УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЛАГОПЕРЕНОСА БИЦАДЗЕ − ЛЫКОВА

Водахова В.А., Кумыков В.К., Шокуева Ф.Г.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Настоящая статья посвящена исследованию вопроса однозначной разрешимости нелокальной задачи с операторами дробного в смысле Римана – Лиувилля дифференцирования в краевом условии для вырождающегося гиперболического уравнения в характеристическом двуугольнике. Сформулирована корректная краевая задача со смещением для уравнения Бицадзе – Лыкова. При определенных ограничениях неравенственного типа на известные функции и порядки дробных производных методом интегралов энергии доказана теорема единственности. Методом интегральных уравнений Трикоми вопрос существования решения задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения второго рода с ядром Коши. Выписано условие, гарантирующее существование регуляризатора, приводящего сингулярное интегральное уравнение к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения задачи. Установлено влияние на корректность постановки задачи порядков дробных производных в краевом условии и их связь с порядком вырождения уравнения.

Ключевые слова: нелокальная задача, оператор дробного дифференцирования, вырождающееся гиперболическое уравнение, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение, уравнение влагопереноса

NONLOCAL PROBLEM FOR AN EQUATION MOISTURE BITSADZE – LYKOVA

Vodakhova V.A., Kumykov V.K., Shokueva F.G.

Kh.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

This article is devoted to the study of the question of unique solvability of nonlocal problems with operators of fractional Riemann – Liouville sense of differentiation in the boundary condition for a degenerate hyperbolic equation in the characteristic lune. It formulated the correct boundary value problem with shift for an equation Bitsadze – Lykov. Under certain restrictions on the type neravenstvennogo known functions and order fractional derivatives by energy integrals proved the uniqueness theorem. The method of integral equations of Tricomi problem of existence of solutions of the problem is reduced to the equivalent question of the solvability of a singular integral equation of the second kind with a Cauchy kernel. Write down the conditions guaranteeing the existence regularizes leading singular integral equation to a Fredholm equation of the second kind, which is unconditional solvability follows from the uniqueness of the solution of the problem. The effect on the correct formulation of the problem of fractional – order derivative in the boundary condition and their relationship with the degeneration of the equation order.

Keywords: nonlocal problem, fractional differentiation operator degenerate hyperbolic equation, Fredholm singular integral equation, the equation of moisture transfer

В современной теории дифференциальных уравнений с частными производными теория локальных и нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений является одним из важнейших разделов, изучению которого посвящено немало публикаций. Повышенный интерес к уравнениям смешанного типа объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и многочисленными практическими приложениями в газовой динамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеивания, в математической биологии. Они имеют большое значение при математическом моделировании нефтяных пластов, фильтраций грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющего сложное строение электрических колебаний в проводах и других областях.

Анализ литературы по гиперболическим уравнениям переноса влаги в пористых средах показал, что наиболее адекватными реальной ситуации моделями являются математические модели, в основе которых лежит уравнение А.В. Лыкова с младшим членом, учитывающим движение почвенной влаги под действием гравитационных сил

Одномерный поток влаги в капиллярно-пористом теле поликапиллярной структуры $u = u(\xi, t)$ связан с влажностью $w = w(\xi, t)$ в точке ξ в момент времени t обобщенным законом переноса влаги

$$u = -D\rho\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{D}{a_0^2}\xi^2\frac{\partial u}{\partial t},$$

где D – коэффициент диффузии; ρ – плотность; a_0 – коэффициент пропорциональности, зависящий от пористости тела, его капиллярных свойств и вязкости жидкости.

Если u и w связаны законом сохранения массы

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

то получим систему дифференциальных уравнений. Производя замену

$$\rho w = v;\quad x = t/a_0;\quad y = \xi/a_0,$$

а затем обозначив

$$a = -a_0/D,$$

где a – безразмерная величина, придадим системе следующий вид:

$$y^2u_x + v_y - au = 0;\quad v_x + u_y = 0.$$

Дифференцируя первое по x, а второе по y и исключив $v(x, y)$, получим уравнение А.В. Лыкова для определения $u(x, y)$

$$y^2u_{xx} - u_{yy} + au_x = 0.$$

Отметим, что это уравнение было приведено А.В. Бицадзе [1] как пример уравнения, для которого при $|a|\le 1$ корректна по Адамару задача Коши с начальными данными на любом участке $x_0<x<x_1$ линии $y=0$ параболического вырождения, хотя нарушено известное условие Геллерстедта, а А.М. Нахушевым [6] как пример уравнения, для которого при $|a|=1$ задача Дарбу не является корректной и характеристики не являются равноправными как носители граничных данных.

Цель исследования – доказать однозначную разрешимость задачи с дробными производными в краевом условии для вырождающегося гиперболического уравнения в характеристическом двуугольнике.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение влагопереноса

$$y^2U_{xx}-U_{yy}+aU_x=0, \tag{1}$$

где a – действительная постоянная, причем $|a|\le 1$, в характеристическом двуугольнике, ограниченном характеристиками уравнения (1)

$$AC: x-\frac{1}{2}y^2=0;\quad BC: x+\frac{1}{2}y^2=1;$$

$$AD: x-\frac{1}{2}(-y)^2=0;\quad BD: x+\frac{1}{2}(-y)^2=1.$$

Пусть $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$; $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$; I – интервал $0<x<1$ прямой $y=0$.

Задача: Найти решение

$$U(x,y)=\begin{cases}U_1(x,y), & (x,y)\in\Omega_1;\\ U_2(x,y), & (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega_1\cup I)\cap C^1(\Omega_2\cup I)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, удовлетворяющее условиям

$$a_1(x)D_{0x}^{\frac{3-a}{4}}U_1\left[\theta_0^1(x)\right]+b_1(x)D_{x1}^{\frac{a+3}{4}}U_1\left[\theta_1^1(x)\right]=C_1(x); \tag{2}$$

$$a_2(x)D_{0x}^{\frac{1-a}{4}}x^{-1/2}U_2\left[\theta_0^2(x)\right]+b_2(x)D_{x1}^{\frac{a+1}{4}}(1-x)^{-1/2}U_2\left[\theta_1^2(x)\right]=C_2(x) \tag{3}$$

и условию сопряжения $U_{1y}(x,0)=\alpha(x)U_{2y}(x,0)+\beta(x)$, где $b_i(x)$, $a_i(x)$, $c_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – заданные функции, причем $a_i^2(x)+b_i^2(x)\neq 0$; $b_i(x)$, $a_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^3(I)$, $i=1, 2$, $\theta_0^i(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)\in I$, с характеристиками AC, AD; $\theta_1^i(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками BC, BD. Здесь и в дальнейшем $D_{ax}^{\alpha}\varphi$ – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования порядка α с началом в точке a [3, 10].

Доказательство единственности решения. Введем обозначения

$$\lim_{y\to\pm0}U(x,y)=\tau(x);\quad \lim_{y\to+0}U_y(x,y)=\nu_1(x);\quad \lim_{y\to-0}U_y(x,y)=\nu_2(x).$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) при $|a|<1$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned}U_i(x,y)=\gamma_1\int_0^1\tau\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-3}{4}}t^{-\frac{(a+3)}{4}}dt+\\+y_2\int_0^1\nu_i\left[x+\frac{y^2}{2}(1-2t)\right](1-t)^{\frac{a-1}{4}}t^{-\frac{(a+1)}{4}}dt,\end{aligned} \tag{4}$$

где $i=1, 2$; $\gamma_1=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}$; $\gamma_2=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}$; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера [3].

Удовлетворяя (4) краевым условиям (2) (3), получим соотношения между $\tau(x)$ и $\nu_i(x)$, принесенные на $\bar{I}$ из областей Ω_1 и Ω_1 соответственно

$$\gamma_2\left[\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}a_1(x)+\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)\right]\nu_1(x)=x^{\frac{1-a}{4}}(1-x)^{\frac{a+1}{4}}c_1(x)-$$
$$-\gamma_1\left[\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{1+a}{4}}a_1(x)D_{0x}^{1/2}\tau(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)D_{x1}^{1/2}\tau(x)\right]; \qquad (5)$$

$$\gamma_1\left[\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)\right]\tau(x)=$$
$$=\gamma_2\left[\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)D_{0x}^{-1/2}\nu_2(x)+\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)D_{x1}^{-1/2}\nu_2(x)\right]+ \qquad (6)$$
$$+x^{\frac{3-a}{4}}(1-x)^{\frac{3+a}{4}}c_2(x).$$

Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(3), если либо

$$\alpha(x)>0,\ b_1(x)=0,\ a_2(x)=0,\ \forall x\in\bar{I}, \qquad (7)$$

либо $\alpha(x)\equiv 1$,

$$\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)\neq 0,\ \forall x\in\bar{I}; \qquad (8)$$

$$\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}a_1(x)+\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)\neq 0,\quad \forall x\in\bar{I}; \qquad (9)$$

$$a_i(x)\cdot b_i(x)\geq 0,\quad i=1,2,\quad \forall x\in\bar{I}; \qquad (10)$$

$$\left[\frac{b_1(x)}{a_1(x)}\cdot\frac{x^{\frac{1-a}{4}}}{(1-x)^{\frac{1+a}{4}}}\right]'\geq 0,\quad \forall x\in\bar{I}; \qquad (11)$$

$$\left[\frac{b_2(x)}{a_2(x)}\cdot\frac{x^{\frac{3-a}{4}}}{(1-x)^{\frac{3+a}{4}}}\right]'\geq 0,\quad \forall x\in\bar{I}. \qquad (12)$$

Доказательство. При $c_i(x)=0$ и выполнении условий (7) равенства (5), (6) примут вид

$$\nu_i(x)=-\frac{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}D_{0x}^{1/2}\tau(x);\quad \nu_2(x)=\frac{2\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)}D_{x1}^{1/2}\tau(x).$$

В силу принципа экстремума для гиперболических уравнений [1, 6] положительный максимум (отрицательный минимум) функции $u(x, y)$ в $\bar{\Omega}_1$ достигается на $\bar{I}$. Пусть положительный максимум функции $u(x, y)$ достигается в точке $(x, 0)\in I$. Пользуясь тем, что дробные производные $D_{0x}^{1/2}\tau(x)$, $D_{x1}^{1/2}\tau(x)$ в точке положительного максимума строго положительны (в точке отрицательного минимума строго отрицательны) [6], получаем $\nu_1(x)<0$, $\nu_2(x)>0$. Это противоречит условию сопряжения при $\beta(x)=0$, $\alpha(x)>0$.

При $c_i(x)=0$ и выполнении условий (8), (9) равенства (5), (6) примут вид

$$\tau(x)=A_2(x)D_{0x}^{-1/2}\nu_2(x)+B_2(x)D_{x1}^{-1/2}\nu_2(x);$$

$$\nu_1(x)=A_1(x)D_{0x}^{1/2}\tau(x)+B_1(x)D_{x1}^{1/2}\tau(x),$$

где

$$A_2(x)=\frac{-\gamma_2\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)}{\gamma_1\left[\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)\right]};$$

$$B_2(x)=\frac{-\gamma_2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)}{\gamma_1\left[\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)\right]};$$

$$A_1(x)=\frac{-\gamma_1\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}a_1(x)}{\gamma_2\left[\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}a_1(x)+\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)\right]};$$

$$B_1(x)=\frac{-\gamma_1\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)}{\gamma_2\left[\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}a_1(x)+\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)\right]}.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_1^*(x)=\int_0^1\tau(x)\nu_1(x)dx=-\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 A_1(x)\tau(x)dx\left[\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1/2}}\right]+\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 B_1(x)\tau(x)dx\left[\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1/2}}\right].$$

Вводя обозначения

$$\frac{\sin\pi/2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)dt}{(x-t)^{1/2}}=\tau_1(x);\quad -\frac{\sin\pi/2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_x^1\frac{\tau(t)dt}{(t-x)^{1/2}}=\tau_2(x),$$

с учетом формулы обращения интегрального уравнения Абеля [3] получим

$$\Gamma(1/2)I_1^*(x)=-\frac{\pi}{\sin\pi/2}\int_0^1 A_1(x)\tau_1(x)dx\int_0^x\frac{\tau_1(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1/2}}-\frac{\pi}{\sin\pi/2}\int_0^1 B_1(x)\tau_2(x)dx\int_x^1\frac{\tau_2(\xi)d\xi}{(\xi-x)^{1/2}}.$$

Воспользуемся известной формулой для функции $\Gamma(\mu)$ [4]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\cos kt dt=\frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\mu\frac{\pi}{2}\quad(k>0,\ 0<\mu<1).$$

Полагая $k=|x-\xi|$, $\mu=1/2$ и поменяв порядок интегрирования, будем иметь

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\Gamma^2(1/2)\ I_1^*(x)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_1(x)\left[\left(\int_0^x\tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2\right]'dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_1(x)\left[\left(\int_0^x\tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]'dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_1(x)\left[\left(\int_x^1\tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2\right]'dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_1(x)\left[\left(\int_x^1\tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]'dx.$$

Отсюда, интегрируя по частям, с учетом того, что $A_1(1) = 0$, $B_0(0) = 0$, будем иметь

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi}\Gamma^2(1/2)I_1^*(x)=\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_1'(x)\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2+\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_1'(x)\left(\int_0^x \tau_1(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2-$$

$$-\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_1'(x)\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2-\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_1'(x)\left(\int_x^1 \tau_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2.$$

При выполнении условий (10), (11) теоремы единственности $I_1^*(x)\le 0$. Далее рассмотрим интеграл

$$I_2^*(x)=\int_0^1 \tau(x)\nu_2(x)dx=\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 A_2(x)\nu_2(x)dx\int_0^x\frac{\nu_2(t)dt}{(x-t)^{1/2}}+\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^1 B_2(x)\nu_2(x)dx\int_x^1\frac{\nu_2(t)dt}{(x-t)^{1/2}}.$$

Последнее с учетом предыдущих вычислений представимо в виде

$$\frac{\Gamma^2(1/2)}{\sqrt{2}}I_2^*(x)=\int_0^1 A_2(x)\nu_2(x)dx\int_0^x\nu_2(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{-1/2}\cos(x-\xi)tdt+$$

$$+\int_0^1 B_2(x)\nu_2(x)dx\int_x^1\nu_2(\xi)d\xi\int_0^\infty t^{-1/2}\cos(\xi-x)tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_2(x)\left[\left(\int_0^x\nu_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2\right]'dx+\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 A_2(x)\left[\left(\int_0^x\nu_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]'dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_2(x)\left[\left(\int_x^1\nu_2(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2\right]'dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}dt\int_0^1 B_2(x)\left[\left(\int_x^1\nu_2(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2\right]'dx.$$

Так же, как и при вычислении интеграла $I_1^*(x)$ при выполнении условий (10), (12) теоремы единственности, нетрудно усмотреть, что $I_2^*(x)\ge 0$. Так как при $\alpha(x) = 1$, $\beta(x) = 1$ будет $\nu_1(x) = \nu_2(x)$, то

$$\int_0^1 \tau(x)\nu_i(x)dx=0.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty t^{-1/2}dt\left(\int_0^1\tau(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2=0;\quad \int_0^\infty t^{-1/2}dt\left(\int_0^1\tau(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2=0;\quad \int_0^\infty t^{-1/2}dt\left(\int_0^1\nu_i(\xi)\cos t\xi d\xi\right)^2=0;$$

$$\int_0^\infty t^{-1/2}dt\left(\int_0^1\nu_i(\xi)\sin t\xi d\xi\right)^2=0.$$

Из того, что $t^{-1/2}\ge 0$, заключаем, что

$$\int_0^1\tau(\xi)\cos t\xi d\xi=0;\ \int_0^1\tau(\xi)\sin t\xi d\xi=0;\ \int_0^1\nu_i(\xi)\cos t\xi d\xi=0;\ \int_0^1\nu_i(\xi)\sin t\xi d\xi=0,$$

для всех $t\in[0,\infty)$, в частности при $t = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При таких значениях t функции $\sin t\xi$ и $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L_2.

Таким образом, $\tau(x) = 0$, $\nu_i(x) = 0$, $i = 1, 2$ почти всюду. А так как эти функции непрерывны по условию, то $\tau(x) = 0$ и $\nu_i(x) = 0$ всюду. Отсюда $U_i(x, y) = 0$ в Ω_i как решение задачи Коши с нулевыми данными и, следовательно, решение задачи (1)–(3) единственно.

Доказательство существования решения задачи. Исключая $\tau(x)$ из (5) и (6) при выполнении условий теоремы единственности и условий сопряжения, будем иметь

$$A(x)\nu_2(x)+\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}a_1(x)D_{0x}^{1/2}\left[A_2(x)D_{0x}^{-1/2}\nu_2(x)-B_2(x)D_{x1}^{-1/2}\nu_2(x)\right]+$$
$$+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)D_{x1}^{1/2}\left[A_2(x)D_{0x}^{-1/2}\nu_2(x)+B_2(x)D_{x1}^{-1/2}\nu_2(x)\right]=f(x), \quad (13)$$

где
$$A(x)=\left[\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)a_1(x)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}+\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)b_1(x)x^{\frac{1-a}{4}}\right]\alpha(x);$$

$$f(x)=\frac{1}{\gamma_2}C_1(x)-\beta(x)\left[\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)a_1(x)(1-x)^{\frac{a+1}{4}}+\Gamma\left(\frac{a+3}{4}\right)b_1(x)x^{\frac{1-a}{4}}\right]-$$
$$-\gamma_1\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)a_1(x)D_{0x}^{1/2}\left[\frac{x^{\frac{3-a}{4}}(1-x)^{\frac{a+1}{4}}C_2(x)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)}\right]-$$
$$-\gamma_1\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{1-a}{4}}b_1(x)D_{x1}^{1/2}\left[\frac{x^{\frac{3-a}{4}}(1-x)^{\frac{a+1}{4}}C_2(x)}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)(1-x)^{\frac{a+3}{4}}a_2(x)+\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)x^{\frac{3-a}{4}}b_2(x)}\right].$$

В результате преобразований вопрос существования решения уравнения (13) сведен к вопросу разрешимости сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши [5].

$$\Gamma^2(1/2)A(x)\nu_2(x)+\int_0^1\frac{K(x,\xi)}{\xi-x}\nu_2(\xi)d\xi=\Gamma^2(1/2)f(x), \quad (14)$$

где
$$K(x,\xi)\in C(\bar{I}\times\bar{I})\cap C^1(I\times I), \qquad f(x)\in C(\bar{I})\cap C^1(I).$$

Условие

$$\left[\Gamma^2(1/2)A(x)\right]^2+\pi^2\left[K(x,\xi)\right]^2\neq 0$$

гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (14) к уравнению Фредгольма второго рода при $A(x)\neq 0$.

Из возможности приведения задачи к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и единственности искомого решения следует существование решения поставленной задачи. По найденному $\nu_2(x)$ определяется $\nu_1(x)$, а затем $\tau(x)$ и решения $U_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) задачи в областях Ω_i, как решение задачи Коши по формуле (4). Нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений исследовались также в работах [2, 7–9].

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Водахова В.А., Яхутлова М.Р., Тлимахова Р.Г. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения // Современные наукоемкие технологии. – 2016. – № 2–3. – С. 416–420.

3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.-Л., 1953. – 379 с.

4. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физичский журнал. – 1965. – Т. 9. – № 3. – С. 287–304.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.

6. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. Краевая задача с операторами Сайго для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 7. – С. 49–57.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа в неограниченной области // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2015. – № 4. – С. 60–64.

9. Репин О.А., Кумыкова С.К. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Т. 51. – № 6. – С. 755–763.

10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.