УДК 519.6

ВЛИЯНИЕ ЭФФЕКТА ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ПРОЦЕСС РАСТЕКАНИЯ КАПЛИ

Канчукоев В.З., Тхамоков М.Б., Шортаева Э.А.

ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», Нальчик, e-mail: bsk@kbsu.ru

В работе предложена математическая модель гравитационного растекания двумерной капли вязкой жидкости по горизонтальной поверхности твердого тела с учетом эффекта проскальзывания и получено приближенное аналитическое решение задачи. Решение исследуемой задачи найдено с использованием квазистационарного подхода, который позволяет свести нелокальную задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с неклассическим интегральным условием. Для оценки полученного приближенного решения модельной задачи проведен сравнительный анализ с известным автомодельным решением двумерной задачи растекания капли вязкой жидкости с условием прилипания. Показано, что несмотря на некоторое отличие форм поверхности капли в указанных решениях, основные характеристики процесса оказываются схожими. В обоих подходах периферийная часть капли со временем перемещается по степенному закону, и эти зависимости количественно незначительно отличаются числовыми множителями.

Ключевые слова: растекание, капля, сингулярность, эффект проскальзывания, нелинейная модельная задача, квазистационарный подход, приближенное решение

EFFECT OF SLIPPAGE ON THE PROCESS OF SPREADING OF THE DROP

Kanchukoev V.Z., Tkhamokov M.B., Shortaeva E.A.

Kabardino-Balkaria State University Kh.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: bsk@kbsu.ru

The paper presents a mathematical model of the gravitational spreading of the two-dimensional viscous drop on the horizontal surface of the solid considering slippage effect and an approximate analytical solution. The solution of the problem found with the use of quasi-steady approach that allows us to reduce non-local problem for nonlinear differential equations in partial derivatives of a problem for ordinary differential equations with a nonclassical integral condition. To assess the impact of the approximate solutions of the model problem, a comparative analysis with known similar solution two-dimensional problem of spreading a drop of viscous fluid with a sticking condition. It is shown that despite a slight difference forms the droplet surface in these decisions, the basic characteristics of the process are similar. In both approaches, the peripheral part of the droplet is moved over time by a power law and quantify these relationships are slightly different numerical factors.

Keywords: spreading, the drop, the singularity, the effect of slip, non-linear model problem, quasi-steady approach, an approximate solution

Результаты теоретического и экспериментального исследования процессов смачивания и растекания жидких фаз по поверхности твердых тел находят практическое применение во многих современных технологиях [2–8]. В связи с этим, несмотря на значительные успехи, достигнутые к настоящему времени при изучении этих процессов, задача их дальнейшего исследования остается актуальной.

Анализ результатов, полученных отечественными и зарубежными авторами в данной области, свидетельствует, что основная проблема при теоретическом исследовании процессов растекания связана с перемещением контактной линии, которое в уравнениях Навье – Стокса приводит к недопустимой сингулярности силы на этой линии при граничных условиях прилипания.

Для устранения сингулярности силы при этом используют, как правило, два различных подхода. Первый связан с использованием в теоретической модели растекания условия скольжения в области контактной линии (условие Максвелла) вместо условия прилипания, при котором величина скольжения пропорциональна локальному градиенту скорости [8]. При втором варианте в гидродинамической модели растекания жидкости по поверхности твердого тела авторы учитывают расклинивающее давление [4].

Заметим далее, что если для макроскопических масштабов такое приближение (условие прилипания) на границе раздела жидкости с твердым телом во многих случаях вполне удовлетворительно, то для микроскопических масштабов из-за возможного скольжения жидкости относительно твердой поверхности такое приближение должно быть пересмотрено.

Рассмотрим каплю ньютоновской вязкой нелетучей жидкости, которая находится на гладкой горизонтальной твердой поверхности. Ограничимся здесь рассмотрением двумерной капли, когда модель описывает случай растекания бесконечного валика жидкости в направлении, перпендикулярном его оси. В произвольном сечении такой двумерной капли введем декартову систему координат Oxz с осью Ox, направленной горизонтально по непроницаемой поверхности твердого тела, вертикальной осью Oz и точкой O, расположенной в центре пятна смачивания. Полагаем в дальнейшем сечение капли симметричным относительно оси Oz и ограничимся рассмотрением лишь одной ее половины, соответствующей $x > 0$.

Для описания движения двумерной капли в рассматриваемой системе воспользуемся уравнениями Навье – Стокса в приближении «теории смазки» [3]. С учетом действия гравитационных сил эти уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2};\quad \frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g, \tag{1}$$

где v – горизонтальная компонента скорости; P – давление в жидкой фазе; μ – вязкость жидкости; ρ – ее плотность; g – ускорение силы тяжести.

Для рассматриваемой задачи гравитационного растекания отсутствие касательных напряжений на границе раздела жидкость – газ имеет вид

$$\mu\frac{\partial v}{\partial z}=0 \quad \text{при } z=f(x,t), \tag{2}$$

где $z = f(x, t)$ – профиль свободной поверхности двумерной капли в момент времени t.

Принимая во внимание указанное выше обстоятельство и специфику исследуемой задачи, примем на границе раздела жидкость – твердое тело условие

$$v=\frac{x}{x_0(t)}\frac{dx_0}{dt} \quad \text{при } z=0, \tag{3}$$

где x_0 – абсцисса точки трехфазного контакта (радиус растекания капли).

Заметим, что (3) сочетает в себе условие прилипания в центре капли ($x = 0$) с перемещением точки трехфазного контакта ($x = x_0(t)$) со скоростью $\frac{dx_0}{dt}$.

Для рассматриваемого двумерного случая условие сохранения площади сечения (объема) валика в любой момент времени t, с учетом ее симметрии, запишется в виде нелокального интегрального условия

$$2\int_0^{x_0(t)} f(x,t)\,dx = s = \text{const}. \tag{4}$$

Интегрируя первое уравнение (1) и пользуясь граничным условием (2), получим

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{\mu}(z-f)\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5}$$

Интегрирование (5) с условием скольжения (3) дает выражение для горизонтальной составляющей скорости:

$$v=\frac{1}{\mu}\left(\frac{z^2}{2}-zf\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{x}{x_0(t)}\left(\frac{dx_0}{dt}\right). \tag{6}$$

Воспользуемся далее уравнением неразрывности, которое для рассматриваемого двумерного случая имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^f v\,dz. \tag{7}$$

Подстановка в уравнение неразрывности (7) выражения для скорости (6) дает

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f^3}{3\mu}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{x}{x_0(t)}\left(\frac{dx_0}{dt}\right)f\right]. \tag{8}$$

Давление в жидкой капле без учета действия капиллярных эффектов определяется тогда выражением

$$p=p_0-\rho g(z-f), \tag{9}$$

где p_0 – давление в газовой среде над каплей.

Подстановка (9) в (8) дает окончательно уравнение растекания двумерной капли в гравитационном поле с учетом эффекта проскальзывания:

$$\frac{df}{dz}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\rho g}{3\mu}\left(f^3\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{x}{x_0(t)}\left(\frac{dx_0}{dt}\right)f\right]. \tag{10}$$

Для исследования уравнения (10) проведем далее, как в [3], нормализацию переменных с характерными значениями времени t_*, высоты поверхности капли f_* и горизонтального размера x_*. В нормализованных переменных $f = f/f_*$; $t = t/t_*$; $x = x/x_*$ получим из (10) уравнение растекания в безразмерной форме

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left[a\left(f^3\frac{\partial f}{\partial x}\right)-\frac{x}{x_0(t)}v_0 f\right], \tag{11}$$

где $a=\frac{\rho g t_* f_*^3}{3\mu x_*^2}$; v_0 – безразмерная скорость растекания.

Условие сохранения площади сечения двумерной капли (4) в любой момент времени в безразмерных переменных примет вид

$$\int_0^{x_0(t)} f(x,t)\,dx=s_0;\quad s_0=s/2x_*f_*. \tag{12}$$

Отметим, что даже в рассматриваемой двумерной постановке уравнение (11) с соответствующими дополнительными условиями неразрешимо прямыми аналитическими методами, а ее численное решение связано с большими трудностями из-за высокого порядка уравнения, его нелинейности и неклассического интегрального условия (12).

Для получения приближенного решения исследуемой задачи применим квазистационарный подход [1, 3], позволяющий свести задачу растекания от нелинейного дифференциального уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению с соответствующими дополнительными условиями. Суть данного подхода состоит в том, что скорость распространения точки трехфазного контакта вначале полагается постоянной, а затем находится на основе кинематической зависимости $v_0 = \dfrac{dx_0}{dt}$.

Выполним в (11) переход к новым переменным

$$\xi = x - x_0(t); \quad v_0 = \frac{dx_0}{dt} \tag{13}$$

и, временно «замораживая» скорость растекания капли v_0, получим

$$-v_0 \frac{df}{d\xi} = \frac{d}{d\xi}\left(af^3 \frac{df}{d\xi} - \frac{\xi + x_0}{x_0} v_0 f \right). \tag{14}$$

После интегрирования (14) имеем соотношение

$$-v_0 f = af^3 \frac{df}{d\xi} - \frac{\xi + x_0}{x_0} v_0 f + c, \; c = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Граничное условие

$$f = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0, \tag{16}$$

которое выражает равенство нулю высоты капли в точке трехфазного контакта, приводит к нулевому значению постоянной интегрирования: $c = 0$.

Тогда из (15) получим уравнение

$$\xi d\xi = \left(\frac{ax_0}{3v_0} \right) df^3. \tag{17}$$

Отсюда, после интегрирования (17) с учетом условия (16), имеем

$$f = \left(\frac{3v_0}{2ax_0} \right)^{1/3} \xi^{2/3} = \left(\frac{3v_0}{2ax_0} \right)^{1/3} \left(x_0 - x \right)^{2/3}. \tag{18}$$

Чтобы установить зависимость между радиусом и скоростью расстояния капли, воспользуемся (18) и нелокальным интегральным условием (12). Тогда получим

$$s_0 = \int_0^{x_0(t)} f(x,t) = \left(\frac{3v_0}{2ax_0} \right)^{1/3} \int_0^{x_o(t)} \left(x_0 - x \right)^{2/3} dx = = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3v_0}{2ax_0} \right)^{1/3} x_0^{5/3}. \tag{19}$$

Далее из (19) с учетом зависимости скорости от радиуса растекания получаем уравнение растекания

$$\frac{dx_0}{dt} = \left(\frac{250}{81} \right) \frac{as_0^3}{x_0^4}. \tag{20}$$

Интегрирование (20) с использованием начального условия

$$x_0(t) = x_0(0) \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{21}$$

дает зависимость

$$x_0(t) = \left(\frac{1250}{81} \right)^{1/5} \left(as_0^3 t \right)^{1/5} + x_0(0). \tag{22}$$

В квазистационарном приближении форма поверхности капли с условием скольжения по твердой поверхности, в силу (18) и (20), определяется тогда зависимостью

$$f^c = k_f x_0^{-5/3} \left(x_0 - x \right)^{2/3}, \quad k_f \approx 1{,}667, \tag{23}$$

где принято $s = 2x_* f_*$.

Для оценки влияния эффекта проскальзывания на решение задачи растекания двумерной капли на твердой поверхности приведем ниже известное автомодельное

$$f^a = \bar{k}_f x_0^{-5/3} \left(x_0^2 - x^2 \right)^{1/3}, \quad \bar{k}_f \approx 1{,}189 \tag{24}$$

и квазистационарное

$$f^n = \tilde{k}_f x_0^{-4/3} \left(x_0 - x \right)^{1/3}, \quad \tilde{k}_f \approx 1{,}333 \tag{25}$$

решения данной задачи с условиями прилипания [3].

Из (23)–(25) следует, что наибольшей толщины f_0 (высота в апексе) капля достигает во всех случаях в центре ($x = 0$) и они соответственно равны

$$f_0^c = k_f x_0^{-1}; \quad f_0^a = \bar{k}_f x_0^{-1}; \quad f_0^n = \tilde{k}_f x_0^{-1}. \tag{26}$$

Заметим далее, что при одинаковой высоте капли в любой момент времени в апексе, абсциссы точек трехфазного контакта квазистационарных решений задачи с условиями скольжения x_0^c и прилипания x_0^n, а также автомодельного решения с условием прилипания x_0^a, связаны зависимостью

$$x_0^c = \lambda_1 x_0^a;\quad x_0^n = \lambda_2 x_0^a,$$

$$\lambda_1 \approx 1{,}402,\quad \lambda_2 \approx 1{,}121. \qquad (27)$$

Скорость растекания капли в трех рассматриваемых случаях можно представить в виде

$$v_0^c = k_c\left(at\right)^{1/5};\quad v_0^a = k_a\left(at\right)^{1/5};$$

$$v_0^n = k_n\left(at\right)^{1/5}, \qquad (28)$$

где $k_c = 0{,}346$, $k_a = 0{,}282$, $k_n = 0{,}263$.

Для оценки поведения кривых, описывающих профили свободной поверхности капли в апексах и точках трехфазного контакта, продифференцируем (23)–(25) и соответственно получим

$$\frac{df^c}{dx} = -k_1 x_0^{-5/3}\left(x_0 - x\right)^{-1/3};$$

$$\frac{df^a}{dx} = -k_2\, x_0^{-5/3}\left(x_0^2 - x^2\right)^{-2/3};$$

$$\frac{df^n}{dx} = -k_3\, x_0^{-4/3}\left(x_0 - x\right)^{-2/3}, \qquad (29)$$

где $k_1 \approx 1{,}111$, $k_2 \approx 0{,}752$, $k_3 \approx 0{,}444$.

Переходя к пределу при $x \to x_0$ и $x \to 0$ в формулах (29), заключаем, что в точках трехфазного контакта касательная к свободной поверхности капли во всех трех случаях перпендикулярна оси Ox, в апексе касательная к поверхности капли, в случае автомодельного решения, направлена перпендикулярно оси Oz, а при квазистационарных решениях с условиями скольжения и прилипания направлена к оси абсцисс соответственно под углами

$$\varphi_0^c = \mathrm{arctg}\left(-\frac{k_1}{x_0^2}\right);\quad \varphi_0^n = \mathrm{arctg}\left(-\frac{k_3}{x_0}\right). \qquad (30)$$

Таким образом, проведенный сравнительный анализ известных автомодельного и квазистационарного решений задачи гравитационного растекания с полученным квазистационарным решением данной задачи с условием скольжения показывает, что несмотря на некоторое отличие форм поверхности капли в указанных решениях основные характеристики процесса оказываются схожими. Например, в обоих подходах точка трехфазного контакта со временем перемещается по поверхности твердого тела по степенному закону и эти зависимости количественно незначительно отличаются числовыми множителями.

Полученный в работе результат показывает, что квазистационарное решение задачи гравитационного растекания с учетом эффекта проскальзывания, с определенными оговорками, дает приемлемую точность решения и позволяет качественно адекватно описывать моделируемый физический процесс.

Полученный результат представляет не только самостоятельный интерес, но и может служить определенным тестом при построении и исследовании математических моделей более высокого иерархического уровня, например при численном исследовании модели данной задачи на основе нелинейного уравнения в частных производных с нелокальным интегральным условием.

Список литературы

1. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена. – М.: Атомиздат, 1967. – С. 47–96.

2. Де Жен П.Ж. Смачивания: статистика и динамика // УФН. – 1987. – Т. 151. – С. 619–981.

3. Калинин В.В., Старов В.М. О квазистационарном подходе к решению задач растекания жидкости // Коллоид, журн. – 1988. – Т. 50, № 1. – С. 25–32.

4. Калинин В.В., Старов В.М. Растекание капель жидкости с учетом действия расклинивающего давления // Коллоидный журнал. – 1988. – т. 54, № 2. – С. 90–96.

5. Канчукоев В.З., Карамурзов Б.С., Созаев В.А. К кинетике растекания малых объемов металлических расплавов по поверхности твердого тела в магнитном поле // Адгезия расплавов и пайка материалов. – 2002. – Вып. 35. – С. 37–47.

6. Самсонов В.М., Дронников В.В., Муравьев С.Д. Компьютерное моделирование формирования наноструктур при растекании малых капель по неоднородным подложкам // ЖФХ. – 2002. – Т. 76. – № 11. – С. 2052–2056.

7. Сумм Б.Д., Иванова Н.И. Объекты и методы коллоидной химии и нанохимии // Успехи химии. – 2000. – Т. 69. – С. 995–1007.

8. Dussan E. On the spreading of liquids on solid surfaces: static and dynamics contact lines // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1979. – Vol. 11. – P. 371–400.