УДК 519.635.6

ПРИМЕНЕНИЕ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССАХ

Ефимова Г.Ф.

Филиал ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»,
Стерлитамак, e-mail: Dohle_e@mail.ru

Основным направлением работы является изучение температурных эффектов, возникающих при движении вязкой жидкости в пористой среде в нестационарных полях давления. Попытка учета теплопроводности приводила к необходимости решения дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Примером такого процесса является фильтрация нефти в природных пластах. Рассматриваются возможные упрощения для распределения давления, позволяющие получить аналитические решения задачи с учетом теплопроводности. Одним из возможных упрощений является применение метода последовательной смены стационарных состояний с использованием автомодельности. Получены аналитические решения задач об изменении температуры при колебательном движении жидкости в горизонтальном теплоизолированном пористом стержне, которые показывают, что колебательное движение жидкости в пористой среде приводит к ее монотонному разогреву. Результаты расчетов температурных эффектов по полученным зависимостям удовлетворительно согласуются с экспериментом и могут быть использованы при дальнейшей разработке теории баротермического эффекта.

Ключевые слова: температура, теплопроводность, вязкая жидкость, давление, пористая среда, автомодельность

THE USE OF SELF-SIMILARITY FOR THE SOLUTION OF NON-LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM ON TEMPERATURE PROCESSES

Efimova G.F.

Branch Ufa State Aviation Technical University, Sterlitamak, e-mail: Dohle_e@mail.ru

The main work area is studying of temperature effects arising when viscous fluid flows in a porous medium in dynamic pressure fields. The attempt of heat conductivity accounting resulted in need of the second order differential equations with variable coefficients solution. Example of such process is the oil filtration in natural layers. The possible simplifications for pressure profile allowing receiving analytical solutions of a task taking into account heat conductivity are considered. One of possible simplifications is application of stationary states with self-similarity use serial change method. Analytical problem solving about change of temperature at oscillating motion of fluid in the horizontal heat isolated porous core is received, which shows that oscillating motion of fluid in a porous medium leads to its monotonic warming up. Temperature effects on the received dependences calculations results are well coordinated with experiment and can be used at further development of the barothermic effect theory.

Keywords: temperature, heat conductivity, viscous fluid, pressure, porous medium, self-similarity

Многие прикладные задачи, с которыми сталкиваются инженеры, физики и специалисты по прикладной математике, не поддаются точному решению. Нелинейность уравнений движения, переменные коэффициенты, нелинейность граничных условий на известных или неизвестных границах сложной формы – причины, за-

трудняющие точное решение, в частности, температурных задач.

Рассмотрим процесс движения вязкой жидкости в пористой среде в нестационарных полях давления. Система уравнений, описывающих температурные процессы, в этом случае, имеет вид

$$m_i s_i \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} + \rho_i c_i \bar{v}_i \text{grad } T_i = \text{div}(m_i s_i \lambda_i \text{grad } T_i) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} (T_j - T_i) + m_i s_i \rho_i c_i \eta_i \frac{\partial P_i}{\partial t} - \rho_i c_i \varepsilon_i \bar{v}_i \text{grad } P_i + \rho_i c_i \eta_i \bar{g} \bar{v}_i; \quad (1)$$

$$\bar{v}_i = -\frac{k}{\mu} f_i(s) [\text{grad } P_i - \rho_i \bar{g}]; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i s_i m_i) + \text{div}(\rho_i \bar{v}_i) = 0. \quad (3)$$

Если рассматривается движение жидкости с данным полем скорости [1], то уравнение (1) несколько видоизменяется. В наиболее простом случае, когда скорость фильтрации

$$\vec{v}_i(t) = m_i s_i \vec{V}_i,$$

где $\vec{V}_i$ – истинная скорость i -й компоненты, является только функцией времени и не зависит от пространственных координат, из (3) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i s_i m_i) + \vec{v}_i \text{grad } \rho_i = 0. \quad (4)$$

$$m_i s_i \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} + \rho_i c_i \vec{v}_i \text{grad } T_i = \text{div}(m_i s_i \lambda_i \text{grad } T_i) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} (T_j - T_i) + \vec{v}_i \text{grad } P_i + \rho_i c_i \eta_i \vec{g} \vec{v}_i. \quad (7)$$

Для горизонтального движения жидкости $\vec{g} \vec{v}_i = 0$. Полагая для простоты движение однокомпонентным, подставим $\text{grad } P$ из (2) в (7):

$$m_i s_i \rho_i c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} + \rho_i c_i \vec{v}_i \text{grad } T_i = \text{div}(m_i s_i \lambda_i \text{grad } T_i) + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} (T_j - T_i) + \frac{\mu}{k} V^2. \quad (8)$$

Последнее слагаемое учитывает эффект диссипации кинетической энергии жидкости, поскольку выражение $\mu \vec{v} / k\rho$ описывает силу трения, а его произведение на $\vec{v}$ – мощность силы трения.

Рассмотрим задачу об изменении температуры при колебательном движении жидкости в горизонтальном теплоизолированном пористом стержне. Будем считать температуры скелета пористой среды и насыщающей жидкости одинаковыми. Начальную температуру стержня примем за начало отсчета температуры. Математическая постановка задачи в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{c_{\text{ж}}}{c_{\text{н}}} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \left[\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} \right] - \eta m \frac{c_{\text{ж}}}{c_{\text{н}}} \frac{\partial P}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0; \quad (9)$$

$$T|_{t=0} = 0; \quad T|_{x \rightarrow \infty} = 0; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_1} = 0, \quad (11)$$

где x_1 – граница зоны температурных возмущений.

Рассмотрим возможные упрощения для распределения давления, позволяющие получить аналитические решения задачи с учетом теплопроводности. Одним из возможных упрощений является применение метода последовательной смены стационарных состояний с использованием автомодельности [4, 6]. Распределение давления в этом случае описывается в виде зависимости с подвижной правой границей:

$$P = P_0 \frac{x}{R} \gamma (0 < x < R) + P_0 \Theta(x - R); \quad R = 2\sqrt{\kappa t}. \quad (12)$$

После введения автомодельной переменной $z = x / (2\sqrt{\kappa t})$ зависимость (12) преобразуется к виду

$$P = P_0 z \gamma (0 < z < 1) + P_0 \Theta(x - 1), \quad (13)$$

где $\gamma(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ верно} \\ 0, & \text{если } A \text{ ложно} \end{cases}$ – единичная функция; $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда,

а задача (9)–(11) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \left(\frac{2k}{a} z + \frac{c_{\text{ж}}}{c_{\text{н}}} \frac{k}{\mu a} \frac{\partial P}{\partial z} \right) \frac{\partial T}{\partial z} - \varepsilon \frac{c_{\text{ж}}}{c_{\text{н}}} \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 + \eta m \frac{c_{\text{ж}}}{c_{\text{н}}} \frac{2k}{a} z \frac{\partial P}{\partial z} = 0; \quad 0 < z < 1; \quad (14)$$

Для линеаризованного уравнения состояния баротропной жидкости

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha(P - P_0)). \quad (5)$$

При постоянных $m_i s_i$ уравнение неразрывности преобразуется к виду

$$m_i s_i \rho_0 \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 \vec{v}_i \text{grad } P = 0. \quad (6)$$

Подставив $\partial P / \partial t$ из уравнения (6) в (1), получим

$$T|_{z \rightarrow \infty} = 0; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=z_1} = 0. \quad (15)$$

Решение задачи (14), (15) представляется в виде

$$T = \int_1^z dl \int_1^l \left(-\varepsilon \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu a} \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{2k}{a} y \frac{\partial P}{\partial y} \right) \times \\ \times \exp \left(\frac{k}{a} (y^2 - l^2) + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu a} (P(y) - P(l)) \right) dy. \quad (16)$$

При $a = 0$ с использованием выражения для δ -функции в виде

$$\delta(\alpha) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \exp \left(-\frac{\alpha}{a} \right) \quad (17)$$

получим

$$T(z) = \int_1^z \left(-\varepsilon \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} \left(\frac{dP}{dl} \right)^2 + \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} l \frac{dP}{dl} \right) \cdot \left(l + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} \frac{dP}{dl} \right)^{-1} dl, \quad 0 < z < 1. \quad (18)$$

Можно убедиться, что выражение (18) является точным решением задачи (9)–(11) для случая $a = 0$ [2].

После подстановки (13) в (16) получим следующее выражение для расчета температуры:

$$T = \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} P_0 (z-1) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{a}{\kappa} \left\{ \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{a}} \left(z + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} P_0 \right) \right) - \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{a}} \left(1 + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} P_0 \right) \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \sqrt{\frac{\kappa}{a}} P_0 \exp \left(\frac{\kappa}{a} \left(1 + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} P_0 \right) \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu a} P_0^2 \left(\eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} + \varepsilon \right) \right\} - \\ - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu a} P_0^2 \left(\eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} + \varepsilon \right) \cdot \int_{1 + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} P_0}^{z + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} P_0} \exp \left(-\frac{\kappa}{a} q^2 \right) \operatorname{erfi} \left(\sqrt{\frac{\kappa}{a}} q \right) dq; \\ 0 < z < 1; \quad q = l + \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{2\mu\kappa} P_0. \quad (19)$$

Рассмотрим случай фильтрации, когда $u(t)$ является произвольной функцией от времени

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u(t) \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (20)$$

$$T|_{t=0} = T_0(x). \quad (21)$$

Построим фундаментальное решение уравнения (20) при $\varepsilon = 0$ и $\eta = 0$

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - u(t) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}; \quad t > t', \quad -\infty < x < \infty, \quad T|_{t=t'} = \delta(x-x'). \quad (22)$$

Пусть $\hat{T}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\xi x) \hat{T}(t, x) dx$.

Тогда задача (22) сведется к следующей задаче:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} [a\xi^2 - iu(t)\xi] \hat{T} = 0; \quad \hat{T}|_{t=t'} = \exp(-i\xi x').$$

Решение задачи (22) имеет вид

$$\hat{T}(t, \xi) = \exp \left\{ \left[-\int_{t'}^t (a\xi^2 + iu(s)\xi) ds \right] - i\xi x' \right\}.$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим решение задачи (22) в виде

$$T = \Gamma(t, x, t', x') = \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{\left[x - x' - \int_{t'}^t u(s) ds \right]^2}{4a(t-t')} \right\}. \quad (23)$$

Введем стандартизирующую функцию

$$\omega(t, x) = T_0(x) - \varepsilon u(t) \frac{\partial P(t, x)}{\partial x} + \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (24)$$

Тогда при $T_0(x) = 0$

$$\begin{aligned} T(t, x) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t, x, t', x') \omega(t', x') dx' dt' = \\ &= - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a(t-t')}} \exp \left\{ -\frac{\left[x - x' - \int_{t'}^t u(s) ds \right]^2}{4a(t-t')} \right\} \left[\varepsilon \frac{\partial P}{\partial x'} u(t') - \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial t} \right] dx' dt'. \end{aligned} \quad (25)$$

При $a \rightarrow 0$ с учетом того, что $\sqrt{\pi} \delta(\alpha) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \exp \left(-\frac{\alpha^2}{a} \right)$, получим из (25)

$$T(x, t) = \varepsilon \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu} \int_0^t \left(\frac{\partial P}{\partial x'} \right)^2 dt' - \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{k}{\mu} \int_0^t \left(\frac{\partial P \left(t', x - \int_{t'}^t u(s) ds \right)}{\partial t'} \right) dt'. \quad (26)$$

Для периодического движения жидкости с заданным полем скорости распределение давления описывается следующим выражением:

$$P(x, t) = \frac{P_0}{l} x \sin \omega t. \quad (27)$$

Для этого случая получим из (26)

$$T = \varepsilon_{\sigma} \beta \left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right] + \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}} \frac{P_0 x}{l} \sin \omega t, \quad (28)$$

где $\varepsilon_{\sigma} = \varepsilon + \eta m \frac{c_{ж}}{c_{п}}$; $\beta = \frac{c_{ж}}{2c_{п}} \frac{k}{\mu} \frac{P_0^2}{l^2}$.

После усреднения по периоду $\tau' = 2\pi / \omega$ из (28) следует

$$\langle T(x, t) \rangle = \frac{c_{ж}}{2c_{п}} \frac{k}{\mu} \frac{P_0^2}{l^2} \varepsilon_{\sigma} t = A^2 \frac{\mu}{2k} \frac{c_{п}}{c_{ж}} \varepsilon_{\sigma} t. \quad (29)$$

Из полученного выражения видно, что колебательное движение жидкости в пористой среде приводит к ее монотонному разогреву. Необходимо отметить, что результаты расчетов температурных эффектов по полученным зависимостям удовлетворительно согласуются с экспериментом [3, 5]. Увеличение температуры происходит не только за счет эффекта

Джоуля – Томсона, который по своей природе необратим, но и за счет обратимого адиабатического эффекта. Однако явление нарастания температуры со временем не противоречит обратимости адиабатического эффекта. Его природу легко понять, имея в виду, что жидкость или газ всегда движутся в сторону уменьшения давления. Отмеченная закономерность может быть использована для осуществления нагрева пористых сред.

Обозначения

T – температура; a – температуропроводность; λ – теплопроводность; ε – коэффициент Джоуля – Томсона; η – адиабатический коэффициент; α – коэффициент термического расширения жидкости; $\bar{v}$ – скорость фильтрации объем; m_i – пористость; k – проницаемость среды; μ_i – динамический коэффициент вязкости i -й компоненты; $c_{ж}$ – объемная теплоемкость жидкости; c_n – объемная

теплоемкость насыщенной пористой среды; ρ_i – плотность i -й компоненты; s_i – насыщенность i -й компоненты; u – конвективная скорость; t – время; κ – коэффициент пьезопроводности.

Список литературы

1. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра. 1984. – С. 211.
2. Ефимова Г.Ф., Шмелёва Н.Г. О применении интегрального представления при решении краевых задач // Прикладная физика и математика. Прикладная математика. – М.: Научтехлитиздат, 2014. – № 2. – С. 57–64.
3. Филиппов А.И. Скважинная термометрия переходных процессов. – Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1989. – С. 116.
4. Чарный И.А. Метод последовательной смены стационарных состояний и его приложения к задачам нестационарной фильтрации жидкостей и газов // Известия АН СССР. – 1949. – № 3. – С. 323–342.
5. Чекалюк Э.Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. – С. 236.
6. Filippov, A.I., Efimova, G.F. The Theory of Barothermic Effect in Liquids with Due Regard for the Heat Conductivity in the One-Dimensional Case // High Temperature. – 1997. – Vol. 35, № 4. – P. 549–552.