdot \omega^2 C_m^2}{1 + \omega^2 C_m^2 R_i^2}, \quad (2)$$

$$\epsilon(\omega) = \frac{C_m}{1 + \omega^2 C_m^2 R_i^2}. \quad (3)$$

Здесь значения R_e , R_i и C_m следует также рассматривать, как удельные усредненные параметры ткани.

Математическая модель электромагнитного поля

Важнейшей составляющей метода ЭИТ является обратная задача реконструкции распределения удельных электрических характеристик в объеме исследуемого биологического объекта. Существенное влияние на результат такой реконструкции оказывает выбор математической модели электромагнитного поля. В общем случае оно описывается уравнениями Максвелла (в дифференциальной форме) [4]:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_C,$$

$$\text{div}\vec{D} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0, \quad \vec{J}_C = \sigma\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon\vec{E},$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля, \vec{B} – магнитная индукция, \vec{H} – напряженность магнитного поля, \vec{D} – вектор электрического смещения, \vec{J}_C – плотность наводимых полей токов проводимости, μ – магнитная проницаемость, t – время. Здесь учтено, что в области исследуемого объекта свободные заряды отсутствуют.

При инжектировании гармонического тока, изменяющегося по синусоидальному закону $i(t) = i_m \cdot \sin(\omega t + \phi)$, где i_m – амплитуда тока, ϕ – фаза, которую можно положить для тока источника равной нулю, а также при условии снятия измерений после окончания переходных процессов можно использовать уравнения Максвелла в символической форме:

$$\text{rot}\dot{\vec{E}} = -j\omega\dot{\vec{B}}, \quad \text{rot}\dot{\vec{H}} = -j\omega\dot{\vec{D}} + \dot{\vec{J}}_C,$$

$$\text{div}\dot{\vec{D}} = 0, \quad \text{div}\dot{\vec{B}} = 0, \quad \dot{\vec{J}}_C = \dot{\sigma}\vec{E}, \quad \dot{\vec{B}} = \mu\dot{\vec{H}}, \quad \dot{\vec{D}} = \epsilon\dot{\vec{E}},$$

где точка над символом означает, что число является комплексным и содержит информацию об амплитуде величины и сдвиге фаз относительно инжектируемого тока источника.

В этом случае можно ввести комплексный скалярный электрический потенциал:

$$\dot{\vec{E}} = -\text{grad}\dot{\phi},$$

а система уравнений Максвелла может быть сведена к одному уравнению:

$$\text{div}(\dot{\gamma} \text{grad}\dot{\phi}) = 0, \quad (4)$$

где $\dot{\gamma}$ – комплексная удельная проводимость, определяемая согласно формуле (1).

В простейшем приближении процесс растекания токов в объеме биологического объекта считают стационарным, полагая все производные по времени равными нулю. В этом случае система уравнений Максвелла сводится к одному уравнению относительно скалярного электрического потенциала ϕ :

$$\text{div}(\sigma \text{grad}\phi) = 0. \quad (5)$$

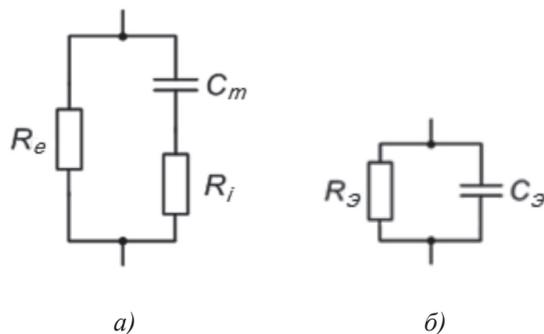


Рис. 1. Электрические схемы замещения живой клетки

Оценка применимости стационарной математической модели для реконструкции проводимости биологического объекта

Уравнение (4) отличается от уравнения (5) добавочным слагаемым $j\omega \epsilon$ у множителя $\dot{\gamma} = \sigma + j\omega \epsilon$. Видно, что величина этого слагаемого зависит от частоты зондирующего гармонического тока и от диэлектрической проницаемости ткани.

Было проведено исследование влияния этих параметров на результат реконструкции. Методика исследования основана на проведении численных экспериментов, заключающихся в решении ряда прямых задач расчета поля для синусоидальных токов разных частот и стационарной модели. Исходными данными для решения задачи реконструкции характеристик биологического объекта являются значения потенциалов на электродах. При использовании стационарной модели измеряют амплитуды сигнала, при использовании символической необходимо знать еще и смещение напряжения относительно зондирующего тока, то есть использовать фазочувствительный вольтметр [1].

Методика проведения численных экспериментов заключается в следующем:

1. Выполняется расчет прямой задачи на основе уравнения (4) для зондирующих токов интересующего диапазона частот.

2. Для таких же параметров среды выполняется расчет поля с использованием стационарной модели (5).

3. На каждом электроде модуль значения потенциала, полученного в результате решения задачи с использованием стационарной модели, сравнивается с амплитудами синусоидальных функций потенциала для каждой частоты.

4. Если для интересующей частоты полученное на шаге 3 расхождение не превышает заданный параметр ϵ , определяемый требованиями к точности решения, то стационарная математическая модель (4) может быть использована для данной частоты.

Методика основана на том очевидном факте, что необходимым условием корректной работы алгоритма решения обратной задачи с использованием стационарной модели будет являться требование незначительного отклонения амплитуд потенциалов, полученных на электродах при использовании ее и более точной символической модели. Подобный подход, основанный на сравнении значений потенциалов на электродах, был применен для оценки схемы сканирования в [3] для трехмерной электроимпедансной маммографии.

Результаты исследования и их обсуждение

Для иллюстрирования предлагаемой методики были проведены численные эксперименты с использованием программного пакета конечноэлементного анализа Femm 4.2. Рассматривалась модельная плоскопараллельная задача с областью расчета D^0 в виде круга диаметром 17 см, включающая одну неоднородность D^1 – круг диаметром 4,2 см (рис. 2). К границам области было приложено 8 равноотстоящих электродов. Ток силой 1 мА инжектировался через верхний и нижний электроды. В качестве общего электрода, в котором значение потенциала принято равным нулю, был выбран правый.

На рис. 3, а показана зависимость расхождения значений амплитуд потенциалов от частоты при параметрах: значения удельных проводимостей $\sigma^0 = 0,5$ См/м, $\sigma^1 = 10^{-6}$ См/м, значения относительных диэлектрических проницаемостей $\epsilon_r^0 = 200$, $\epsilon_r^1 = 10$. Расхождение значений амплитуд потенциалов оценивалось по формулам

$$\delta_c = \max_{i=1..N} |x_i - y_i| / \max_{i=1..N} |y_i|,$$

$$\delta_L = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i)^2},$$

где $N = 8$ – количество электродов, а в качестве x_i и y_i брались значения амплитуд потенциалов на i -м электроде при частотах f и 0 Гц соответственно. График подтверждает увеличение величины расхождения с ростом частоты, однако для таких малых значений диэлектрической проницаемости оно несущественно в диапазоне частот, применяемом в ЭИТ.

Во втором опыте значение диэлектрической проницаемости области D^1 было изменено: $\epsilon_r^1 = 2500$. Значение расхождения потенциалов при этом увеличилось (рис. 3, б). В третьем опыте было учтено, что электрические характеристики ткани зависят от ча-

стоты инжектирующего тока. Так, согласно данным, приведенным в [2], мышечная ткань имеет характеристики, представленные в таблице.

В соответствии с приведенными данными была изменена диэлектрическая проницаемость области D^0 , проводимость осталась без изменений. Результаты приведены

в таблице. Как можно видеть, расхождение значений потенциалов на электродах для мышечной ткани велико даже для небольших частот, что затрудняет использование стационарной модели. Следует отметить, что диэлектрическая проницаемость других тканей на порядок меньше проницаемости мышечной [2], что улучшит ситуацию.

Значения относительной диэлектрической проницаемости для мышечной ткани при разных частотах (периодах) изменения зондирующего тока и полученные величины расхождения для амплитуд потенциалов на электродах

№	Период изменения инжектируемого тока τ , с	Частота изменения инжектируемого тока f , Гц	Относительная диэлектрическая проницаемость мышечной ткани ϵ_r	Величина расхождения $\delta_c(f)$, %	Величина расхождения $\delta_L(f)$, %
1	$2,274 \cdot 10^{-3}$	440	$2,5 \cdot 10^7$	36,71	36,71
2	$3,183 \cdot 10^{-4}$	3140	$1,2 \cdot 10^6$	7,78	7,78
3	$3,537 \cdot 10^{-7}$	$2,83 \cdot 10^6$	7000,0	58,67	58,66
4	$7,234 \cdot 10^{-12}$	$1,38 \cdot 10^{11}$	50,0	99,88	99,88

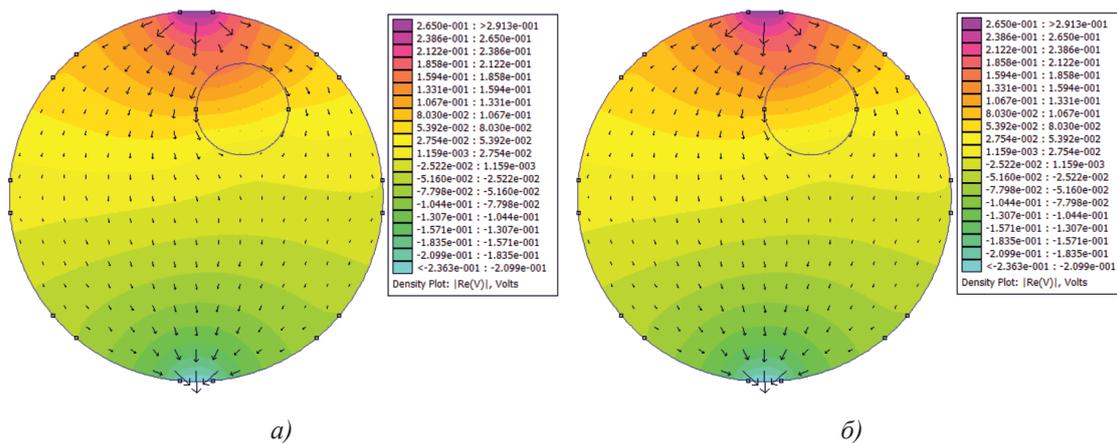


Рис. 2. Область расчета для частоты 50 кГц: модели 5 (а) и 4 (б)

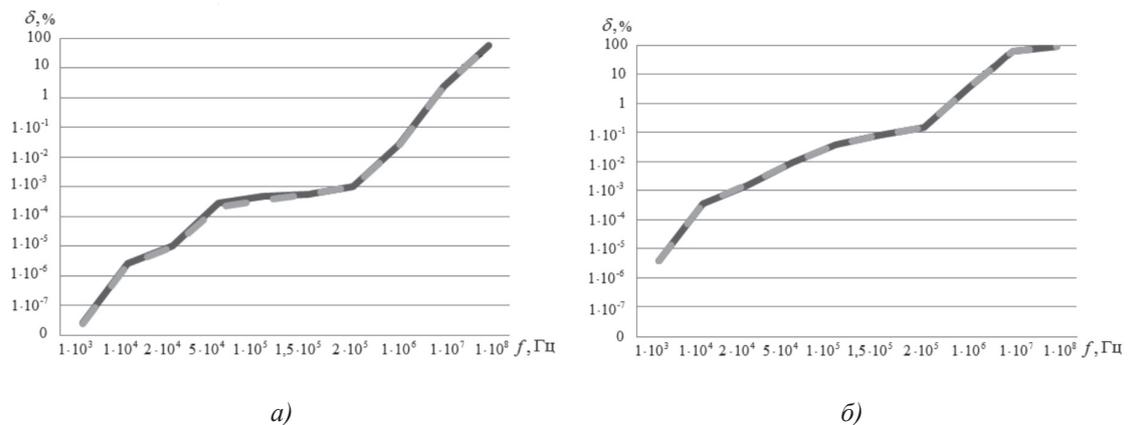


Рис. 3. Графики зависимости величины расхождения амплитуд потенциалов на электродах от частоты инжектируемого тока. Сплошной линией — обозначена зависимость $\delta_c(f)$, пунктиром — $\delta_L(f)$

Выводы

Постановка обратной задачи много-частотной ЭИТ существенно зависит от математической модели, выбранной для описания растекания тока в исследуемом объекте. При использовании уравнений Максвелла в символической форме и модели (4) результатом решения обратной задачи для каждой проекции будет являться распределение комплексной проводимости, то есть в этом случае для каждой частоты будет известна как собственно проводимость σ , так и диэлектрическая проницаемость ϵ . Используя полученные значения σ и ϵ , можно решить систему нелинейных уравнений (2–3) и получить параметры ткани R_p , R_e и C_m . При выборе стационарной модели (5), позволяющей быстрее решать обратную задачу по сравнению с моделью (4), возможно получить информацию лишь о действительной части комплексной проводимости, то есть получить картину собственно удельной проводимости σ . При этом информация о диэлектрической проницаемости ϵ будет потеряна. Тогда для восстановления параметров ткани R_p , R_e и C_m можно будет использовать лишь выражение (2), что потребует для обеспечения такого же качества определения параметров выполнения измерений на большем количестве частот. Кроме того, область применимости стационарной модели ограничена. Оценить возможность применения стационарной модели для интересующей частоты изменения гармониче-

ческого зондирующего тока возможно с помощью предложенной методики, решив для предполагаемой области две прямые задачи расчета распределения токов в области объекта и получив значения расхождений потенциалов на измерительных электродах.

Работы выполняются при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках гранта «мол_а_дк» № 16-38-60173 «Технологии интеллектуального анализа данных электроимпедансной томографии для трехмерной реконструкции и визуализации проводимостей внутренних структур биологических объектов».

Список литературы

1. Бразовский К.С. Методы и технические средства оценки функционального состояния головного мозга человека на основе электрических измерений: дис. ... д-ра техн. наук: 05.11.17 / Бразовский Константин Станиславович. – Томск. – 2015. – 369 с.
2. Николаев Д.В. Биоимпедансный анализ состава тела человека / Д.В. Николаев, А.В. Смирнов, И.Г. Бобринская, С.Г. Руднев. – М.: Наука, 2009. – 392 с.
3. Семченков А.А. Метод и система электроимпедансной маммографии: дис. ... канд.техн. наук: 05.11.17 / Алевксандрович Семченков. – Санкт-Петербург. – 2013 г. – 156 с.
4. Holder D.S. Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications / David S. Holder // Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia. – Bodmin: MPG Books Ltd. – 2005. – 464 p.
5. Lankin A.M. Development Of Principles Of Computer Appliance Functioning, Determination Of Characteristics Of The Biological Object / A.N. Lankin, M.V. Lankin, G.K. Aleksanyan, N.D. Narakidze // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10, № 3. – P. 6489–6498.