УДК 539.3

РАСЧЕТ ВАЛОВ НА ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ НА ОСНОВЕ МЕТОДИКИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЙ НЕПОДВИЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

Кузьмин А.А., Павлова Э.А.

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)», Санкт-Петербург, e-mail: tohm-ur@mail.ru

Жесткость валов является определяющим фактором работоспособности самых различных механизмов: следящих систем, высокоточных станков, трансмиссий и т.д. При расчете валов на жесткость границами грузовых участков, как правило, являются середины шпоночных пазов, шкивов, шестерен и других деталей, передающих крутящий момент. В настоящей работе в качестве границ грузовых участков предлагается принимать неподвижные сечения. Выдвинута гипотеза, согласно которой крутящий момент является мерой деформационной инертности вала постоянного сечения при кручении. На основе этой гипотезы предложена методика определения положений неподвижных сечений на примере трансмиссионного вала. На основе принципа минимума потенциальной энергии приведено доказательство. Практическая польза предложенного подхода заключается в уточнении величины коэффициента концентрации нагрузки при расчете валов – шестерен, шлицевых и шпоночных соединений и т.п. Уточнение крутильной жесткости существенно при расчете динамических нагрузок, неизбежных при пусках и остановках. В теоретическом плане неподвижные сечения можно рассматривать как некоторые аналоги нейтральной оси.

Ключевые слова: вал, крутящий момент, угол закручивания, угол поворота сечения, деформационная инертность

CALCULATION OF SHAFTS TORSIONAL RIGIDITY BASED ON THE METHODOLOGY OF DETERMINING THE POSITIONS OF THE FIXED SECTIONS

Kuzmin A.A., Pavlova E.A.

Federal State Educational Institution of Higher Education St. Petersburg State Institute of Technology (Technical University), St. Petersburg, e-mail: tohm-ur@mail.ru

The shaft stiffness is the determining factor of the efficiency of different mechanisms: tracking systems, high-precision machine tools, transmissions etc. In the calculation of the shaft stiffness on the boundaries of cargo parcels usually are mid keyways, pulleys, gears and other parts that transmit torque. In the present work as the boundaries of cargo parcels it is proposed to accept the fixed section. We suggest a hypothesis, according to which torque is a measure of uniform section shaft deformational inertia during rotation. Based on this hypothesis, the proposed method of determining the positions of the fixed sections on the example of the transmission shaft. Based on the principle of minimum potential energy is given proof. The practical benefit of the proposed approach is to clarify the magnitude of the concentration coefficient of load in the calculation of shafts, gears, splines and keyways, etc. The clarification of the torsional stiffness significantly when calculating dynamic loads, which occur during starts and stops. In theoretical terms, the fixed section can be considered as some analogues of the neutral axis.

Keywords: shaft, torque, torsion deflection, angle of rotation, deformational inertia

Расчет валов на жесткость необходим для оценки работоспособности самых различных механизмов. Например, кинематическая точность приводов следящих систем существенно зависит от крутильной жесткости основных элементов [10]. От жесткости вала и точности расчета угла закручивания зависит эффективность работы делительных механизмов [2]. Расчет валов на жесткость необходим для предотвращения резонансных колебаний [3]. Так, широко известно, что по причине колебаний произошло крушение «Цеппелина» при попытке перелета через Атлантический океан [1].

Традиционный расчет вала на жесткость при кручении сводится к следующей процедуре. Вал разбивается на грузовые участки, строится эпюра крутящих моментов, определяются углы закручивания, строится эпюра углов закручивания, указывается положение образующей [11]. Расчет этих валов на жесткость обычно сопровождается построением эпюры углов поворота поперечных сечений, при этом если имеется жесткая заделка, то именно она и является началом отсчета. Если вал расположен в подшипниках, то в литературе отсутствует определенность: рекомендуется выбор различных точек начала отсчета. Так, одни авторы в качестве начала координат рекомендуют использовать крайнее левое сечение и правило внешней нормали как правило знаков [11]. Другие за начало отсчета рекомендуют принимать сечение, проходящее через ведущий шкив, и при построении эпюры углов поворота двигаться к этому сечению с двух разных

концов [9]. Вместе с тем, от выбора точки отсчета зависит расчетная длина участка вала, влияющая на значение угла закручивания и, соответственно, на расчетное значение крутильной жесткости вала.

Точность определения фактической жесткости вала, при условии, что допускаемый угол закручивания на метр длины измеряется в минутах и секундах, может привести к нарушению работоспособности агрегата, поскольку, например, при его пуске или остановке, при больших моментах инерции и скоростях вращения, вероятно возникновение недопустимых динамических нагрузок. Варьирование крутильной жесткости валов позволяет снизить динамические нагрузки на 20–30% [8]. Учет сил инерции требует сложных методов расчета [5], поэтому в их основе должны быть соответствующие исходные данные. Таким образом, расчет валов при кручении является актуальной задачей.

При расчете крутильных колебаний валов в качестве узлов колебаний принимаются неподвижные сечения, и длина грузового участка определяется расстоянием между этими узлами. Мерой инертности отдельного звена является момент инерции, а период собственных колебаний определяется длиной участка, жесткостью вала и моментом инерции маховика.

Ниже также предлагается в качестве границ грузовых участков принимать неподвижные сечения. Аналогом неподвижных сечений при растяжении-сжатии может служить срединное сечение эспандера (рис. 1). Жесткость вала на отдельных участках следует оценивать по углу закручивания. Это актуально, в частности, при расчете коэффициента концентрации нагрузки валов-шестерен, шлицевых соединений и в других случаях. Например, если при расчете шестерни за начало отсчета принимать край и середину, то очевидно, что в одном случае ввиду ограниченной точности изготовления нагрузка сконцентрируется по одному краю (рис. 2), а в другом будет распределена более равномерно. Для оценки коэффициента распределения нагрузки существуют различные методы расчета [6], однако ряд авторов при расчете и шлицевых [7] и шпоночных [4] соединений стремится к упрощенным решениям.

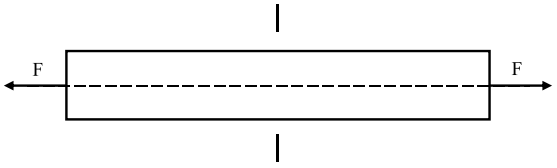

Рис. 1. Растяжение эспандера

На рис. 3, а представлена расчетная схема вала, расположенного на двух подшипниках. На валу жесткостью GI_P имеются ведущий и два ведомых шкива, передающих крутящие моменты T_0, T_1, T_2.

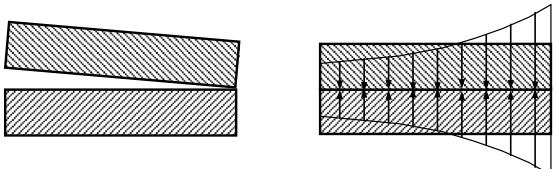

Рис. 2. Характер распределения нагрузки

Требуется определить положение неподвижных сечений, построить эпюры углов поворота и указать положение образующей.

Для определения положения неподвижных сечений предлагается разбить вал на участки, расположенные между крутящими моментами и определить угол закручивания, а следовательно, и положение образующей на каждом отдельном участке.

На рис. 3, б представлена эпюра крутящих моментов, позволяющая разделить вал на левую и правую части (рис. 3, в г). Очевидно, что в силу симметрии неподвижными сечениями этих частей будут сечения 3 и 4. При этом образующие этих частей примут положения, изображенные на рисунках 3в и 3г. Эпюры углов поворота сечений левой и правой частей представлены сплошными линиями на рисунке 3д. Поскольку вал представляет собой единое целое, левая и правая части должны повернуться навстречу друг другу вместе с сечениями 3 и 4 таким образом, чтобы эпюра углов поворота была непрерывна. Уместно предположить, что для участков вала постоянной жесткости и равной длины мерой деформационной инертности является крутящий момент, поэтому с учетом эпюры крутящих моментов угол поворота левой части вдвое превысит правый, и окончательная эпюра углов поворота примет вид штриховой линии на рис. 3, д. Далее легко графически определить положение неподвижных сечений 5 и 6 (рис. 3, д) и показать окончательное положение образующей (рис. 3, е). При оценке углов поворота поперечных сечений принимается следующая нумерация (рис. 3, в, г):

0 – центральное сечение вала;

1 и 2 – крайние левое и правое сечение вала;

3 и 4 – центральное сечение отдельно рассматриваемых левой и правой частей;

5 и 6 – неподвижные сечения левой и правой части при рассмотрении вала как единого целого.

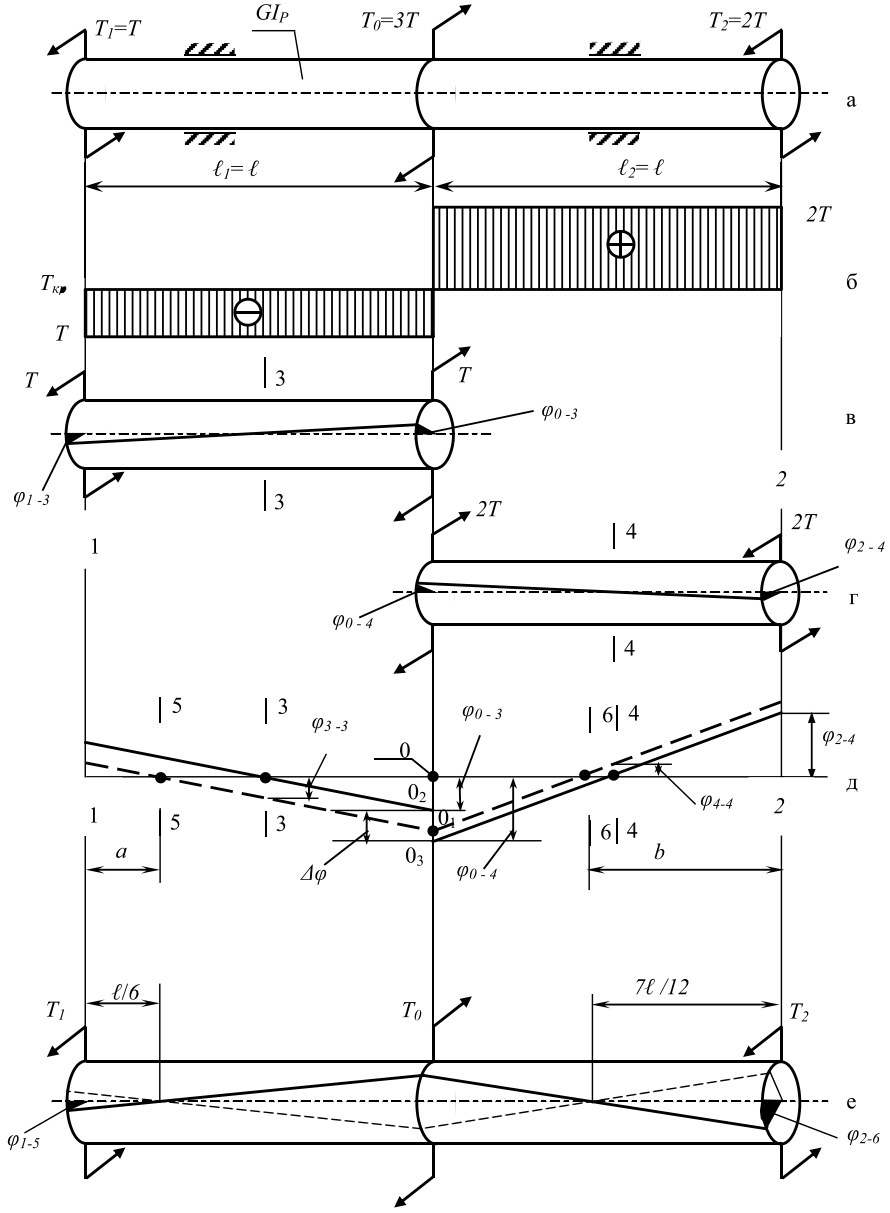

Рис. 3. К расчету на жесткость вала, закрепленного в двух подшипниках

С учетом симметрии углы поворота сечений будут иметь следующие значения:

$$\phi_{1-3} = \phi_{0-3} = \frac{T\ell}{2GI_P};$$

$$\phi_{0-4} = \phi_{2-4} = \frac{T\ell}{GI_P},$$

а

$$\Delta\phi = \phi_{0-4} - \phi_{0-3} = \phi_{3-3} + \phi_{4-4} = \frac{T\ell}{2GI_P},$$

где первый подстрочный индекс указывает номер сечения, которое поворачивается, а второй – номер сечения, относительно которого отсчитывается угол поворота.

В соответствии с предложенной гипотезой левая половина вала повернется навстречу правой на угол:

$$\phi_{3-3} = 2\phi_{4-4} = \frac{T\ell}{3GI_P},$$

следовательно, центральное сечение (сечение 0) всего вала повернется на угол $\varphi_{3\text{-}3}$ вместе с левой половиной и на угол $\varphi_{0\text{-}3}$ относительно середины левой части, т.е. на угол:

$$\phi_{0_1 0} = \phi_{0-3} + \phi_{3-3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{T\ell}{GI_P} = \frac{5T\ell}{6GI_P}.$$

Из подобия треугольников $\Delta 500_1$, и $\Delta 300_2$ следует, что отрезок 5 – 0 состав-

ляет $\frac{5\ell}{6}$, а величина $a=\frac{\ell}{6}$ (рис. 3, д). Аналогично из подобия треугольников $\Delta 0_3 40$, и $\Delta 0_1 60$ следует, что отрезок 0 – 6 составляет $\frac{5\ell}{12}$, а величина $b=\frac{7\ell}{12}$ (рис. 3, д). Окончательные положения неподвижных сечений 5 и 6, а также положение образующей представлены на рис. 1, е.

Все представленные расчеты основаны на предложенной выше гипотезе, которая требует доказательств. Для доказательства предложенной гипотезы используется принцип минимума потенциальной энергии. Очевидно, что, так как под действием приложенных моментов T_0, T_1, T_2 вал находится в равновесии, вся энергия действующих крутящих моментов уходит в упругую деформацию. Поскольку при расчете валов действующие крутящие моменты известны, длины грузовых участков (расстояния между неподвижными сечениями) также определены, не составляет труда вычислить энергию, стремящуюся повернуть вал по U_- и против U_+ часовой стрелки:

$$U_- = \frac{T_1^2(\ell-a)}{2GI_P} + \frac{T_2^2(\ell-b)}{2GI_P} =$$

$$= \frac{T^2 5\ell}{12GI_P} + \frac{4T^2 5\ell}{2\cdot 12GI_P} = \frac{2{,}5T^2\ell}{GI_P},$$

$$U_+ = \frac{T_1^2 a}{2GI_P} + \frac{T_2^2 b}{2GI_P} =$$

$$= \frac{T^2\ell}{12GI_P} + \frac{4T^2 7\ell}{2\cdot 12GI_P} = \frac{2{,}5T^2\ell}{GI_P}.$$

Условие равновесия выполняется, поэтому выдвинутое предположение считаем обоснованным, а сечения 5 и 6 неподвижными.

Очевидно, что в состоянии покоя (до приложения нагрузки) образующая имеет вид горизонтальной штрих-пунктирной линии (рис. 3, е). В рабочем режиме образующая принимает вид сплошной линии (рис. 3, е), а при торможении, что неизбежно, например, в случае реверса, образующая примет вид пунктирной линии, являющейся зеркальным отражением сплошной (рис. 3, е). При этом угол, на который повернется по инерции шкив T_2, составит $\frac{4T\ell}{GI_P}$, если за начало отсчета принять сечение 0. Если за начало отсчета принять сечение 6, то этот угол составит значительно меньшую величину $\frac{7T\ell}{6GI_P}$. Для других шкивов углы поворота, а следовательно, и величины сил инерции, возникающие при пуске и остановке, также будут существенно зависеть от выбора начала отсчета.

Основным результатом выполненной работы является методика определения неподвижных сечений вала постоянной жесткости. Это позволяет уточнить расчет вала на крутильную жесткость, возникающие динамические нагрузки, возможные концентрации напряжений. При расчете ступенчатых валов или валов переменной жесткости расчеты несколько усложняются, но принципиально ничего не изменяется. Следует также отметить, что прослеживается некоторая аналогия между неподвижными сечениями при кручении и нейтральной осью при изгибе.

Список литературы

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. / Н.М. Беляев. – 14-е изд., стер. – М.: Изд-во «Наука», 1965. – 856 с.

2. Детали машин: учебник для вузов / Л.А. Андриенко, Б.А. Байков, И.К. Ганулич и др.; под ред. О.А. Ряховского – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 520 с.

3. Иванов М.Н. Детали машин: учебник для машиностроительных специальностей вузов / М.Н. Иванов, В.А. Финогенов. – 12-е изд. испр. – М.: Высш.шк., 2008. – 408 с.

4. Мамедов А.Ф. Расчет шпоночного соединения / А.Ф. Мамедов // Вестник машиностроения. – 2014. – № 2. – С. 11.

5. Матюхин В.И. Управление комплексной системой при учете ее инерционных свойств. // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – № 3. – С. 10–21.

6. Плеханов В.И. Влияние деформативности центральной шестерни и осей сателлитов планетарной передачи на распределение нагрузки в зубчатом зацеплении. / В.И. Плеханов // Вестник машиностроения. —2015. – № 4. – С. 4.

7. Сметанников О.Ю. Расчет контактного взаимодействия в шлицевом эвольвентном соединении. Упрощение трехмерной контактной задачи / О.Ю. Сметанников, Л.Р. Шаяхметова // Вестник машиностроения. – 2016. – № 2. – С. 8.

8. Соколов-Добрев Н.С. Метод снижения динамической нагруженности силовой передачи гусеничного трактора. / Н.С. Соколов-Добрев и [др.] // Вестник машиностроения. – 2015. – № 6. – С. 2..

9. Степаненко Т.Г. Прочность и жесткость типовых элементов химического оборудования при растяжении, сжатии, кручении и изгибе: методические указания / Т.Г. Степаненко, А.И. Мильченко. – Л., Изд-во ЛТИ им. Ленсовета, 1985. – 32 с.

10. Тимофеев Г.А. Проектирование приводов с волновыми зубчатыми передачами для следящих систем // Вестник машиностроения. – 2015. – № 12. – С. 8.

11. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / В.И. Феодосьев. – 11-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. – 591 с.