

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Кумыкова С.К., Езаова А.Г., Бозиева А.А.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик,
e-mail: alena_ezaova@mail.ru

Настоящая статья посвящена исследованию однозначной разрешимости нелокальной задачи с дробными производными в краевом условии, для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками. При ограничениях неравенственного типа на известные функции доказана теорема единственности. Доказательство теоремы проводится методом интегралов энергии. При доказательстве единственности решения задачи установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной в уравнении на однозначную разрешимость поставленной краевой задачи. Для доказательства существования решения поставленной задачи получены соотношения между следом искомой функции $u(x, 0) = \tau(x)$ и следом производной искомой функции $u_y(x, 0) = v(x)$, принесенные на линию вырождения $y = 0$ из гиперболической и параболической частей смешанной области. Методом Трикоми существование решения задачи эквивалентно редуцировано к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно следа производной искомой функции, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, оператор дробного дифференцирования, оператор дробного интегрирования, задача Коши, уравнение Фредгольма

NONLOCAL PROBLEM FOR A EQUATION OF MIXED TYPE OF THIRD ORDER WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

Kumykova S.K., Ezaova A.G., Bozieva A.A.

Kh.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: alena_ezaova@mail.ru

This article is devoted to research of the unique solvability of a nonlocal problem with fractional derivatives in the boundary condition for equations of mixed type of third order with multiple characteristics. When neravenstvennogo restrictions on the type of function known uniqueness theorem. The proof is carried out by energy integrals. In the proof of the uniqueness of the solution of the problem set the effect of the ratio of the lowest (50) derivative in the equation on the unique solvability of the boundary value problem. To prove the existence of a solution of the problem, obtained the relationship between the trace of the unknown function $u(x, 0) = \tau(x)$ and the following derivatives of the unknown function $u_y(x, 0) = v(x)$ brought to the line of degeneracy $y = 0$ of hyperbolic and parabolic part of the mixed area. The method of solving the problem of the existence of the Tricomi redutsirovanno equivalent to the Fredholm integral equation of the second kind (100), with respect to the following derivative of the unknown function, which should be unconditional solvability of the uniqueness of the solution of the problem.

Keywords: nonlocal problem, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, Cauchy problem, Fredholm equation

Теория локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из актуальных направлений уравнений в частных производных, изучению которого посвящено немало публикаций. Актуальность этих исследований можно обосновать внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, получением новых результатов в тео-

рии дробного интегро-дифференцирования, а также их прикладным значением.

Цель исследования – доказать однозначную разрешимость задачи с дробными производными в краевом условии для уравнения смешанного типа третьего порядка с кратными характеристиками.

Постановка задачи

Рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xxx} + \alpha_1(x, y)u_x + \alpha_0(x, y)u - b(x, y)u_y, & y > 0, \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $m = \text{const} > 0$, в конечной области Ω , ограниченной отрезками AA_0 , BB_0 , A_0B_0 прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ соответственно, и характеристиками AC , BC равнения (1), выходящими из точек $A(0;0)$, $B(1;0)$ при $y < 0$.

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$; $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, $I \equiv AB$ – единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Требуется определить функцию $u(x, y)$, являющуюся решением уравнения (1) при $y \neq 0$ из класса

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{(3,1)}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{(2,2)}(\Omega_2), \quad u_x \in C(\overline{\Omega}_1).$$

удовлетворяющую условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y); u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$u(0, y) - u_x(1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha(x) D_{0x}^\varepsilon x^{2\varepsilon-1} U[\theta_0(x)] + \beta(x) D_{x1}^\varepsilon (1-x)^{2\varepsilon-1} U[\theta_1(x)] + \\ + \gamma(x) u(x, 0) + c(x) u_y(x, 0) = d(x), \quad \forall x \in I, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi_i(y) \in C(\overline{I})$ ($i = 1, 2, 3$); $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), c(x), d(x) \in C^1 \cap C^3(I)$,

причём $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + c^2(x) \neq 0$,

$$\alpha_1(x, y), b(x, y) \in C^2(\overline{\Omega}_1); \quad \alpha_0(x, y) \in C(\overline{\Omega}_1); \quad \varepsilon = \frac{m}{2m+4};$$

$\theta_0(x), \theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками AC, BC соответственно, D_{ax}^ε – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [9].

Задача (1)–(4) относится к классу краевых задач со смещением А.М. Нахушева, исследованиями которых занимались многие авторы [1–8, 10]. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что они существенно обобщают задачу Трикоми, содержат широкий класс корректных самосопряженных задач и имеют многомерные аналоги.

Теорема единственности

В области Ω не может существовать более одного решения задачи (1)–(4), если

$$2a_0(x, y) - a_{1x}(x, y) + b_y(x, y) - 2b(x, y)N > 0 \text{ в } \Omega_1; \quad (5)$$

$$b(x, y) > \rho > 0; b(x, 0) = \text{const}; \quad (6)$$

$$2a_0(x, y) - a'_1(x, 0) \leq 0, \quad (7)$$

где N – некоторая постоянная, удовлетворяющая условию

$$N > \max_{\Omega_1} \frac{\left(-\frac{\partial a_1}{\partial x} + 2a_0 + \frac{\partial b}{\partial y} \right)}{2b},$$

а также выполняются условия

$$A(x) = (1-x)^{1-\varepsilon} \alpha(x) + x^{1-\varepsilon} \beta(x) + \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} x^{1-\varepsilon} (1-x)^{1-\varepsilon}, \quad \gamma(x) \neq 0; \quad (8)$$

$$\left[\frac{(1-x)^{1-\varepsilon} \alpha(x)}{A(x)} \right]' \leq 0; \quad \left[\frac{x^{1-\varepsilon} \beta(x)}{A(x)} \right]' \geq 0; \quad \frac{C(x)}{A(x)} \leq 0, \quad x \in \overline{I}. \quad (9)$$

Доказательство. Решение задачи Коши в области Ω_2 имеет вид [1, 4]

$$\begin{aligned} u(x, y) = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} \int_0^1 \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] \cdot [t(1-t)]^{\varepsilon-1} dt + \\ + \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} y \int_0^1 \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} (2t-1) \right] \cdot [t(1-t)]^\varepsilon dt, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tau(x) = u(x, 0)$; $v(x) = u_y(x, 0)$, $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция Эйлера [9].

Пользуясь решением (4), вычислим

$$U[\theta_0(x)] = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} x^{1-2\varepsilon} \int_0^x \frac{\xi^{\varepsilon-1} \tau(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\varepsilon}} - \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} \int_0^x \frac{\xi^{-\varepsilon} v(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\varepsilon}}.$$

Последнее в терминах операторов дробного интегро-дифференцирования примет вид

$$U[\theta_0(x)] = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} x^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} \tau(x) - \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} D_{0x}^{\varepsilon-1} x^{-\varepsilon} v(x).$$

Аналогично, получаем

$$U[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} x^{1-2\varepsilon} \int_x^1 \frac{(1-\xi)^{\varepsilon-1} \tau(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\varepsilon}} - \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} \int_x^1 \frac{(1-\xi)^{-\varepsilon} v(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\varepsilon}}.$$

Последнее в терминах операторов дробного интегро-дифференцирования примет вид

$$U[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma^2(\varepsilon)} x^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{-\varepsilon} x^{\varepsilon-1} (1-x)^{\varepsilon-1} \tau(x) - \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma^2(1-\varepsilon)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} D_{x1}^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon} v(x).$$

Подставляя значения, $U[\theta_0(x)]$, $U[\theta_1(x)]$ в условие (4), получим

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \alpha(x)(x)^{\varepsilon-1} + \frac{\Gamma(2\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon)} \beta(x)(1-x)^{\varepsilon-1} + \gamma(x) \right] \tau(x) - \\ & - \frac{\Gamma(2-2\varepsilon)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-2\varepsilon} [\alpha(x) D_{0x}^{\varepsilon} x^{2\varepsilon-1} D_{0x}^{\varepsilon-1} x^{\varepsilon-1} v(x) + \\ & + \beta(x) D_{x1}^{\varepsilon} (1-x)^{2\varepsilon-1} D_{x1}^{\varepsilon-1} (1-x)^{-\varepsilon} v(x)] + c(x)v(x) = d(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Преобразовав интегралы, входящие в (11), будем иметь

$$\tau(x) = \alpha_1(x) D_{0x}^{2\varepsilon-1} v(x) + \beta_1(x) D_{x1}^{2\varepsilon-1} v(x) + \gamma_1(x) v(x) + d_1(x), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \frac{c_1(1-x)^{1-\varepsilon} \alpha(x)}{A(x)}; \quad \beta_1(x) = \frac{c_1 x^{1-\varepsilon} \beta(x)}{A(x)}; \\ \gamma_1(x) &= \frac{-\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} \cdot \frac{x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon} c(x)}{A(x)}; \quad d_1(x) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(2\varepsilon)} \cdot \frac{x^{1-\varepsilon}(1-x)^{1-\varepsilon} d(x)}{A(x)}. \end{aligned}$$

Докажем, что решение задачи (1)–(4) единственно при выполнении условий (5)–(9) теоремы. Для этого при $d(x) = 0$ покажем, что интеграл $I^* = \int_0^1 \tau(x)v(x)dx$ не может быть отрицательным.

Действительно,

$$\begin{aligned} I^* &= \int_0^1 \alpha_1(x)v(x) D_{0x}^{2\varepsilon-1} v(x) dx + \int_0^1 \beta_1(x)v(x) D_{x1}^{2\varepsilon-1} v(x) dx + \int_0^1 \gamma_1(x)v^2(x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^1 \alpha_1(x)v(x) dx \int_0^x \frac{v(t) dt}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^1 \beta_1(x)v(x) dx \int_x^1 \frac{v(t) dt}{(t-x)^{2\varepsilon}} + \int_0^1 \gamma_1(x)v^2(x) dx. \end{aligned}$$

Используя методику, примененную в работах [5, 7], получим при $y < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin \pi \varepsilon} I^* = & - \int_0^{\infty} t^{2\varepsilon-1} dt \int_0^1 \alpha'_1(x) \left[\left(\int_0^x v(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_0^x v(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right] dx + \\ & + \int_0^{\infty} t^{2\varepsilon-1} dt \int_0^1 \beta'_1(x) \left[\left(\int_x^1 v(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 + \left(\int_x^1 v(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 \right] dx + \frac{2}{\pi} \sin \pi \varepsilon \int_0^1 \gamma_1(x) v^2(x) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно $I^* \geq 0$, если $\alpha'_1(x) \leq 0$, $\beta'_1 \geq 0$, $\gamma_1(x) \geq 0$. Таким образом, при выполнении условий (8)–(9) теоремы единственности $I^* \geq 0$.

Далее перейдем в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$. Будем иметь

$$\tau'''(x) + \alpha_1(x)\tau'(x) + \alpha_0(x)\tau(x) - b(x)v(x) = 0. \quad (14)$$

Выражая $v(x)$ из (14), находим

$$I^* = \int_0^1 \bar{\alpha}(x)\tau(x)\tau'''(x)dx + \int_0^1 \bar{\beta}(x)\tau'(x)\tau(x)dx + \int_0^1 \bar{\gamma}(x)\tau^2(x)dx.$$

где

$$\bar{\alpha}(x) = \frac{1}{b(x, 0)}; \quad \bar{\beta}(x) = \frac{\alpha_1(x, 0)}{b(x, 0)}; \quad \bar{\gamma}(x) = \frac{\alpha_0(x)}{b(x, 0)}.$$

Или, что то же самое

$$I^* = \int_0^1 \bar{\gamma}(x)\tau^2(x)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \bar{\beta}(x)d[\tau^2(x)] + \int_0^1 \bar{\alpha}(x)\tau(x)d[\tau'(x)].$$

Отсюда, интегрируя по частям, нетрудно получить

$$I^* = \frac{1}{2} [\bar{\alpha}(0) - \bar{\alpha}(1)] \cdot \tau^2(0) + \frac{3}{2} \int_0^1 \bar{\alpha}'(x) \cdot \tau^2(x)dx + \int_0^1 \left[\bar{\gamma}(x) - \frac{1}{2} \bar{\beta}'(x) - \frac{1}{2} \bar{\alpha}'''(x) \right] \tau^2(x)dx.$$

При выполнении условий (5)–(7) теоремы $I^* \leq 0$ при условиях (8), (9) $I^* \geq 0$. Следовательно, можно заключить, что $I^* = 0$. Таким образом, левая часть (13) равна нулю. Поскольку слагаемые справа неотрицательны, то они также равны нулю. В частности,

$$\int_0^{\infty} t^{2\varepsilon-1} dt \left(\int_0^1 v(\xi) \cos t\xi d\xi \right)^2 = 0; \quad \int_0^{\infty} t^{2\varepsilon-1} dt \left(\int_0^1 v(\xi) \sin t\xi d\xi \right)^2 = 0.$$

Так как $t^{2\varepsilon-1} \geq 0$, то $\int_0^1 v(\xi) \cos t\xi d\xi = 0$, $\int_0^1 v(\xi) \sin t\xi d\xi = 0$ для всех $t \in (0, \infty)$, в частности при $t = 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

При этих значениях t функции $\sin t\xi$, $\cos t\xi$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2 . Следовательно, $v(\xi) = 0$ почти всюду, а так как $v(x)$ непрерывно по условию, то $v(\xi) = 0$ всюду. Отсюда легко заключить, что $v(x) = 0$ и при $d(x) = 0$ из (11) имеем $\tau(x) = 0$. Таким образом, $U(x, y) \equiv 0$ в Ω_2 как решение задачи Коши с нулевыми данными, а в Ω_1 как решение задачи (1)–(3) с нулевыми данными. Единственность решения задачи (1)–(4) при выполнении условий теоремы доказана.

Для доказательства существования решения задачи трижды проинтегрируем от 0 до x равенство (14). Получим

$$\begin{aligned} \tau(x) + \int_0^x \left[(x-\xi)a_1(\xi) + \frac{1}{2}(x-\xi)^2 [a_0(\xi) - a'_1(\xi)] \right] \tau(\xi) d\xi - \\ - \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 b(\xi) v(\xi) d\xi = \left[1 + a_1(0) \frac{x^2}{2} \right] \phi_1(0) + \tau'(0)x + \tau''(0) \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, соотношения между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесённые из областей Ω_1 и Ω_2 , имеют соответственно вид (15) и (12). Подставим $\tau(x)$ из (12) в (15). Получим

$$\begin{aligned} & \alpha_1(x) D_{0x}^{2\varepsilon-1} v(x) + \beta_1(x) D_{x1}^{2\varepsilon-1} v(x) + \gamma_1(x) v(x) + \\ & + d_1(x) + \int_0^x \left[(x-\xi) a_1(\xi) + \frac{1}{2} (x-\xi)^2 [a_0(\xi) - a'_1(\xi)] \right] \times \\ & \times \left[\alpha_1(\xi) D_{0\xi}^{2\varepsilon-1} v(\xi) + \beta_1(\xi) D_{\xi 1}^{2\varepsilon-1} v(\xi) + \gamma_1(\xi) v(\xi) + f_1(\xi) \right] d\xi - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^x (x-\xi)^2 b(\xi) v(\xi) d\xi = \left[1 + a_1(0) \frac{x^2}{2} \right] \varphi_1(0) + \tau'(0)x + \tau''(0) \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

Последнее в результате преобразований примет вид

$$\gamma_1(x) v(x) + \int_0^1 K(x, t) v(t) dt = F(x), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} K(x, t) &= \begin{cases} K_1(x, t) & \text{при } t \leq x; \\ K_2(x, t) & \text{при } t \geq x; \end{cases} \\ K_1(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \frac{\alpha_1(x)}{(x-t)^{2\varepsilon}} + \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_{\xi}^x \frac{M(x, \xi) \alpha_1(\xi) d\xi}{(\xi-t)^{2\varepsilon}} + \\ & + \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^t \frac{M(x, \xi) \beta_1(\xi) d\xi}{(\xi-t)^{2\varepsilon}} + M(x, t) \gamma_1(t) - \frac{1}{2} (x-t)^2 b(t); \\ K_2(x, t) &= \frac{\beta_1(x)}{\Gamma(1-2\varepsilon)(t-x)^{2\varepsilon}} + \frac{1}{\Gamma(1-2\varepsilon)} \int_0^x \frac{M(x, \xi) \beta_1(\xi) d\xi}{(\xi-t)^{2\varepsilon}}; \\ M(x, \xi) &= (x-\xi) \alpha_1(\xi) + \frac{1}{2} (x-\xi)^2 [\alpha_0(\xi) - \alpha'_1(\xi)]; \\ F(x) &= \left[1 - \alpha_1(0) \frac{x^2}{2} \right] \varphi_1(0) + \tau'(0)x + \tau''(0) \frac{x^2}{2} - d_1(x) - \int_0^x M(x, \xi) d_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Уравнение (16) при $\gamma_1(x) \neq 0$ есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода, первая часть которого $F(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$, а ядро $K(x, t) \in C(\bar{I} \times \bar{I}) \cap C^1(I \times I)$, при $x \neq t$, а при $x = t$ допускает оценку $K(x, t) = \frac{O(1)}{|x-t|^{2\varepsilon}}$, где

$O(1)$ – ограниченная величина. Безусловная разрешимость уравнения (16) в требуемом классе функций заключается из единственности решения задачи. Решение уравнения (16) может быть найдено по формуле

$$v(x) = F(x) + \int_0^1 R(x, t) F(t) dt,$$

где $K(x, t)$ – резольвента ядра $K(x, t)$.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН, 1979.
3. Кумыкова С.К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения

смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10. – № 1. – С. 78–88.

4. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

5. Репин О.А., Кумыкова С.К. Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2012. – № 4(29). – С. 150–158.

6. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2013. – № 1(30). – С. 150–158.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 9(100). – С. 52–60.

8. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. – Ташкент: ФАН, 1974. – 155 с.

9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

10. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков М.Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Доклады национальной академии наук Украины. – 1997. – № 12. – С. 47–54.