УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

Водахова В.А., Яхутлова М.Р., Тлимахова Р.Г.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

Важным этапом в развитии теории краевых задач стали нелокальные задачи нового типа, названные краевыми задачами со смещением [6]. Они являются существенным обобщением задачи Трикоми, содержат широкий класс корректных самосопряженных задач и имеют многомерные аналоги. Следует отметить, что большинство работ посвящено исследованию краевых задач для линейных уравнений смешанного типа с одной линией вырождения, и лишь малая часть их [7, 9] посвящена изучению локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Для уравнения смешанного типа с перпендикулярными линиями вырождения исследована нелокальная задача, когда на эллиптической части границы области задано условие Дирихле, а на гиперболических частях нелокальные условия, поточечно связывающие значения решения на характеристиках. При ограничениях неравенственного типа на известные функции доказана теорема единственности. Вопрос существования решения задачи редуцирован к вопросу разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, явное решение которой выписано.

Ключевые слова: нелокальная задача, регулярное решение, задача Коши, уравнение Фредгольма, сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

NONLOCAL PROBLEM FOR MIXED TYPE EQUATION WITH TWO DEGENERACY LINES

Vodahova V.A., Yahutlova M.R., Tlimahova R.G.

Kabardino-Balkarian State University H.M. Berbekov, Nalchik, e-mail: v.a.vod@yandex.ru

An important stage in the development of the theory of boundary value problems become non-local problems of a new type, called boundary problem with shift [6]. They are a significant generalization of the Tricomi problem, contain a valid class of self-adjoint problems and have a multi-dimensional analogues. It should be noted that most of the work is devoted to the study of boundary value problems for linear mixed-type equations with a degeneracy of the line and only a small portion of them [7, 9] devoted to the study of local and nonlocal boundary value problems for equations of mixed type with two lines of degeneracy. For the equation of mixed type with perpendicular lines of degeneracy investigated nonlocal problem when the elliptical part of the border area set the Dirichlet condition, and hyperbolic parts of nonlocal conditions pointwise binding values on the characteristics of solutions. When neravenstvennogo restrictions on the type of function known uniqueness theorem. The question of the existence of solving the problem is reduced to the question of the solvability of a system of singular integral equations with Cauchy kernels, a clear solution which is written out.

Keywords: nonlocal problem, regular solution, Cauchy problem, Fredholm equation, singular integral equation with Cauchy kernel

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важнейших разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теорией интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами околозвуковой газовой динамики, теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, магнитной гидродинамики, математической биологии и в других областях.

Цель исследования

Актуальным продолжением этих исследований является постановка и доказательство однозначной разрешимости задачи со смещением для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с перпендикулярными линиями параболического вырождения.

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$U_{xx} + sgn(xy)U_{yy} = 0 \qquad (1)$$

в конечной односвязной области D плоскости переменных x, y, ограниченной жордановой кривой σ с концами в точках A(1,0), B(0,1), расположенной в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$, и характеристиками BC: $y - x = 1$, CD: $x + y = 0$, DA: $x - y = 1$ уравнения (1).

Обозначим через $D_1 = D \cap (y < 0)$, $D_2 = D \cap (x < 0)$ – гиперболические части смешанной области D, а через $D_3 = D \cap (x > 0) \cap (y > 0)$ – эллиптическую часть, $J_1(J_2)$ – интервал $0 < x < 1$ $(0 < y < 1)$ прямой $y = 0$ $(x = 0)$.

Задача. Найти регулярное в области D решение $U(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$U(x,y)|_{\sigma} = \varphi(x,y), \tag{2}$$

$$a_1(x)U\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+$$

$$+b_1(x)U\left(\frac{x+1}{2},\frac{x-1}{2}\right)=c_1(x), \tag{3}$$

$$a_2(y)U\left(-\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)+$$

$$+b_2(y)U\left(\frac{y-1}{2},\frac{y+1}{2}\right)=c_2(y), \tag{4}$$

где $\varphi(x, y)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, – заданные непрерывные функции, причем

$$a_i^2(t)+b_i^2(t)\neq 0; t\in J_i, i=1,2;$$

$$\varphi(x,y)\in C(\sigma),\ a_i(t), b_i(t),$$

$$c_i(t)\in C^1\left(\overline{J_i}\right)\cap C^{(2,h)}(J_i) \text{ где } h>0.$$

Под регулярным в области D решением уравнения (1) будет пониматься функция $U(x, y)$ из класса $C\left(\overline{D}\right)\cap C^1(D)\cap C^2(D_1\cup D_2\cup D_3)$, удовлетворяющая уравнению (1) и такая, что $U_x(x,0)$, $U_y(0,y)$ могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы на концах интервалов $J_i, i=1,2$.

Задача (1)–(4) относится к классу краевых задач со смещением [6], исследованием которых для уравнений смешанного типа с одной и двумя линиями вырождения занимались многие авторы [1–10]. Подробная библиография работ содержится в [1, 6].

Единственность решения задачи. Положим,

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ u_y(x,0)=\nu_1(x); \tag{5}$$

$$u(0,y)=\tau_2(y),\ u_x(0,y)=\nu_2(x). \tag{6}$$

Решение задачи Коши (5) в области D_1 для уравнения (1) имеет вид

$$U(x,y)=\frac{\tau_1(x+y)+\tau_1(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}\nu_1(t)\,dt, \tag{7}$$

решение задачи (6) в области D_2

$$U(x,y)=\frac{\tau_2(y-x)+\tau_2(y+x)}{2}+\frac{1}{2}\int_{y-x}^{y+x}\nu_2(t)\,dt. \tag{8}$$

Удовлетворяя (7), (8) условиям (3), (4) с учетом

$$\tau_1(1)=\varphi(0), \tau_2(1)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

будем иметь

$$[a_1(x)+b_1(x)]\tau_1(x)+\tau_1(0)a_1(x)-a_1(x)\int_0^x\nu_1(t)\,dt-$$

$$-b_1(x)\int_x^1\nu_1(t)\,dt=2c_1(x)-\varphi(0)b_1(x), \tag{9}$$

$$[a_2(y)+b_2(y)]\tau_2(y)+a_2(y)\tau_2(0)-a_2(y)\int_0^y\nu_2(t)\,dt-$$

$$-b_2(y)\int_y^1\nu_2(t)\,dt=2c_2(y)-\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)b_2(y). \tag{10}$$

где $\tau_1(0)$ и $\tau_2(0)$ определяются из (3), (4):

$$\tau_1(0)=\frac{c_1(0)a_1(1)-b_1(0)\left[c_1(1)-b_1(1)\varphi(0)\right]}{a_1(0)a_1(1)},$$

$$\tau_2(0)=\frac{c_2(0)a_2(1)-b_2(0)\left[c_2(1)-b_2(1)\varphi\left(\pi/2\right)\right]}{a_2(1)a_2(0)}.$$

Соотношение между $\tau_i(t)$ и $v_i(t)$ из гиперболических частей D_1 и D_2 смешанной области D (9), (10) можно переписать в виде:

$$[a_i(t)+b_i(t)]\tau_i(t)-a_i(t)\int_0^t \nu_i(\xi)d\xi-b_i(t)\int_t^1 \nu_i(\xi)d\xi=f_i(t), \tag{11}$$

где при $i = 1$, $t = x$, при $i = 2$, $t = y$;

$$f_1(x)=2c_1(x)-b_1(x)\varphi(0)-\tau_1(0)a_1(x),\quad f_2(y)=2c_2(y)-b_2(y)\varphi\left(\pi/2\right)-\tau_2(0)a_2(y).$$

Теорема. В области D не может существовать более одного решения задачи (1)–(4), если выполнены условия:

$$a_i'(t)b_i(t)-b_i'(t)a_i(t)\le 0, \tag{12}$$

$$\frac{a_i(1)}{a_i(1)+b_i(1)}+\frac{b_i(0)}{a_i(0)+b_i(0)}\ge 0, \tag{13}$$

$$a_i(t)+b_i(t)\ne 0, i=1,2. \tag{14}$$

Действительно, интегрируя тождество

$$U\left(U_{xx}+U_{yy}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(UU_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(UU_y\right)-U_x^2-U_y^2\equiv 0$$

по области D_3, получим соотношение

$$\iint_{D_3}\left(U_x^2+U_y^2\right)dxdy+\int_0^1\tau_1(x)\nu_1(x)dx+\int_0^1\tau_2(y)\nu_2(y)dy=0. \tag{15}$$

Полагая $\varphi(x,y)\equiv 0$; $c_i(t)=0$, докажем, что

$$\widetilde{J}_i=\int_0^1\tau_i(t)\nu_i(t)dt\ge 0;\ \text{где}\ i=1,2.$$

Действительно, пусть выполняется условие (14) теоремы единственности. Тогда (11) перепишем в виде

$$\tau_i(t)=A_i(t)\int_0^t\nu_i(\xi)d\xi+B_i(t)\int_t^1\nu_i(\xi)d\xi,$$

где

$$A_i(t)=\frac{a_i(t)}{a_i(t)+b_i(t)};B_i(t)=\frac{b_i(t)}{a_i(t)+b_i(t)}.$$

Рассмотрим

$$\widetilde{J}_i=\int_0^1\nu_i(t)A_i(t)dt\int_0^t\nu_i(\xi)d\xi+\int_0^1\left[\nu_i(t)+B_i(t)\right]dt\int_t^1\nu_i(\xi)d\xi.$$

Принимая во внимание, что

$$\left[\left(\int_0^t\nu_i(\xi)d\xi\right)^2\right]'=2\nu_i(t)\int_0^t\nu_i(\xi)d\xi,$$

$$\left[\left(\int_t^1 \nu_i(\xi)d\xi\right)^2\right]' = -2\nu_i(t)\int_t^1 \nu_i(\xi)d\xi,$$

будем иметь

$$\widetilde{J}_i = \frac{1}{2}\int_0^1 A_i(t)\left[\left(\int_0^t \nu_i(\xi)d\xi\right)^2\right]' dt - \frac{1}{2}\int_0^1 B_i(t)\left[\left(\int_t^1 \nu_i(\xi)d\xi\right)^2\right]' dt.$$

Последнее в результате интегрирования по частям примет вид:

$$\widetilde{J}_i = \frac{A_i(1)+B_i(0)}{2}\left(\int_0^1 \nu_i(\xi)d\xi\right)^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 A_i'(t)\left[\int_0^t \nu_i(\xi)d\xi\right]^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^1 B_i'(t)\left[\int_t^1 \nu_i(\xi)d\xi\right]^2 dt.$$

Легко видеть, что $B_i' = -A_i'$. Таким образом, при выполнении условий (12), (13) теоремы единственности будет выполняться $\widetilde{J}_i \ge 0$.

Отсюда следует единственность решения задачи.

Существование решения задачи. В области D_3 рассмотрим задачу Холмгрена

$$U|_\sigma = \varphi(\zeta),\ \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=0} = \nu_1(x); 0 < x < 1,\ \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=0} = \nu_2(y); 0 < y < 1,$$

решение которой задается формулой [9]:

$$U(x,y) = \int_\sigma \varphi \frac{\partial G(\zeta,z)}{\partial n}|_{|\zeta|=1} ds - \int_0^1 \nu_1(t)G(t,0;x,y)dt - \int_0^1 \nu_2(t)G(0,t;,x,y)dt, \tag{16}$$

где n – внутренняя нормаль.

В случае, когда σ совпадает с дугой нормального контура $x^2 + y^2 = 1$, функция

$$G(\zeta,z) = \frac{1}{2\pi}\left(ln\left|\frac{1-\zeta^2 z^2}{\zeta^2 - z^2}\right| + ln\left|\frac{1-\zeta^2\overline{z^2}}{\zeta^2-\overline{z^2}}\right|\right),$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta,\ z = x + iy,\ \overline{z} = x - iy,$$

является функцией Грина задачи Холмгрена для решения уравнения (1) в области D_3.

Полагая в (16) сначала $y = 0$, а затем $x = 0$, получаем

$$\tau_i(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \nu_i(t) ln\left|\frac{1-x^2t^2}{t^2-x^2}\right| dt + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \nu_j(t) ln\left|\frac{1+x^2t^2}{t^2+x^2}\right| dt = \overline{f}_i(x), i,j = 1,2, i \ne j, \tag{17}$$

где

$$\overline{f}_1(x) = \int_\sigma \varphi \frac{\partial G(\zeta,x)}{\partial n}|_{|\zeta|=1} ds,\ \overline{f}_2(x) = \int_\sigma \varphi \frac{\partial G(\zeta,ix)}{\partial n}|_{|\zeta|=1} ds, 0 < x < 1.$$

Равенства (17) являются функциональными соотношениями, принесенными из эллиптической части D_3 смешанной области D на J_i. Соотношения из гиперболических частей смешанной области имеют вид (11).

Исключая $\tau_i(t)$ из (11), (17), для определения неизвестных функций $\nu_i(t)$ получим систему интегральных уравнений:

$$\left[2A_i(t)-1\right]\nu_i(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi^2-t^2} - \frac{t\xi^2}{1-\xi^2t^2}\right)\nu_i(\xi)d\xi -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^1\left(\frac{t}{\xi^2+t^2}-\frac{\xi^2 t}{1+\xi^2 t^2}\right)\nu_j(\xi)d\xi=\Phi_i(t), \tag{18}$$

где

$$\Phi_i(\mathrm{t})=\bar{f}_i'(\mathrm{t})-F_i'(\mathrm{t})-A_i'(t)\int_0^t\nu_i(\xi)d\xi+B_i'(t)\int_t^1\nu_i(\xi)d\xi,$$

$$F_i(t)=\frac{f_i(t)}{\left[a_i(t)-b_i(t)\right]}.$$

Система (18) путем замены неизвестных функций

$$\mu_1(x)=\nu_1(x)+\nu_2(x),$$

$$\mu_2(x)=\nu_1(x)-\nu_2(x)$$

с учетом тождеств

$$\frac{1}{\xi^4-t^4}-\frac{1}{1-\xi^4 t^4}=\frac{(1+t^4)(1-\xi^4)}{\xi^4(1+t^8)-t^4(1+\xi^8)},$$

$$\frac{1}{\xi^4-t^4}-\frac{\xi^4}{1-\xi^4 t^4}=\frac{1-\xi^8}{\xi^4(1+t^8)-t^4(1+\xi^8)}$$

и замены переменных

$$\tau=\frac{2\xi^4}{1+\xi^8},\; y=\frac{2\mathrm{t}^4}{1+\mathrm{t}^8}$$

приводится к виду

$$\rho_i(y)+\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{\rho_i(\tau)}{\tau-y}d\tau=R_i(y), \tag{19}$$

где

$$\rho_1(y)=x^{-3}(1+x^8)\mu_1(x),$$

$$R_1(y)=x^{-3}(1+x^8)\Phi_1(x,\mu_1,\mu_2),$$

$$\rho_2(y)=x^{-1}(1+x^4)^{-1}(1+x^8)\mu_2(x),$$

$$R_2(y)=x^{-1}(1+x^4)^{-1}(1+x^8)\Phi_2(x,\mu_1,\mu_2).$$

Решения системы (19) существуют и в требуемом классе функций и определяются формулами [5, 9]:

$$\rho_i(y)=\frac{R_i(y)}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\left[\frac{\tau(1-y)}{y(1-\tau)}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{R_i(\tau)}{\tau-y}d\tau.$$

После определения неизвестных функций $\rho_i(y)$ находятся $v_1(x)$ и $v_2(x)$. По найденным $v_i(x)$ определяются $\tau_i(t)$ из (11) и решение задачи (1)–(4) как решение задачи Холмгрена в D_3 и решение задач Коши в D_1 и D_2.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Водахова В.А., Нахушева Ф.М., Гучаева З.Х. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения Бицадзе – Лыкова. Успехи современного естествознания. – 2015. – № 1–2. – С. 222–227.

3. Водахова В.А., Шамеева К.А. Задача со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова. Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2013. – № 2(52). – С. 3–7.

4. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 50–65.

5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 511 с.

6. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. Нелокальная задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования произвольного порядка // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2011. – № 4(25). – С. 25–36.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2013. – № 1(30). – С. 150–158.

9. Салахитдинов М.С., Ташмирзаев Ю.У. Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения. – Ташкент: ФАН, 1977.

10. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков М.Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Доклады национальной академии наук Украины. – 1997. – № 12. – С. 47–54.