УДК 517. 956. 6

ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С УРАВНЕНИЕМ ВЛАГОПЕРЕНОСА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТИ

Кумыков В.К., Водахова В.А., Езаова А.Г.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: alena_ezaova@mail.ru

Настоящая работа посвящена исследованию вопроса однозначной разрешимости нелокальной задачи со смещением, содержащей дробные производные Римана – Лиувилля в краевом условии, для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками. Методом интегралов энергии доказана теорема единственности при определенных ограничениях неравенственного типа на известные функции. Для доказательства существования решения поставленной задачи получены функциональные соотношения между следом искомой функции и производной от него, принесенные на линию вырождения из параболической и гиперболической частей смешанной области. При выполнении условий теоремы единственности методом Трикоми существование решения задачи эквивалентно редуцировано к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно следа производной искомого решения, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения поставленной задачи. Установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной на однозначную разрешимость задачи. Исследованы дифференциальные свойства полученного решения.

Ключевые слова: нелокальная задача со смещением, метод интегралов энергии, операторы дробного интегро-дифференцирования, интегральное уравнений Фредгольма второго рода, однозначная и неоднозначная разрешимость задачи

PROBLEMS WITH SHIFTS FOR EQUATIONS OF MIXED OF THIRD ORDER WITH THE EQUATIONS IN THE HYPERBOLIC PART MOISTURE

Kumykov V.K., Vodakhova V.A., Ezaova A.G.

Kh.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: alena_ezaova@mail.ru

The present work is devoted to investigation of the issue of unique solvability of a nonlocal problem with shift containing fractional Riemann-Liouville derivatives in the boundary condition for the mixed type equation of the third order with multiple characteristics. The method of energy integrals uniqueness theorem under certain restrictions neravenstvennogo type known functions. To prove the existence of the solution of the problem derived functional relation between the track of the desired functio , and a derivative of it brought on the degeneration line of parabolic and hyperbolic parts of the mixed area. Under the conditions of the theorem of uniqueness of the method of solving the problem of the existence of the Tricomi equivalent is reduced to a Fredholm integral equation of the second kind with respect to the following derivative of the desired solution, unconditional solvability of which follows from the uniqueness of the solution of the problem. Installed effect of coefficients of lower derivatives on the unique solvability of the problem . We investigated the differential properties of the solution.

Keywords: nonlocal problem with an offset, the method of energy integrals, the operators of fractional integro – differentiation, Fredholm integral equation of the second kind, unique and non-unique solubility problems

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа в силу теоретической и прикладной важности является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и привлекает внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложениями. В частности, многие математические модели тепло- и массообмена в средах, окруженных пористой средой, сводятся к краевым задачам для уравнений смешанного типа.

Необходимость рассмотрения уравнений гиперболо-параболического типа была замечена в 1959 г. И.М. Гельфандом при рассмотрении задачи, связанной с движением газа в канале, окруженном пористой средой. В канале движение описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Смешанные гиперболо-параболические уравнения лежат в основе математических моделей различных природных явлений. Локальные и нелокальные задачи для таких уравнений встречаются в теории распространения электромагнитных полей, при изучении математических моделей, описывающих влияние растительного покрова на теплообменные процессы в почве и приземном воздухе, при котором возникает необходимость исследования задачи для двух уравнений: уравнения Аллера переноса влаги, предполагающего бесконечную скорость распространения возмущения, и уравнения А.В. Лыкова [6], учитывающего конечную скорость.

Краевые задачи для уравнений нечетного порядка с кратными характеристиками возникают при изучении распространения нелинейных волн в слабодиспергирующих средах.

В настоящее время актуальность исследований нелокальных краевых задач для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа второго и более высокого порядков можно обосновать внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, получением новых результатов в теории дробного интегро-дифференцирования, а также их прикладным значением.

Цель исследования – доказать однозначную разрешимость задачи с дробными производными в краевом условии для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего уравнение А.В. Лыкова в гиперболической части.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xxx}+a_1(x,y)u_x+a_0(x,y)u-b(x,y)u_y, \ \ y>0; \\ y^2u_{xx}-u_{yy}+\lambda u_x, \end{cases} \tag{1}$$

где λ – действительная постоянная, причём $|\lambda|\le 1$ в конечной области Ω ограниченной отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, лежащих в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками $AC: x-\frac{1}{2}(-y)^2=0;\ BC: x+\frac{1}{2}(-y)^2=1$ уравнения (1).

Пусть $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I$, где I – интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача.

Требуется найти функцию

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{(3,1)}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{(2,2)}_{x,y}(\Omega_2), \quad u_x\in C(\overline{\Omega})$$

являющуюся решением уравнения (1) при $y \ne 0$ и удовлетворяющую условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y); \quad u(1,y)=\varphi_2(y), \ \ 0\le y\le 1; \tag{2}$$

$$u_x(0,y)-u_x(1,y)=\varphi_3(y); \tag{3}$$

$$\begin{gathered}\alpha(x)D^p_{0x}\omega(x)u[\theta_0(x)]+\beta(x)D^q_{x1}\delta(x)u[\theta_1(x)]+\\ +c(x)u_y(x,0)+d(x)u(x,0)=\gamma(x),\end{gathered} \tag{4}$$

где $\varphi_i(y)$, $i = 1, 2, 3$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $c(x)$, $d(x)$, $\gamma(x)$, $\omega(x)$, $\delta(x)$ – заданные функции, причем $a_1(x,y), b(x,y)\in C^2(\overline{\Omega}_1)$; $a_0(x,y)\in C^2(\overline{\Omega})$; $\alpha^2(x)+\beta^2(x)+c^2(x)+d^2(x)\ne 0$; $\varphi_i(y)\in C(\overline{I})$; $\alpha(x),\beta(x),c(x),d(x),\gamma(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^3(I)$; $\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$ с характеристиками AC, BC соответственно, D^l_{ax} – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [10].

Задача (1)–(4) относится к классу краевых задач со смещением [7]. Задачи со смещением исследовались в работах [2–4, 7–9].

Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(4), если

$$2a_0(x,y)-a_{1x}(x,y)b_y(x,y)-2b(x,y)\cdot N>0 \quad \text{в } \Omega_1, \tag{5}$$

где N – постоянная величина, удовлетворяющая условию

$$N>\max_{\overline{\Omega}_1}\frac{\left(-\frac{\partial a_1}{\partial x}+2a_0+\frac{\partial b}{\partial y}\right)}{2b}, \quad b(x,y)>\rho>0,\ b(x,0)=\text{const}\ne 0; \tag{6}$$

$$2a_0(x,0)-a_1'(x,0)\le 0, \tag{7}$$

а также либо

$$\omega(x)=\delta(x)=1; \quad p=\frac{3-\lambda}{4}; \quad q=\frac{3+\lambda}{4}, \tag{8}$$

и выполняются условия

$$M_1(x)=\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}\alpha(x)+\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)x^{\frac{1-\lambda}{4}}\beta(x)+C(x)x^{\frac{1-\lambda}{4}}(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}\neq 0; \qquad (9)$$

$$\left[\frac{(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}\alpha(x)}{M_1(x)}\right]'\leq 0; \quad \left[\frac{x^{\frac{1-\lambda}{4}}\beta(x)}{M_1(x)}\right]'\geq 0, \qquad (10)$$

$$(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}x^{\frac{1-\lambda}{4}}d(x)\leq 0; \qquad (11)$$

либо

$$\omega(x)=x^{-\frac{1}{2}}; \quad \delta(x)=(1-x)^{-\frac{1}{2}}; \quad p=\frac{1-\lambda}{4}; \quad q=\frac{1+\lambda}{4}; \qquad (12)$$

$$M_2(x)=\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)(1-x)^{\frac{\lambda+3}{4}}\alpha(x)+\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)x^{\frac{3-\lambda}{4}}\beta(x)+d(x)(1-x)^{\frac{\lambda+3}{4}}x^{\frac{3-\lambda}{4}}\neq 0; \qquad (13)$$

$$\left[\frac{(1-x)^{\frac{\lambda+3}{4}}\alpha(x)}{M_2(x)}\right]'\leq 0; \quad \left[\frac{x^{\frac{3-\lambda}{4}}\beta(x)}{M_2(x)}\right]'\geq 0; \quad \frac{C(x)}{M_2(x)}\geq 0. \qquad (14)$$

Действительно, решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 при $|\lambda|<1$ имеет вид [1]

$$u(x,y)=c_1\int_0^1\tau\left[x+y^2\frac{(1-2t)}{2}\right]t^{\frac{\lambda+3}{4}}(1-t)^{\frac{\lambda-3}{4}}dt+c_2\int_0^1\nu\left[x+y^2\frac{(1-2t)}{2}\right]t^{\frac{\lambda+1}{4}}(1-t)^{\frac{\lambda-1}{4}}dt, \qquad (15)$$

где $\tau(x)=u(x,0),\ \nu(x)=u_y(x,0),\ c_1=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)},\ c_2=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+\lambda}{4}\right)}.$

Удовлетворяя (15) условию (4) при выполнении условий теоремы (12)–(14), получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на I

$$c_1\tau(x)=c_2\left[\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)\frac{(1-x)^{\frac{\lambda+3}{4}}\alpha(x)}{M_2(x)}D_{0x}^{-\frac{1}{2}}\nu(x)+\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)\frac{x^{\frac{3-\lambda}{4}}\beta(x)}{M_2(x)}D_{1x}^{-\frac{1}{2}}\nu(x)\right]+$$
$$+\frac{x^{\frac{3-\lambda}{4}}(1-x)^{\frac{3+\lambda}{4}}C(x)\nu(x)}{M_2(x)}+\frac{x^{\frac{3-\lambda}{4}}(1-x)^{\frac{3+\lambda}{4}}\gamma(x)}{M_2(x)}. \qquad (16)$$

Аналогично при выполнении условий (8)–(11)

$$c_2\nu(x)=c_1\left[\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\frac{(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}\alpha(x)}{M_1(x)}D_{0x}^{\frac{1}{2}}\tau(x)+\Gamma\left(\frac{1+\lambda}{4}\right)\frac{x^{\frac{1-\lambda}{4}}\beta(x)}{M_1(x)}D_{x1}^{\frac{1}{2}}\tau(x)\right]-$$
$$-(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}x^{\frac{1-\lambda}{4}}d(x)\tau(x)-x^{\frac{1-\lambda}{4}}(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}\cdot\gamma(x). \qquad (17)$$

Докажем, что решение задачи единственно при выполнении условий (12)–(14). Для этого покажем, что интеграл $I^*=\int_0^1\tau(x)\nu(x)dx$ не может быть отрицательным.

В самом деле, при $\gamma(x) = 0$ из (16) получим соотношение

$$c_1\tau(x) = A_2(x)D_{0x}^{-1/2}\nu(x) + B_2(x)D_{x1}^{-1/2}\nu(x) + D_2(x)\nu(x),$$

где $$A_2(x) = c_2\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)(1-x)^{\frac{\lambda+3}{4}}\frac{\alpha(x)}{M_2(x)};\quad B_2(x) = c_2\Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right)x^{\frac{3-\lambda}{4}}\frac{\beta(x)}{M_2(x)};$$

$$D_2(x) = \frac{x^{\frac{3-\lambda}{4}}(1-x)^{\frac{3+\lambda}{4}}c(x)}{M_2(x)}.$$

Следовательно,

$$c_1 I^* = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 A_2(x)\nu(x)dx\int_0^x \frac{\nu(t)\,dt}{(x-t)^{1/2}} +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 B_2(x)\nu(x)dx\int_x^1 \frac{\nu(t)\,dt}{(t-x)^{1/2}} + \int_0^1 D_2(x)\nu^2(x)dx.$$

Воспользуемся известной формулой для гамма функции [5]

$$\int_0^\infty t^{\delta-1}\cos kt dt = \frac{\Gamma(\delta)}{k^\delta}\cos\frac{\pi\delta}{2}\qquad (k>0,\ 0<\delta<1).$$

Полагая в ней $k = |x-\xi|$, $\delta = \frac{1}{2}$, получим

$$\frac{1}{|x-\xi|^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\pi}{4}}\int_0^1 t^{-1/2}\cos t|x-\xi|\,dt.$$

Откуда

$$c_1\sqrt{2}\Gamma^2(1/2)I^* = \int_0^1 A_2(x)\nu(x)dx\int_0^x \nu(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{-1/2}\cos(x-\xi)tdt +$$
$$+\int_0^1 B_2(x)\nu(x)dx\int_x^1 \nu(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{-1/2}\cos(\xi-x)tdt + \int_0^1 D_2(x)\nu^2(x)dx.$$

Поменяв порядок интегрирования, а затем интегрируя по частям, в результате несложных вычислений будем иметь

$$\sqrt{2}\cdot c_1\pi\cdot I^* = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_2'(x)\left(\int_0^x \nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_2'(x)\left(\int_0^x \nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_2'(x)\left(\int_x^1 \nu(\xi)\sin t\xi\right)^2 dx + \quad (18)$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_2'(x)\left(\int_x^1 \nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2 dx + \int_0^1 D_2(x)\nu^2(x)dx.$$

При выполнении условий (12)–(14) теоремы единственности $I^* \geq 0$.

С другой стороны, переходя в уравнении (1) к пределу при $y \to +0$, будем иметь

$$\tau'''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + a_0(x,0)\tau(x) - b(x,0)\nu(x) = 0. \quad (19)$$

Подставляя $\nu(x)$ из (19) в $I^*=\int_0^1\tau(x)\nu(x)dx$ при выполнении условий (5)–(7) теоремы получим

$$I^*=\frac{1}{2}\left[\alpha_2(0)-\alpha_1(1)\right]\tau'^2(0)+\frac{3}{2}\int_0^1\alpha'^2(x)\tau'^2(x)dx+\int_0^1\left[\gamma_2(x)-\frac{1}{2}\beta_2'(x)-\frac{1}{2}\alpha_2'''(x)\right]\tau'^2(x)dx\le 0. \quad (20)$$

Отсюда заключаем, что $I^*=0$. Поскольку слагаемые в правых частях (18) и (20) неотрицательны, то они также равны нулю. В частности, из (18)

$$\int_0^\infty t^{-1/2}dt\left(\int_0^1\nu(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2=0;\quad \int_0^\infty t^{-1/2}dt\left(\int_0^1\nu(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2.$$

Так как $t^{-1/2}\ge 0$, то $\int_0^1\nu(\xi)\cos t\xi d\xi=0$; $\int_0^1\nu(\xi)\sin t\xi d\xi=0$ для всех $t\in(0,\infty)$ в частности, при $t=2\pi k$, $k=0, 1, 2...$ При этих значениях t функции $\sin t\xi$, $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2. Следовательно, $\nu(\xi)=0$ почти всюду, а так как $\nu(x)$ непрерывна по условию, то $\nu(x)=0$ всюду. Отсюда при $\gamma(x)=0$ из (16) получим $\tau(x)=0$. Таким образом, решение задачи (1)–(4) $u(x, y)\equiv 0$ в Ω_2 как решение Коши (15) с нулевыми данными, а в области Ω_1 как решение однородной задачи (1)–(3).

Пусть теперь выполняются условия (9)–(11)теоремы. При $\gamma(x)=0$ из (17) имеем

$$c_2\nu(x)=A_1(x)D_{0x}^{\frac{1}{2}}\tau(x)+B_1(x)D_{x1}^{\frac{1}{2}}\tau(x)-D_1(x)\tau(x),$$

где $A_1(x)=c_1\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\frac{(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}\alpha(x)}{M_1(x)}$; $B_1(x)=\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)\frac{x^{\frac{1-\lambda}{4}}\beta(x)}{M_1(x)}$; $D_1(x)=(1-x)^{\frac{1+\lambda}{4}}x^{\frac{1-\lambda}{4}}d(x)$.

Вводя обозначения $\tau_1(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$; $\tau_2(x)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{\frac{1}{2}}}$ вычислениями, аналогичными предыдущим, получим

$$I^*=-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_1'(x)\left(\int_0^x\tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_1'(x)\left(\int_0^x\tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_1'(x)\left(\int_\xi^1\tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2dx+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_1'(x)\left(\int_x^1\tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2dx-\int_0^1 D_1(x)\tau^2(x)dx.$$

При выполнении условий (9)–(11) теоремы $I^*\ge 0$ и учитывая (20) можно заключать, что $I^*=0$. Отсюда следует, что $\tau_i(x)=0$, $i=1, 2$ и, следовательно $\tau(x)=0$. Из (17) при $\gamma(x)=0$ имеем $\nu(x)=0$. Таким образом, как и ранее, $u(x, y)\equiv 0$ в Ω.

Для доказательства существования решения задачи (1)–(4) проинтегрируем трижды равенство (18). В результате будем иметь

$$\tau(x)+\int_0^x\left\{(x-\xi)a_1(\xi,0)+\frac{1}{2}(x-\xi)^2\left[a_0(\xi,0)-a_1(\xi,0)\right]\right\}\tau(\xi)d\xi-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^x(x-\xi)^2 b(\xi,0)\nu(\xi)d\xi=\left[1-a_1(0,0)\cdot\frac{x^2}{2}\right]\varphi_1(0)+\tau'(0)x+\tau''(0)\frac{x^2}{2}. \quad (21)$$

При выполнении условий (8)–(9) подставив $\nu(x)$ из (18) в (21) получим уравнение

$$\tau(x)+\int_0^1 \frac{k(x,t)\tau(t)dt}{|\xi-t|^{\frac{1}{2}}}=f(x), \qquad (22)$$

где $k(x,t)\in C(\bar{I}\times\bar{I})\cap C^3(I\times I)$;

$$f\left(x\in C(\bar{I})\cap C^3(I)\right)$$

выражаются через известные функции.

Уравнение (22) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода [1], безусловная разрешимость которого в требуемом классе функций следует из единственности решения задачи.

Решение уравнения (22) может быть найдено по формуле

$$\tau(x)=f(x)+\int_0^1 R(x,t)f(t)dt,$$

где $R(x, t)$ – резольвента ядра.

При выполнении условий (12)–(13) вопрос разрешимости задачи (1)–(4) также редуцирован к вопросу разрешимости уравнения Фредгольма второго рода относительно $\nu(x)$ со слабой особенностью в ядре и гладкой правой частью, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Водахова В.А., Эржибова Ф.А., Тлупова Р.Г., Болова Д.А. Нелокальная краевая задача для смешанного уравнения третьего порядка // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2016. – № 4–5. – С. 876–879.

3. Езаова А.Г. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Известия Кабардино-Балкарского государственного университета. – 2011. – Т. 1. – № 4. – С. 26–31.

4. Елеев В.А., Кумыкова С.К. О некоторых краевых задачах со смещением на характеристиках смешенного уравнения гиперболо-параболического типа // Национальная Академия наук Украины. Украинский математический журнал. – 2000. – Т. 52. – № 5. – С. 707–716.

5. Лебедев Н.Н. специальные функции и их приложения. – М.-Л., 1963. – 358 с.

6. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физический журнал. – 1965. – Т. 9. – № 3. – С. 287–304.

7. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

8. Репин О.А, Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 9(100). – С. 52–60.

9. Репин О.А, Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – № 1(30). – С. 150–158.

10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.