

УДК 620.172.212: 624.042.7

ДЕТЕРМИНИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ДИСКРЕТНЫМИ ВОЛОКНАМИ

Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В.

ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный технический университет», Липецк, e-mail: pm03sav@mail.ru

В статье приводится описание детерминированной математической модели, оценивающей напряженно-деформированное состояние изгибаемых элементов, армированных дискретными стальными волокнами с единичными отгибами на обоих концах (фиброй «Dramix»). В качестве основы модели приводятся уравнения условий равновесия внешних и внутренних сил в нормальном сечении изгибаемого фибробетонного элемента при любом нагружении. Для изгибаемых в плоскости симметрии поперечного сечения элементов данная система уравнений для расчета прочности по деформационной модели включает жесткостные характеристики, определяемые через напряжения в матрице, армированной дискретными волокнами. В качестве инструментов, позволяющих оценивать напряженно-деформированное состояние элемента, авторами предложены аналитические зависимости $\sigma = f(\epsilon)$ для описания криволинейных диаграмм с ниспадающей ветвью принимаются согласно рекомендациям международных норм. Авторы приводят подробную схему алгоритма по оценке НДС изгибаемого элемента, построенного с учетом всех стадий его разрушения.

Ключевые слова: модель напряженно-деформированного состояния, дискретное волокно, композит, условия равновесия внутренних сил, итерационный алгоритм

DETERMINISTIC MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHM ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE BENT ELEMENTS WITH DISCONTINUOUS FIBERS

Korneev A.M., Buzina O.P., Sukhanov A.V.

Federal State Educational Institution of Higher Education Lipetsk State Technical University, Lipetsk, e-mail: pm03sav@mail.ru

The article describes a deterministic mathematical model estimating the stress-strain state of flexible elements, reinforced with steel fibers with discrete single limb at both ends (fiber «Dramix»). As a base model equations are the conditions of equilibrium of external and internal forces in the normal section bent fiber-reinforced concrete element in any uploading. For bent in the plane of symmetry of the cross-section elements, this system of equations to calculate the strength for the deformation model includes stiffness characteristics, determined by the voltage in the matrix reinforced with discrete fibers. As tools to evaluate the stress-strain state of the element, the authors proposed analytical dependence $\sigma = f(\epsilon)$ to describe the curvilinear charts with falling branch are taken according to the recommendations of international standards. The authors provide a detailed chart of the VAT assessment bending element built taking into account all stages of its destruction.

Keywords: model of stress-strain state, discrete fibers, composite, the conditions of internal forces' equilibrium, iterative algorithm

Анализ математических моделей по оценке напряженно-деформированного состояния конструкций, армированных дискретными волокнами, показал, что более точно отразить фактическое состояние элементов под нагрузкой позволяет нелинейно-деформационная модель, предложенная В.Н. Байковым, Н.И. Карпенко, Б.С. Расторгуевым, Т.А. Мухамедиевым [2, 3, 4]. Данная модель основывается на условиях равновесия нормального сечения, разбитого на дискретные участки матрицы и армирующие элементы.

Учет физической нелинейности работы конструкций производится с помощью

математического описания диаграмм деформирования армирующего волокна, бетона-матрицы и применения шагово-итерационного метода, реализующего способ упругих решений А.А. Ильюшина. Суть метода заключается в том, что решение нелинейной задачи получается в виде последовательности решений линейных задач, сходящихся к результату.

Для случая, когда армирование изгибаемого элемента производится дисперсно-распределенными дискретными волокнами, – фиброй, – условия равновесия внешних и внутренних сил при любом нагружении записываются в виде

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} & -\sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} x_i & -\sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} y_i \\ -\sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} x_i & \sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} x_i^2 & \sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} x_i y_i \\ -\sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} y_i & \sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} x_i y_i & \sum_{i=1}^n E'_{bi} A_{bi,red} y_i^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ k_x \\ k_y \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

где N_z – продольная сила; M_x – изгибающий момент в направлении оси X ; M_y – изгибающий момент в направлении оси Y ; $A_{bi,red}$ – приведенная площадь i -го дискретного элемента матрицы композита; σ_{bi} – напряжение в i -м дискретном элементе матрицы; A_{sj} – площадь поперечного сечения j -го непрерывного волокна (арматуры) в матрице композита; σ_{sj} – напряжение в сечении j -го волокна матрицы.

Учитывая, что напряжения в дискретных элементах бетона и волокна определяются из диаграмм деформирования материалов, получают

$$\sigma_{bi} = E'_{bi} \varepsilon_{bi}, \quad (2)$$

где E'_{bi} – секущий модуль деформаций матрицы, зависящий от уровня загрузки.

Приведенная площадь сечения $A_{bi,red}$ фибробетонного элемента определяется по формуле

$$A_{bi,red} = A_{bi} \left(1 + \frac{E_f}{E_b} \cdot \mu_{fa} \right);$$

$$\mu_{fa} = \mu_{fa} \cdot k_{or}^2, \quad (3)$$

где μ_{fa} – коэффициент армирования элемента дискретными волокнами по объему; k_{or} – коэффициент, учитывающий ориентацию волокон в объеме элемента в зависимости

от геометрических размеров волокон и дискретных элементов сечения:

$$k_{or}^2 = \left(0,64 + 0,29 \frac{l_f}{b} \right) \cdot \left(0,79 + 0,15 \frac{l_f}{h_i} \right). \quad (4)$$

Здесь b – средняя ширина сечения изгибаемого элемента; h_i – толщина слоя, армированного дискретными волокнами; l_f – длина фибрового волокна.

Согласно новым нормам проектирования кусочно-линейные диаграммы деформирования бетона носят достаточно условный характер и приближенно учитывают поведение материала под нагрузкой [1]. Вследствие этого для расчета напряженно-деформированного состояния сжатого (растянутого) бетона были предложены криволинейные диаграммы с ниспадающей ветвью (рис. 1) [5]. Аналитические зависимости для описания криволинейных диаграмм с ниспадающей ветвью принимаются согласно рекомендациям международных норм (CEB-FIP MODEL CODE, 1990):

$$\sigma_{b(t)} = \frac{\left(\frac{E_{b(t)} \varepsilon_{b(t)R}}{R_{b(t)}} \right) \left(\frac{\varepsilon_{b(t)}}{\varepsilon_{b(t)R}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_{b(t)}}{\varepsilon_{b(t)R}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_{b(t)} \varepsilon_{b(t)R}}{R_{b(t)}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_{b(t)}}{\varepsilon_{b(t)R}}} R_{b(t)}. \quad (5)$$

Значение максимальных относительных деформаций бетона $\varepsilon_{b(t)cu}$ определяют по формуле

$$\sigma_{b(t)R} = \frac{\varepsilon_{b(t)R}}{2} \left[\left(\frac{E_{b(t)} \varepsilon_{b(t)R}}{2R_{b(t)}} + 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{E_{b(t)} \varepsilon_{b(t)R}}{2R_{b(t)}} + 1 \right)^2 - 2} \right]. \quad (6)$$

Эти значения деформаций соответствуют напряжениям $0,5R_{b(t)}$ в области ниспадающей ветви диаграммы.

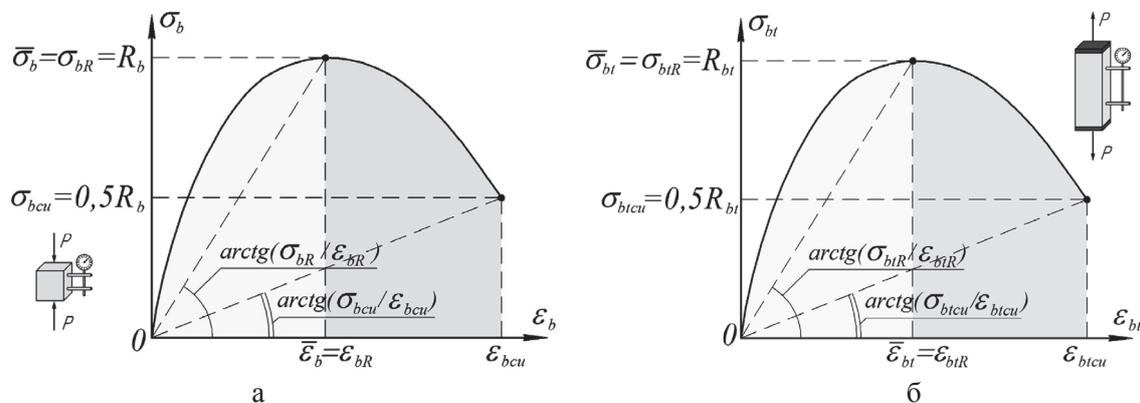


Рис. 1. Криволинейные диаграммы состояния сжатого (а) и растянутого (б) бетона с ниспадающей ветвью

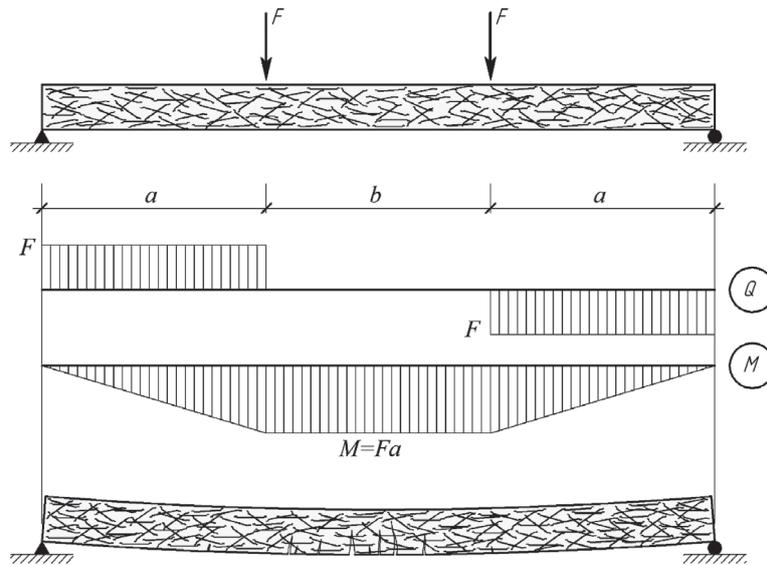


Рис. 2. Схема образования нормальных к продольной оси трещин в зоне чистого изгиба однопролетной фибробетонной балки

При создании алгоритма анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) изгибаемого элемента с дискретными волокнами по детерминированной математической модели необходимо учитывать все стадии его разрушения.

Рассмотрим однопролетную фибробетонную балку, свободно лежащую на двух опорах, симметрично нагруженную двумя сосредоточенными силами F (рис. 2).

Балка разрушается в зоне чистого изгиба; нормальное (центральное) сечение проходит последовательно через три характерные стадии НДС, отличающиеся между собой как в количественном, так и в качественном отношении.

Под первой стадией разрушения здесь понимают НДС элемента до образования трещин в его растянутой зоне, т.е. когда напряжения почти пропорциональны деформациям (рис. 3, а); деформации растянутой зоны не превосходят значения ϵ_{fbtR} (предель-

ные деформации, соответствующие пределу прочности фибробетона на растяжение R_{fbt}); эпюры нормальных напряжений в композите сжатой и растянутой зон сечения по форме близки к треугольным.

С увеличением нагрузки развиваются неупругие деформации в растянутой зоне элемента; эпюра напряжений в ней становится криволинейной; величина напряжений приближается к временному сопротивлению фибробетона на осевое растяжение. Когда деформации удлинения крайних растянутых волокон достигнут предельной величины ϵ_{fbtR} , наступает конец первой стадии. При этом растягивающее напряжение в бетоне у нижней кромки достигает предела прочности фибробетона при растяжении R_{fbt} ; в сжатой зоне эпюра напряжений близка к треугольной. При дальнейшем увеличении нагрузки в бетоне растянутой зоны образуются трещины, рост которых сдерживается множественными дискретными волокнами.

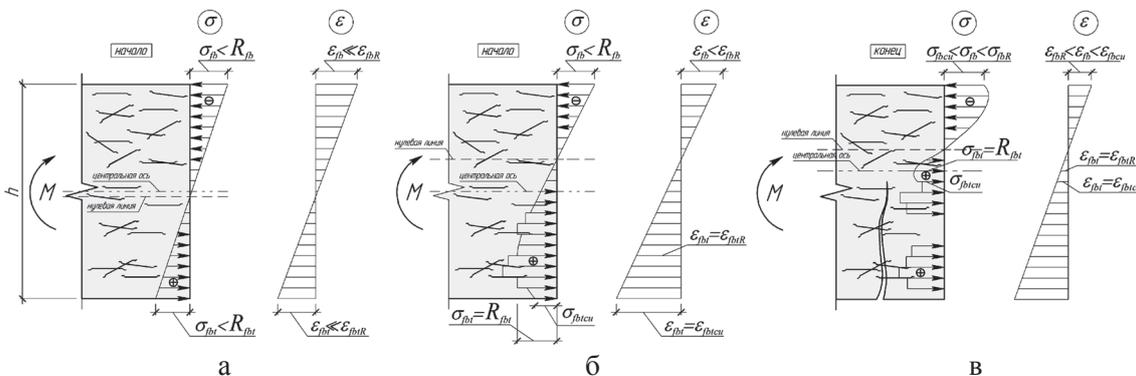


Рис. 3. Стадии напряженно-деформированного состояния изгибаемого фибробетонного элемента: а – 1-ая стадия; б – 2-ая стадия; в – 3-я стадия

Под второй стадией понимают НДС эл-мента, когда в фибробетоне его растянутой зоны интенсивно образуются и раскрываются трещины. В местах трещин растягивающие усилия в основном воспринимает дискретное волокно, – стальная фибра, – и частично бетон над трещиной (рис. 3, б).

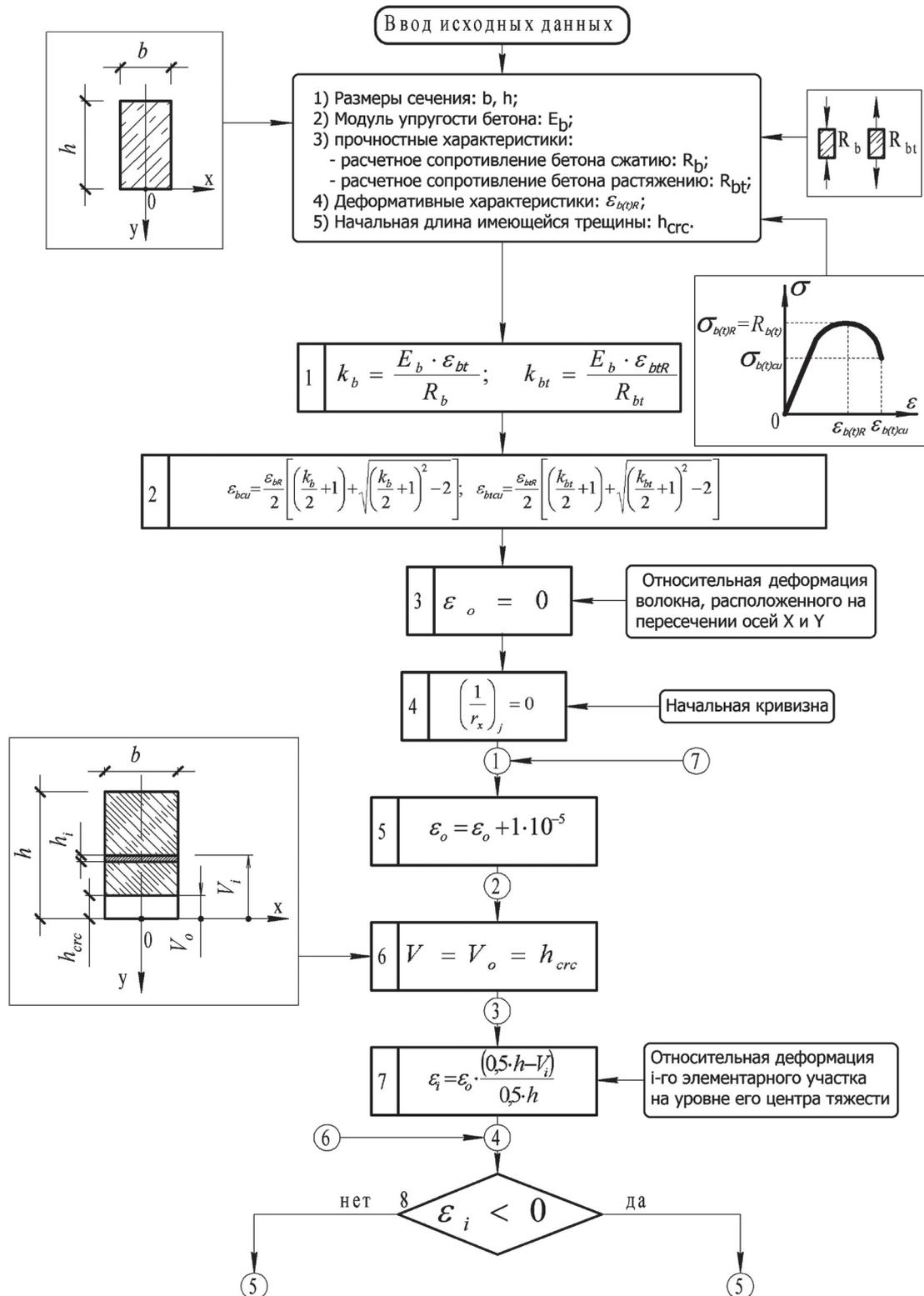


Рис. 4. Алгоритм программы, оценивающей НДС изгибаемых элементов на основе детерминированной математической модели (начало)

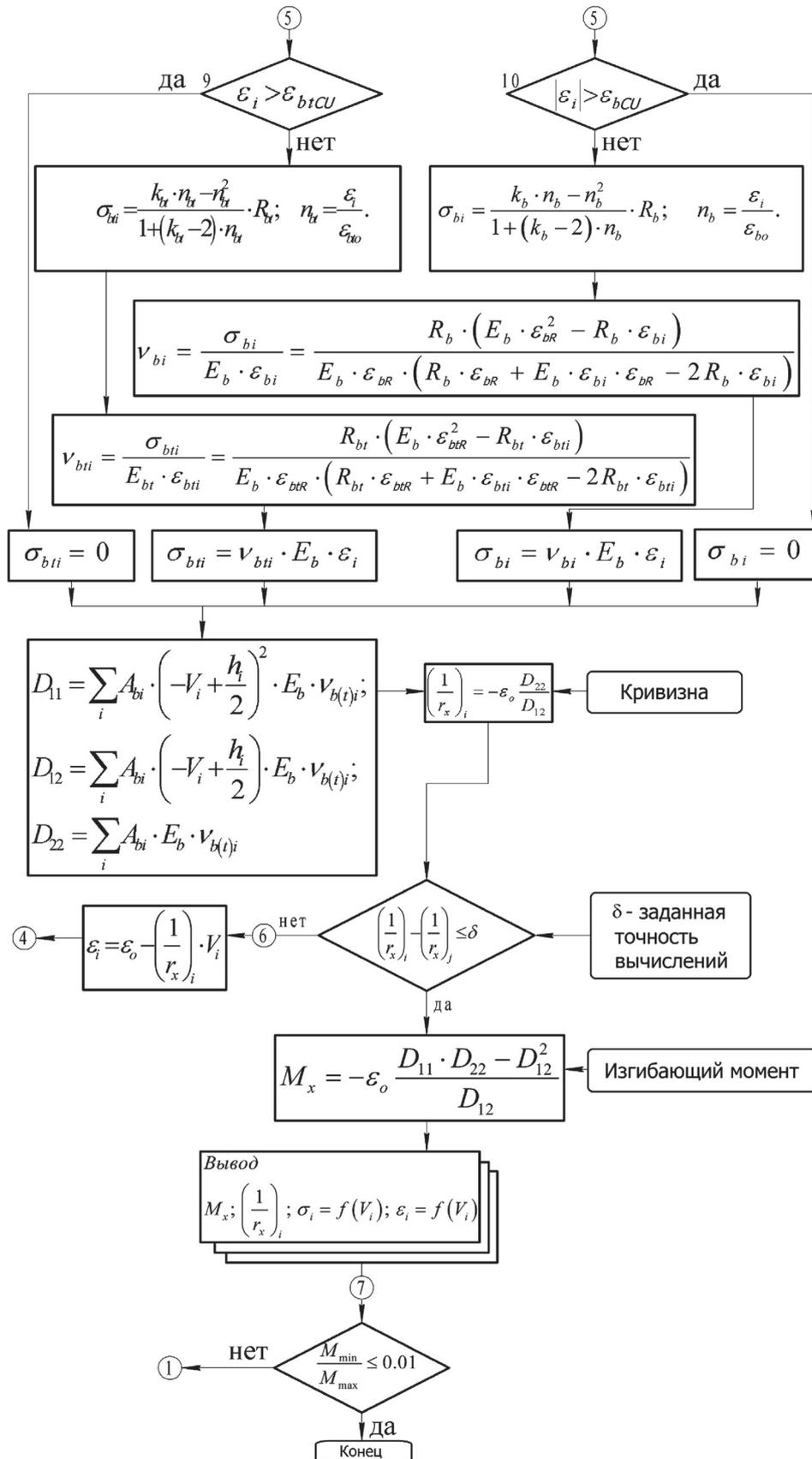


Рис. 5. Алгоритм программы, оценивающей НДС изгибаемых элементов на основе детерминированной математической модели (окончание)

По мере возрастания нагрузки в местах трещин начинают появляться заметные неупругие деформации стальных волокон, свидетельствующие о приближении напряжений в волокнах к пределу текучести. Эпюра нормальных напряжений в фибробетоне сжатой зоны по мере увеличения нагрузки за счет развития неупругих деформаций постепенно искривляется. Величина максимальных напряжений постепенно перемещается с края в глубину сечения, а нулевая линия поднимается вверх. Эпюра нормальных напряжений растянутой зоны в месте образования трещин по мере увеличения нагрузки разбивается на локальные участки с повышенными значениями напряжений. Эти напряжения действуют в сечениях волокон, препятствующих росту и образованию трещин.

На третьей стадии разрушения фибробетонного элемента напряжения в фиброволокнах достигают физического или условного предела, когда волокно начинает либо вытягиваться из матрицы композита, либо при достижении предела прочности стали волокна рвётся (рис. 3, в); локальные участки повышенного напряжения становятся более выраженными. Выше нейтральной линии напряжения достигают временно-сопротивления осевому сжатию. Здесь криволинейность эпюры нормальных напряжений сжатия также приближается по очертанию к кубической или параболе более высокого порядка.

Для проведения численного эксперимента и для практического использования предложенной математической модели

была разработана программа для ЭВМ по оценке напряженно-деформированного состояния железобетонных и фибробетонных балок с учетом физической нелинейности конструкционных материалов SFRC (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016611439). Программа позволяет получить распределение напряжений по сечению на каждом этапе загрузки с учетом влияния эксцентриситетов. Блок-схема алгоритма программы SFRC представлена на рис. 4, 5. Программа SFRC написана с помощью алгоритмического языка C++ в программной среде Builder Version 6.0 (Build 10.155).

Список литературы

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона // Стройиздат. – М., 1996. – 419 с.
2. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Петров А.Н. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций: сб. научных трудов НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1986. – С. 7–25.
3. Карпенко Н.И., Мухамедиев Т.А., Сапожников М.И. К построению методики расчета стержневых элементов на основе диаграмм деформирования материалов // Совершенствование методов расчета статически неопределимых железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1987. – С. 4–24.
4. Корнеев А.М., Бузина О.П., Суханов А.В. Математическое моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния неоднородных сред с непрерывными и дискретными волокнами // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 8–1. – С. 39–44.
5. Панфилов Д.А., Пишулев А.А., Гимадетдинов К.И. Обзор существующих диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных нормативных документах // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – № 3. – С. 80–84.