

УДК 658.264

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ОГРАЖДАЮЩИХ КОНСТРУКЦИЯХ ЗДАНИЙ

Тарасова В.В.

ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», Чебоксары,
e-mail: charming_cerl@rambler.ru

Разработана усовершенствованная математическая модель нестационарных тепловых процессов в ограждающих конструкциях зданий и сооружений при несимметричных граничных условиях третьего рода и различных начальных условиях. Решением дифференциального уравнения в частных производных получены зависимости от времени распределения температуры по объему наружной стены здания при изменении температуры наружного воздуха. Исследованы процессы при переходе от одного установившегося начального режима с линейным распределением температуры по толщине стены к другому стационарному режиму. Показано, что стена является объектом с распределенными параметрами, температура на внешней поверхности стены достигает установившегося значения через несколько часов, на внутренней поверхности – через десятки часов после начала теплового переходного процесса. Сопротивление теплопередачи ограждения может быть определено только для установившегося теплового режима вследствие непрерывного изменения теплосодержания стены за время теплового переходного процесса.

Ключевые слова: математическое моделирование, нестационарные тепловые процессы, дифференциальные уравнения, несимметричные граничные условия, температурные поля

MATHEMATICAL MODELING OF UNSTEADY PROCESSES IN THE BUILDING ENVELOPE

Tarasova V.V.

Federal State Educational Institution of Higher Education «Chuvash State University
named after I.N. Ulyanov», Cheboksary, e-mail: charming_cerl@rambler.ru

The advanced mathematical model of non-stationary thermal processes in enclosing structures of buildings and structures with asymmetric boundary conditions of the third kind and different initial conditions. Solutions of differential equations in partial derivatives are obtained depending on the time of the temperature distribution over the volume of the outer walls of the building changing outside temperature. The processes in the transition from one steady initial mode with a linear temperature distribution over the thickness of the wall to another stationary regime. It is shown that the wall is an object with distributed parameters on the outer wall surface temperature reaches a steady value after a few hours, on the inner surface through dozens of hours after the start of the thermal transition. fencing heat resistance can only be determined for the steady thermal regime due to continuous changes in the heat content of the wall during the thermal transient.

Keywords: mathematical modeling, transient thermal processes, differential equations, asymmetric boundary conditions, temperature fields

Для выбора рациональных алгоритмов управления системами отопления зданий и сооружений необходимы математические модели нестационарных тепловых процессов в ограждающих конструкциях. Использование математических моделей ограждающих конструкций как объектов с сосредоточенными параметрами, когда решаются обычные дифференциальные уравнения, позволяет разрабатывать только упрощенные алгоритмы управления системами теплоснабжения зданий и сооружений [4]. Для оптимального управления температурным режимом каждого объекта требуется знать характеристики, получить которые можно математическим моделированием процессов переноса тепла через ограждения здания решением дифференциальных уравнения в частных производных.

Для исследования процессов теплопередачи через ограждение решается уравнение теплопроводности при граничных условиях 3-го рода, когда задаются температуры среды и коэффициенты теплоотдачи [2, 5]. В условиях несимметричного теплообмена плоская стенка здания толщиной δ (рис. 1) с коэффициентом теплопроводности λ , удельной теплоемкостью c и плотностью ρ омывается с внутренней поверхности средой с температурой T_1 , с внешней поверхности – средой с температурой T_2 . При этом $T_2 \neq T_1$.

Передача тепла от воздуха в помещении к внутренней поверхности стенки характеризуется коэффициентом теплоотдачи α_1 . Передача тепла от внешней поверхности стенки к наружному воздуху характеризуется коэффициентом теплоотдачи α_2 . В общем случае несимметричного теплообмена $\alpha_1 \neq \alpha_2$ [2, 5].

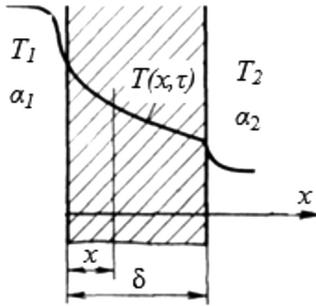


Рис. 1. Теплопередача через плоскую стенку

Для одномерного нестационарного температурного поля в области $0 < x < \delta$ при $\tau > 0$ температурное поле описывается уравнением

$$c\rho \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Начальное условие $0 \leq x \leq \delta$ и $\tau = 0$

$$T(x, 0) = f(x). \quad (2)$$

Граничные условия:

при $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} + \alpha_1 [T_1 - T(0, \tau)] = 0;$$

при $x = \delta$

$$\lambda \frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 [T(\delta, \tau) - T_2] = 0.$$

Для решения дифференциального уравнения с несимметричными граничными условиями используется принцип суперпозиции, согласно которому решение представляется в виде суммы решения стационарной задачи для функции $V(x)$ с заданными граничными условиями и нестационарной задачи для функции $W(x, \tau)$ с нулевыми граничными условиями [2, 5, 6]:

$$T(x, \tau) = V(x) + W(x, \tau). \quad (3)$$

Функция $V(x)$ описывает установившийся стационарный режим, а функция $W(x, \tau)$ – переходный тепловой процесс, по окончании которого функция $W(x, \tau)$ стремится к нулю.

При допущении однородности среды нестационарное температурное поле в области $0 < x < \delta$ при $\tau > 0$ описывается уравнением

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где a – коэффициент температуропроводности.

Функция $V(x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0. \quad (5)$$

При граничных условиях при $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial V(0)}{\partial x} + \alpha_1 [T_1 - V(0)] = 0,$$

при $x = \delta$

$$\lambda \frac{\partial V(\delta)}{\partial x} + \alpha_2 [V(\delta) - T_2] = 0.$$

Функция $V(x)$ имеет вид

$$V(x) = A - Bx. \quad (6)$$

Решение стационарной задачи позволяет рассчитывать тепловое поле в стенке в установившемся режиме. Коэффициент A в формуле (6) численно равен температуре на наружной поверхности стенки, коэффициент B – градиенту температуры в объеме стенки.

Коэффициенты A и B в формуле (6) определяются по выражениям

$$A = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right) T_1 + \frac{T_2}{\alpha_1}}{R} \quad (7)$$

$$B = \frac{\alpha_1}{\lambda} (T_1 - A), \quad (8)$$

где R – тепловое сопротивление теплопередачи в стационарном режиме,

$$R = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}.$$

Если тепловой переходный процесс начинается с установившегося режима при температурах внутреннего и наружного воздуха соответственно $T_{1нач}$ и $T_{2нач}$, то коэффициенты $A_{нач}$ и $B_{нач}$ определяются по формулам

$$T_{нач} = A_{нач} - B_{нач}x, \quad (9)$$

$$A_{нач} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right) T_{1нач} + \frac{T_{2нач}}{\alpha_1}}{R}, \quad (10)$$

$$B_{нач} = \frac{\alpha_1}{\lambda} (T_{1нач} - A_{нач}). \quad (11)$$

При изменении температуры наружного воздуха в стенке наступает переходный тепловой процесс, по окончании которого температура по сечению распределяется по линейному закону.

$$T_k = A_k - B_kx, \quad (12)$$

$$A_k = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda} \right) T_{1k} + \frac{T_{2k}}{\alpha_1}}{R}, \quad (13)$$

$$B_k = \frac{\alpha_1}{\lambda} (T_{ik} - A_k). \quad (14)$$

При изменении условий теплообмена, когда меняются температуры наружного воздуха или (и) температуры воздуха внутри помещения, происходит переход от одного установившегося состояния к другому. Тепловой переходный процесс описывается функцией $W(x, \tau)$, которая находится решением уравнения

$$\frac{\partial W(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 W(x, \tau)}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Начальное условие $0 \leq x \leq \delta$ и $\tau = 0$

$$W(x, 0) = f(x) - V(x). \quad (16)$$

Граничные условия:
при $x = 0$

$$\lambda \frac{\partial W(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 W(0, \tau) = 0,$$

$$T(x, \tau) = (A_k - B_k x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \left(\cos(\mu_n x) + \frac{\alpha_1}{\lambda \mu_n} \sin(\mu_n x) \right) \exp(-a \mu_n^2 \tau) \right]. \quad (20)$$

Для реализации начальных условий функция $W(x, 0) = f(x) - V(x)$ теоретически может быть представлена в виде ряда (20), однако для несимметричных граничных условий третьего рода применение метода разделения переменных Фурье и других аналитических методов наталкивается на серьезные трудности [1]. Решения получаются в виде бесконечных рядов, которые плохо сходятся в начальный период времени, поскольку для реализации начальных условий применяется разложение в ряд Фурье разрывных функций. При этом наблюдается явление Гиббса, когда представленная тригонометрическим рядом функция, проходя через точку разрыва, делает скачок [1].

$$T(x, \tau) = (A_k - B_k x) + \sum_{n=1}^m \left[C_n \left(\cos(\mu_n x) + \frac{\alpha_1}{\lambda \mu_n} \sin(\mu_n x) \right) \exp(-a \mu_n^2 \tau) \right]. \quad (21)$$

При этом функция $W(x, \tau)$ имеет вид

$$W(x, \tau) = \sum_{n=1}^m C_n U_n \exp(-a \mu_n^2 \tau).$$

Для реализации начального условия коэффициенты C_n определяются решением системы линейных уравнений, полученной

при $x = \delta$

$$\lambda \frac{\partial W(\delta, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 W(\delta, \tau) = 0. \quad (17)$$

Граничные условия (17) выполняются, если функция $W(x, \tau)$ имеет вид

$$W(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n \exp(-a \mu_n^2 \tau), \quad (18)$$

где $U_n = \cos \mu_n x + \frac{\alpha_1}{\mu_n \lambda} \sin \mu_n x$,

μ_n – корни характеристического уравнения [2]

$$\operatorname{tg} \mu \delta = \frac{\mu \delta (1 + \sigma) Bi_1}{(\mu \delta)^2 - \sigma Bi_1^2}, \quad (19)$$

где $\sigma = \alpha_2 / \alpha_1$ – критерий несимметричности теплообмена;

$Bi_1 = \alpha_1 \delta / \lambda$ – критерий Био для внутренней поверхности стенки.

Коэффициенты C_n определяются из начальных условий. Теоретическое решение имеет вид бесконечного ряда [2, 5, 6]:

Теоретически точное решение на практике оказывается приближенным. Поэтому вместо нахождения точных аналитических решений применяются приближенные аналитические решения краевых задач, которые отличаются от точных решений на некоторую малую величину $P(x)$ погрешности [3].

Для расчета нестационарного температурного поля в стенке при несимметричных граничных условиях третьего рода и любых начальных условиях наиболее целесообразно искать решение уравнения (1) по методу Трефтца [3] в виде конечной суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет уравнению (1) и граничным условиям третьего рода.

приравниванием значений функции $T(x_m, 0)$ и значений заданных начальных условий $f(x_m)$ в определенных точках x_m .

Для реализации начального условия (16) в общем случае должно выполняться равенство:

$$W(x, 0) = f(x) - A_k + B_k x. \quad (22)$$

Если начальным условием является линейное распределение температуры по толщине стенки

$$V_{\text{нач}} = A_{\text{нач}} - B_{\text{нач}} x,$$

$$W(x, 0) = (A_{\text{нач}} - A_k) - (B_{\text{нач}} - B_k)x. \quad (23)$$

Для нахождения коэффициентов C_n решается система линейных уравнений

$$\begin{cases} U_1 C_1 + U_{12} C_2 + \dots + U_{1n} C_n = Z_1 \\ \dots \\ U_{m1} C_1 + U_{m2} C_2 + \dots + U_{mn} C_n = Z_m \end{cases}, \quad (24)$$

где $Z_m = (A_{\text{нач}} - A_k) - (B_{\text{нач}} - B_k)x_m$.

$$T_{sr} = A_k - \frac{B_k \delta}{2} + \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \sum_{n=1}^m \left[C_n \left(\cos(\mu_n x) + \frac{\alpha_1}{\lambda \mu_n} \sin(\mu_n x) \right) \exp(-a \mu_n^2 \tau) \right] dx. \quad (28)$$

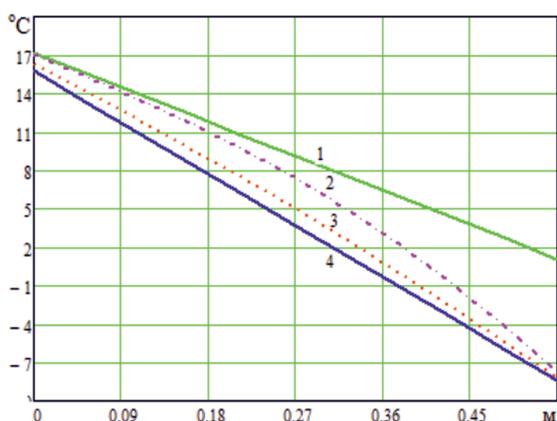


Рис. 2. Распределение температуры по толщине стенки для различных моментов времени при похолодании: 1 – начальное стационарное распределение температуры перед началом теплового переходного процесса, 2 – распределение температуры через 4 часа после начала теплового переходного процесса, 3 – распределение температуры через 12 часов после начала теплового переходного процесса, 4 – конечное стационарное распределение температуры после окончания теплового переходного процесса

По формулам (21) и (28) рассчитаны распределения по температуры по толщине стены здания (рис. 2) и зависимости от времени температуры на внутренней поверхности стены, среднеинтегральной температуры, средней температуры стены и температуры на наружной поверхности стены (рис. 3).

При похолодании, когда температура наружного воздуха изменяется от 0°C

Система (35) представляется в матричном виде:

$$|U| \cdot |C| = |Z|. \quad (25)$$

Эта система легко решается через обратную матрицу [1]

$$|C| = |U|^{-1} \cdot |Z|. \quad (26)$$

Для расчета изменения во времени теплосодержания стенки в течение переходного процесса необходима среднеинтегральная температура стенки [2]:

$$T_{sr} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} T(x, \tau) dx, \quad (27)$$

до -10°C , температура на внутренней поверхности выходит на установившееся значение более двух суток (рис. 3), температура на внешней поверхности за 12 часов уже практически достигает установившегося значения. Из приведенных на рис. 3 зависимостей от времени среднеинтегральной температуры T_{sr} при протекании теплового переходного процесса видно, что в процессе перехода от одного установившегося режима к другому среднеинтегральная температура и соответственно теплосодержание стенки меняются в течение более двух суток. Постоянная времени для среднеинтегральной температуры – 27 часов. Вследствие нелинейного закона распределения температуры по сечению в начале переходного процесса средняя и среднеинтегральная температура стены различаются и становятся одинаковыми по окончании переходного процесса. В течение теплового переходного процесса меняются температуры внутренней и наружной поверхностей стены, вследствие этого удельные тепловые потоки от воздуха в помещении к внутренней поверхности стенки $q_v = \alpha_1(T_1 - T(0, \tau))$ и от наружной поверхности стены к наружному воздуху $q_n = \alpha_2(T(\delta, \tau) - T_2)$ также меняются во времени (рис. 4), причем до окончания переходного процесса эти потоки резко различаются и становятся одинаковыми только по окончании переходного процесса. Поэтому понятия тепловое сопротивление стены и коэффициент теплопередачи могут применяться только в установившемся режиме, который наступает через десятки часов после изменения теплового режима.

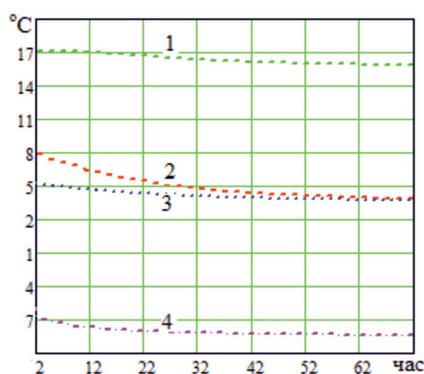


Рис. 3. Зависимости от времени температуры на внутренней поверхности стенки (1), среднеинтегральной температуры (2), средней температуры стенки (3) и температуры на наружной поверхности стенки (4)

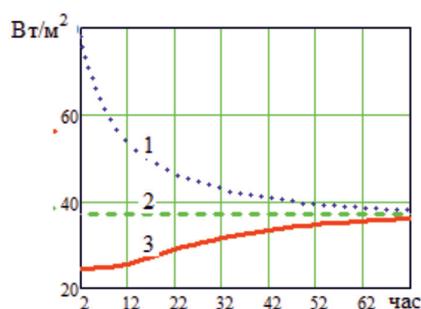


Рис. 4. Зависимость от времени удельных тепловых потоков через наружную поверхность стены (1), внутреннюю поверхность (3) и при установившемся режиме (2)

Выводы

Разработана математическая модель нестационарных тепловых процессов в ограждающих конструкциях при несим-

метричных граничных условиях третьего рода и различных начальных условиях. Решением дифференциального уравнения в частных производных получены зависимости от времени распределения температуры по объему наружной стены здания при изменении температуры наружного воздуха. Показано, что стена является объектом с распределенными параметрами, температура на внешней поверхности стены достигает установившегося значения через несколько часов, на внутренней поверхности через десятки часов после начала теплового переходного процесса. Коэффициент теплопередачи ограждения может быть определен только для установившегося теплового режима.

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, грант УМНИК 2015.

Список литературы

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1967. – 778 с.
2. Кузьмин М.П. Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. – М.: Энергия, 1974. – 416 с.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. Панферов В.И., Анисимова Е.Ю., Нагорная А.Н. К теории математического моделирования теплового режима зданий // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Челябинск: – 2006. – № 14. – С. 128–133.
5. Тарасова В.В. Математическое моделирование нестационарных процессов теплопередачи // Региональная энергетика: проблемы и решения: сб. науч. тр. Вып. 9. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. — 2013. – С. 128–144.
6. Тарасов В.А. Нестационарные тепловые процессы в печах периодического действия и повышение энергоэффективности работы печей // Региональная энергетика и электротехника: проблемы и решения: сб. науч. тр. Вып. 5. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. – 2009. – С. 95–102.