

УДК 519.6

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ
С ПРИСТЕННЫМ СКОЛЬЖЕНИЕМ****Барановский Е.С., Артемов М.А.***ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», Воронеж,
e-mail: esbaranovskii@gmail.com*

В статье исследуется математическая модель, описывающая нестационарное движение несжимаемой вязкоупругой жидкости типа Олдройда в трехмерной ограниченной области с твердыми непроницаемыми стенками. В уравнении состояния используется полная производная. Важной особенностью рассматриваемой модели является то, что на границе области течения вместо классического условия прилипания задано условие проскальзывания Навье (свободное проскальзывание). Это условие определяет связь между скоростью скольжения жидкости и силой, действующей на жидкость со стороны межфазной границы «жидкость – твердое тело». Для соответствующей эволюционной задачи вводится понятие обобщенного решения в классе подходящих функциональных пространств и обсуждается алгоритм нахождения решений по методу Фаздо–Галеркина. Основной результат работы – получение аналога теоремы Сэзера–Серрина о единственности, регулярности и энергетической оценке глобального обобщенного решения.

Ключевые слова: математическое моделирование, неньютоновские жидкости, модель Олдройда, эффект проскальзывания, метод Фаздо–Галеркина, глобальное решение, регулярные решения, энергетические оценки

ON A MODEL OF THE MOTION OF A VISCOELASTIC FLUID WITH WALL SLIP**Baranovskii E.S., Artemov M.A.***Voronezh State University, Voronezh, e-mail: esbaranovskii@gmail.com*

This paper is concerned with a mathematical model describing unsteady flows of an incompressible viscoelastic fluid of the Oldroyd kind in a three-dimensional bounded domain with solid impermeable boundaries. In the constitutive law, we use the total derivative. An important feature of the problem under consideration is that Navier's slip law (the free-slip condition) at the solid surface is used instead of the classical no-slip condition. This law gives a relation between the slip velocity and the force acting on the fluid from the interphase boundary of liquid-solid. For the corresponding evolution problem we introduce the concept of generalized solutions in a class of suitable function spaces. The paper discusses an algorithm for finding solutions by the Faedo–Galerkin method. Our main result is an analogue of the Sather–Serrin theorem on the uniqueness, regularity and energy estimates of global generalized solutions.

Keywords: mathematical models, non-Newtonian fluids, the Oldroyd model, the effect of slip, the Faedo–Galerkin method, global solutions, regular solutions, energy estimates

Как известно, многие материалы, используемые на практике, при определенных условиях проявляют текучесть, для которой характерно отклонение от закона трения Ньютона [1]. Для решения задач о течении неньютоновских жидкостей успешно применяется метод математического моделирования, который предполагает построение адекватной математической модели течения и изучение её, например, с помощью реализуемых на компьютерах вычислительных алгоритмов. При этом требуется тщательное обоснование используемых алгоритмов. Такое обоснование тесно связано с изучением качественных свойств модели, в том числе с рассмотрением вопросов о существовании, единственности и регулярности решений соответствующей гидродинамической задачи.

В настоящей статье исследуется одна математическая модель, описывающая движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда [11] в трёхмерной ограниченной области с непроницаемыми стенками. В уравнении состояния Олдройда используется полная

производная. Важной особенностью рассматриваемой модели является то, что на границе области течения вместо классического условия прилипания задано условие проскальзывания Навье (обзор основных краевых условий, которые используются в механике жидкостей, приводится в [5]). Это условие определяет связь между скоростью скольжения жидкости и силой, действующей на жидкость со стороны межфазной границы «жидкость – твердое тело».

Следуя подходу Ж. Лерэ, мы вводим понятие обобщенного решения для соответствующей эволюционной задачи в классе подходящих функциональных пространств. Переход от классической постановки задачи к обобщенной постановке обусловлен тем, что при естественных ограничениях на данные модели, когда обобщенные решения могут быть сравнительно легко получены, классическое решение может и не существовать. В работе обсуждается алгоритм нахождения решений по методу Фаздо–Галеркина.

Основной результат работы представлен в разделе 3, где сформулирована и доказана теорема о единственности, регулярности и энергетической оценке глобального, т.е. заданного на заранее выбранном промежутке времени $[0, T]$, обобщенного решения. Эта теорема обобщает известные результаты Дж. Сэзера и Дж. Серрина [12] для трёхмерных эволюционных уравнений Навье–Стокса. Как и в случае системы Навье–Стокса, единственность решения начально-краевой задачи для модели Олдройда удастся установить в классе, более узком, чем пространство, для которого известно существование решений. Тем не менее, полученные результаты демонстрируют связь между регулярностью и единственностью, а также дают возможность определить энергетические оценки решений.

Модель движения вязкоупругой жидкости в ограниченной области

Рассматривается математическая модель, описывающая движение несжимаемой вязкоупругой среды типа Олдройда в ограниченной трёхмерной области Ω с неподвижной непроницаемой границей Γ класса C^2 при краевом условии проскальзывания Навье:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{(1-\alpha)\eta}{2} \Delta \mathbf{v} - \operatorname{Div} \mathbf{S} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{в } Q_T, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & \text{в } Q_T, \\ \mathbf{S} + \lambda \frac{D\mathbf{S}}{Dt} = \alpha \eta \mathbf{E}(\mathbf{v}) & \text{в } Q_T, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{на } \Gamma_T, \\ k\mathbf{v} = -[(\mathbf{S} + (1-\alpha)\eta \mathbf{E}(\mathbf{v}))\mathbf{n}]_{\tan} & \text{на } \Gamma_T, \\ \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{S}(\cdot, 0) = \mathbf{S}_0 & \text{в } \Omega, \end{array} \right. \quad (\text{A})$$

где $Q_T = \Omega \times (0, T)$ – пространственно-временной цилиндр с $T > 0$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – скорость, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ – упругая часть избыточных напряжений, $p = p(\mathbf{x}, t)$ – давление, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{v})$ – тензор скоростей деформации, $\mathbf{E}(\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)/2$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ – плотность внешних сил, D/Dt – полная (субстанциональная) производная,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

η , λ и α – положительные постоянные (η – вязкость, λ – время релаксации, $\alpha = 1 - \lambda^{-1}k$ – параметр ретардации, где k – время запаздывания, $0 < k < \lambda$), $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ – единичный вектор внешней нормали к Γ , $k = k(\mathbf{x})$ – коэффициент проскальзывания, $k(\mathbf{x}) > 0$, $[\cdot]_{\tan}$ – касательная составляющая вектора. Символы $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{S}_0$

обозначают соответственно поле скоростей и упругую часть избыточных напряжений при $t = 0$. Более подробное описание указанных физических величин приводится в [1].

Рассмотренную в этом разделе начально-краевую задачу для краткости будем называть **задачей (А)**. Неизвестными в системе (А) являются вектор-функции $\mathbf{v}$, $\mathbf{S}$ и функция p , а все остальные величины считаются заданными.

Обобщённая постановка задачи

Ниже мы будем использовать пространства Лебега и Соболева. Определения и свойства этих пространств систематически изложены в [8]. Скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $(\cdot, \cdot)$ и $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$ соответственно. Положим,

$$U(\Omega) = \{\mathbf{u} \in C^\infty(\bar{\Omega}) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0\},$$

$$X(\Omega) = \text{замыкание } U(\Omega) \text{ в } \mathbf{H}^1(\Omega),$$

$$Y(\Omega) = \{\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \operatorname{supp} \mathbf{u} \subset \Omega\},$$

$$\mathbf{H}(\Omega) = \text{замыкание } Y(\Omega) \text{ в } L_2(\Omega).$$

Предполагая, что функция k принадлежит пространству $L_\infty(\Gamma)$ и $k(\mathbf{x}) > k_0 > 0$, введем скалярное произведение в $X(\Omega)$ по следующей формуле:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w})_X = (1-\alpha)\eta(\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{E}(\mathbf{w})) + (\sqrt{k}\mathbf{u}, \sqrt{k}\mathbf{w})_{\Gamma}.$$

Из неравенства Корна следует, что норма, соответствующая этому скалярному произведению, эквивалентна норме, наследованной из пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Следуя [6], будем отождествлять пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ с его сопряженным: $\mathbf{H}^*(\Omega) \equiv \mathbf{H}(\Omega)$. Поэтому имеем цепочку вложений: $X(\Omega) \subset \mathbf{H}(\Omega) \equiv \mathbf{H}^*(\Omega) \subset X^*(\Omega)$.

Пусть $C_w([0, T]; \mathbf{H}(\Omega))$ – пространство слабо непрерывных функций $\mathbf{u}: [0, T] \rightarrow \mathbf{H}(\Omega)$.

Наконец, обозначим через $\mathbf{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3}$ пространство симметрических 3×3 -матриц.

Теперь мы можем сформулировать определение обобщенного решения задачи (А). Пусть

$$\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}(\Omega), \mathbf{S}_0 \in L_2(\Omega), \mathbf{f} \in L_2(0, T; L_2(\Omega)).$$

Определение. Обобщенным решением задачи (А) назовем пару вектор-функций

$$\mathbf{v}: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{S}: \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3},$$

такую, что

$$\mathbf{v} \in L_2(0, T; X(\Omega)) \cap C_w([0, T]; \mathbf{H}(\Omega)),$$

$$\mathbf{S} \in L_2(0, T; L_2(\Omega)) \cap C_w([0, T]; L_2(\Omega)),$$

выполнены начальные условия: $\mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0$ и $\mathbf{S}(\cdot, 0) = \mathbf{S}_0$, а также следующие равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \Phi) - \sum_{i=1}^3 \left(v_i \mathbf{v}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + (1 - \alpha) \eta(\mathbf{E}(\mathbf{v}), \mathbf{E}(\Phi)) \\ + (\mathbf{S}, \mathbf{E}(\Phi)) + (k \mathbf{v}, \Phi)_\Gamma = (\mathbf{f}, \Phi) \quad \forall \Phi \in \mathbf{X}(\Omega), \\ (\mathbf{S}, \Phi) + \lambda \frac{d}{dt}(\mathbf{S}, \Phi) - \lambda \sum_{i=1}^3 \left(\mathbf{S}, v_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \\ = \alpha \eta(\mathbf{E}(\mathbf{v}), \Phi) \quad \forall \Phi \in \mathbf{H}^2(\Omega) \end{aligned}$$

в смысле распределений на $(0, T)$.

Замечание 1. Определение обобщенного решения задачи (А) в целом соответствует восходящей к работам Ж. Лерэ концепции слабых, или турбулентных, решений уравнений Навье–Стокса, которые с предельной тщательностью обсуждаются в фундаментальных трактатах О.А. Ладыженской [4] и Р. Темама [6].

Замечание 2. Как обычно, при рассмотрении обобщенных решений гидродинамических уравнений из определения решения «выпадает» давление p , которое после нахождения остальных неизвестных определяется с помощью результатов де Рама (см., например, [6, гл. I]).

Замечание 3. Для построения обобщенного решения может быть использован метод Фаздо–Галеркина. Приведем основную идею данного метода. В подходящем функциональном пространстве выбирается базис. Затем вводится приближенное решение, которое записывается в виде суммы первых m базисных функций с коэффициентами, зависящими от t . Использование приближенных решений позволяет свести исходную начально-краевую задачу к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой не представляет существенных сложностей. Используя энергетические оценки и теоремы о компактности, можно выделить из последовательности приближенных решений подпоследовательность, которая сходится при $m \rightarrow \infty$ к решению исходной задачи. На основе приведенной выше схемы в [7, 9] строятся решения различных типов начально-краевых задач для модели Олдройда; ряд стационарных задач о течении жидкости Олдройда рассмотрен в работах [2, 3, 10].

Основной результат работы

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{L}_8(0, T; \mathbf{L}_4(\Omega)), \\ \mathbf{M}_2 &= \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{W}_4^1(\Omega)) \cap \mathbf{L}_{8/3}(0, T; \mathbf{L}_4(\Omega)). \end{aligned}$$

Теорема. Пусть пара вектор-функций $(\mathbf{v}, \mathbf{S})$ – обобщенное решение задачи (А), принадлежащее классу $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2$. Тогда это решение (если оно существует) единственно в классе $\mathbf{M}$, удовлетворяет включениям

$$\mathbf{v} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}(\Omega)), \quad \mathbf{S} \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega))$$

и энергетической оценке

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + 2(1 - \alpha) \eta \int_0^t \|\mathbf{E}(\mathbf{v}(\tau))\|_{\mathbf{L}_2}^2 d\tau \\ + 2 \int_0^t \int_\Gamma k \|\mathbf{v}(\tau)\|_{\mathbf{R}^3}^2 d\Gamma d\tau \\ + 2(\alpha \eta)^{-1} \int_0^t \|\mathbf{S}(\tau)\|_{\mathbf{L}_2}^2 d\tau + \lambda(\alpha \eta)^{-1} \|\mathbf{S}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \\ = 2 \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau + \|\mathbf{v}_0\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \lambda(\alpha \eta)^{-1} \|\mathbf{S}_0\|_{\mathbf{L}_2}^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{v}_1, \mathbf{S}_1)$ и $(\mathbf{v}_2, \mathbf{S}_2)$ – обобщенные решения из класса $\mathbf{M}$. Покажем, что $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ и $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$.

Проверим сначала, что

$$\mathbf{v}'_i \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{X}^*(\Omega)), \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Введем операторы:

$$\mathbf{A} : \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}^*(\Omega),$$

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = -(1 - \alpha) \eta(\mathbf{E}(\mathbf{v}), \mathbf{E}(\mathbf{w})) - (k \mathbf{v}, \mathbf{w})_\Gamma,$$

$$\mathbf{B} : \mathbf{X}(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}^*(\Omega),$$

$$\langle \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^3 \left(v_i \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_i} \right),$$

$$\mathbf{G} : \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}^*(\Omega),$$

$$\langle \mathbf{G}(\mathbf{S}), \mathbf{w} \rangle = -(\mathbf{S}, \mathbf{E}(\mathbf{w})).$$

Из определения обобщенного решения следует, что

$$\mathbf{v}'_i = \mathbf{A}(\mathbf{v}_i) + \mathbf{B}(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) + \mathbf{G}(\mathbf{S}_i) + \mathbf{f}.$$

Очевидно, что имеют место включения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_i), \mathbf{G}(\mathbf{S}_i), \mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(0, T; \mathbf{X}^*(\Omega)). \quad (2)$$

Покажем, что

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}_i) \in \mathbf{L}_4(0, T; \mathbf{X}^*(\Omega)). \quad (3)$$

Используя неравенство Гёльдера, находим, что

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{B}(\mathbf{v}_i(t), \mathbf{v}_i(t)), \Phi \rangle| \\ \leq C_1 \|\mathbf{v}_i(t)\|_{\mathbf{L}_4}^2 \|\Phi\|_{\mathbf{X}}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже через C_i , $i = 1, 2, \dots$, обозначаются константы. Из полученной оценки и условий теоремы следует включение (3), которое вместе с (2) влечет (1).

Докажем теперь, что

$$\mathbf{S}'_i \in \mathbf{L}_2(0, T; [\mathbf{H}^1(\Omega)]^*), i = 1, 2. \quad (4)$$

Введем операторы:

$$\mathbf{K} : \mathbf{L}_2(\Omega) \rightarrow [\mathbf{H}^1(\Omega)]^*,$$

$$\langle \mathbf{K}(\mathbf{S}), \Phi \rangle = -\lambda^{-1}(\mathbf{S}, \Phi),$$

$$\mathbf{Q} : \mathbf{X}(\Omega) \times \mathbf{L}_4(\Omega) \rightarrow [\mathbf{H}^1(\Omega)]^*,$$

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{v}, \mathbf{S}), \Phi \rangle = \sum_{i=1}^3 \left(v_i \mathbf{S}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right),$$

$$\mathbf{N} : \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow [\mathbf{H}^1(\Omega)]^*,$$

$$\langle \mathbf{N}(\mathbf{v}), \Phi \rangle = \alpha \eta \lambda^{-1}(\mathbf{E}(\mathbf{v}), \Phi).$$

Из определения обобщенного решения следует, что

$$\mathbf{S}'_i = \mathbf{Q}(\mathbf{v}_i, \mathbf{S}_i) + \mathbf{K}(\mathbf{S}_i) + \mathbf{N}(\mathbf{v}_i).$$

Очевидно, что

$$\mathbf{K}(\mathbf{S}_i), \mathbf{N}(\mathbf{v}_i) \in \mathbf{L}_2(0, T; [\mathbf{H}^1(\Omega)]^*). \quad (5)$$

Используя неравенство Гёльдера, получаем, что

$$\begin{aligned} & |\langle \mathbf{Q}(\mathbf{v}_i(t), \mathbf{S}_i(t)), \Phi \rangle| \\ & \leq C_2 \|\mathbf{S}_i(t)\|_{\mathbf{L}_4} \|\mathbf{v}_i(t)\|_{\mathbf{L}_4} \|\Phi\|_{\mathbf{H}^1}, \end{aligned}$$

откуда, с учетом условий теоремы, вытекает, что

$$\mathbf{Q}(\mathbf{v}_i, \mathbf{S}_i) \in \mathbf{L}_2(0, T; [\mathbf{H}^1(\Omega)]^*).$$

Это включение вместе с (5) влечет выполнение (4).

Принимая во внимание (1), (4) и применяя лемму 1.2 из [6, гл. III], получаем, что

$$\mathbf{v}_i \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{H}(\Omega)), i = 1, 2,$$

$$\mathbf{S}_i \in \mathbf{C}([0, T]; \mathbf{L}_2(\Omega)), i = 1, 2$$

и п.в. на $[0, T]$ выполнены равенства:

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle, \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 = 2\langle \mathbf{F}'(t), \mathbf{F}(t) \rangle, \quad (7)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ и $\mathbf{F} = \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2$. Так как $(\mathbf{v}_1, \mathbf{S}_1)$ и $(\mathbf{v}_2, \mathbf{S}_2)$ – обобщенные решения задачи (A), то нетрудно вывести равенства:

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{u}', \Phi \rangle - \sum_{i=1}^3 \left(v_{1i} \mathbf{u}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \\ & - \sum_{i=1}^3 \left(u_i \mathbf{v}_2, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + (\mathbf{F}, \mathbf{E}(\Phi)) \\ & + (1 - \alpha) \eta (\mathbf{E}(\mathbf{u}), \mathbf{E}(\Phi)) + (k \mathbf{u}, \Phi)_\Gamma = 0, \\ & (\mathbf{F}, \Phi) + \lambda \langle \mathbf{F}', \Phi \rangle - \lambda \sum_{i=1}^3 \left(u_i \mathbf{S}_1, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \\ & - \lambda \sum_{i=1}^3 \left(v_{2i} \mathbf{F}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) = \alpha \eta (\mathbf{E}(\mathbf{u}), \Phi). \end{aligned}$$

Полагая $\Phi = \mathbf{u}(t)$, $\Phi = (\alpha \eta)^{-1} \mathbf{F}(t)$ и складывая полученные равенства, с учетом (6), (7) находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 - \sum_{i=1}^3 \left(u_i(t) \mathbf{v}_2(t), \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_i} \right) \\ & + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}}^2 + (\alpha \eta)^{-1} \|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \\ & + \frac{(\alpha \eta)^{-1} \lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \\ & - (\alpha \eta)^{-1} \lambda \sum_{i=1}^3 \left(u_i(t) \mathbf{S}_1(t), \frac{\partial \mathbf{F}(t)}{\partial x_i} \right) = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Применяя неравенства Гёльдера, Юнга и теоремы о вложении пространств Соболева, находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^3 \left(u_i(t) \mathbf{v}_2(t), \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial x_i} \right) \right| \\ & \leq C_3 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_4} \|\mathbf{v}_2(t)\|_{\mathbf{L}_4} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}} \\ & \leq C_4 \|\mathbf{v}_2(t)\|_{\mathbf{L}_4} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^{1/4} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}}^{7/4} \\ & = \left(C_5 \|\mathbf{v}_2(t)\|_{\mathbf{L}_4}^8 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \right)^{1/8} \left(\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}}^2 \right)^{7/8} \\ & \leq C_6 \|\mathbf{v}_2(t)\|_{\mathbf{L}_4}^8 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2 + \frac{7}{8} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}}^2. \quad (9) \end{aligned}$$

Нам потребуется также следующая оценка:

$$\begin{aligned} & (\alpha \eta)^{-1} \left| \sum_{i=1}^3 \left(u_i(t) \mathbf{S}_1(t), \frac{\partial \mathbf{F}(t)}{\partial x_i} \right) \right| \\ & = (\alpha \eta)^{-1} \left| \sum_{i=1}^3 \left(u_i(t) \frac{\mathbf{S}_1(t)}{\partial x_i}, \mathbf{F}(t) \right) \right| \\ & \leq C_7 \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}} \|\mathbf{S}_1(t)\|_{\mathbf{W}_4^1} \|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbf{L}_2} \\ & \leq \frac{1}{8} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{X}}^2 + 2C_7^2 \|\mathbf{S}_1(t)\|_{\mathbf{W}_4^1}^2 \|\mathbf{F}(t)\|_{\mathbf{L}_2}^2. \quad (10) \end{aligned}$$

С учетом (9) и (10), мы выводим из равенства (8) следующую оценку:

$$\frac{d}{dt} \left(\| \mathbf{u}(t) \|_{L_2}^2 + \| \mathbf{F}(t) \|_{L_2}^2 \right) \leq C_8 \xi(t) \left(\| \mathbf{u}(t) \|_{L_2}^2 + \| \mathbf{F}(t) \|_{L_2}^2 \right).$$

с функцией

$$\xi(t) = \| \mathbf{v}_2(t) \|_{L_4}^8 + \| \mathbf{S} \|_{W_4^1}^2, \xi \in L_1(0, T).$$

Поскольку $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ и $\mathbf{S}(0) = \mathbf{0}$, то, применяя лемму Гронуолла–Беллмана, получаем, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. Таким образом, мы установили, что в классе $\mathbf{M}$ не может быть более одного обобщенного решения задачи (A). Из приведенного выше доказательства видно, что если такое обобщенное решение существует, то оно принадлежит пространству $C([0, T]; \mathbf{H}(\Omega)) \times C([0, T]; L_2(\Omega))$. Энергетическая оценка обобщенного решения выводится аналогично оценке (8) с последующим интегрированием в пределах от 0 до t .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-00182 мол_а.

Список литературы

1. Астарита Дж., Маруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 312 с.

2. Барановский Е.С. О стационарном движении вязкоупругой жидкости типа Олдройда // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, № 6. – С. 3–16.

3. Барановский Е.С. Задача оптимального управления стационарным течением среды Джеффриса при условии проскальзывания на границе // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 18–27.

4. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, 2-е изд. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

5. Раджагопал К.Р. О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // Успехи математических наук. – 2003. – Т. 58, № 2. – С. 111–121.

6. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.

7. Турганбаев Е.М. Начально-краевые задачи для уравнений вязкоупругой жидкости типа Олдройда // Сибирский математический журнал. – 1995. – Т. 36, № 2. – С. 444–458.

8. Adams R.A., Fournier J.J.F., Sobolev Spaces, vol. 40 of Pure and Applied Mathematics. Amsterdam: Academic Press, 2003. – 305 p.

9. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Initial boundary value problems for viscoelastic Jeffreys fluids // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, № 121. – P. 6049–6060.

10. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Mixed boundary-value problems for motion equations of a viscoelastic medium // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, № 252. – P. 1–9.

11. Saut J.-C. Lectures on the mathematical theory of viscoelastic fluids // Morningside Lectures in Mathematics, Volume III. Lectures on the Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations: Part 3. Somerville, Massachusetts: International Press, 2013. – P. 325–393.

12. Serrin J. The initial value problem for the Navier–Stokes equations // Non-linear Problems, R. E. Langer editor. – University of Wisconsin Press, 1963. – P. 69–98.