УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Кумыкова С.К., Езаова А.Г., Бабаева К.М.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Нальчик, e-mail: alena_ezaova@mail.ru

Настоящая статья посвящена исследованию вопроса однозначной разрешимости краевой задачи с операторами дробного интегро-дифференцирования в краевом условии для вырождающегося гиперболического уравнения. Сформулирована корректная краевая задача со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения. Осуществлена редукция вопроса существования решения задачи к разрешимости интегрального уравнения Вольтерра второго рода, со слабой особенностью в ядре. Определены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования в краевом условии, при которых решение задачи существует и единственно. Также найдены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования, при которых поставленная краевая задача имеет бесчисленное множество решений. В этом случае вопрос разрешимости задачи эквивалентно редуцирован к вопросу разрешимости интегро-дифференциального уравнения *n*-го порядка. Также в данной работе установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной в уравнении на однозначную или неоднозначную разрешимость поставленной краевой задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Вольтерра, оператор дробного интегрирования, оператор дробного дифференцирования, вырождающееся гиперболическое уравнение

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SHIFT FOR A DEGENERATE HY PERBOLIC EQUATION

Kumykova S.K., Ezaova A.G., Babaeva K.M.

K.M. Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, e-mail: alena_ezaova@mail.ru

This article is devoted to the study of the question of unique solvability of the boundary value problems with operators of fractional integro-differentiation in the boundary condition for a degenerate hyperbolic equation. It formulated the correct boundary value problem with shift for a degenerate hyperbolic equation. Implemented reduction question the existence of solutions to the problem of solvability of Volterra integral equation of the second kind, with a weak singularity in the kernel. Determined intervals change the order of operators of fractional integro-differentiation in the boundary conditions under which the solution of the problem exists and is unique. Also found gaps change orders operators of fractional integro-differentiation, in which the boundary value problem has delivered countless solutions. In this case, the question is equivalent to the solvability of the problem is reduced to the question of the solvability of integro-differential equations of n-th order. Also, in this study the effect of the set coefficients of lower derivatives in the equation on an unambiguous or unequivocal solvability of the boundary value problem with shift for a degenerate hyperbolic equation.

Keywords: nonlocal problem, Volterra equations, operator of fractional differentiation, operator of fractional integration, degenerate hyperbolic equation

Теория краевых задач для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений, в силу теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и привлекает к себе внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и ее приложениями. Локальные и нелокальные задачи для таких уравнений встречаются в теории распространения электромагнитных полей, в теории тепло- и массообмена в средах, окруженных пористой средой, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а также в теории оболочек с кривизной переменного знака. В связи с изложенным возникает необходимость дальнейшего развития теории нелокальных задач для уравнений смешанного типа. Актуальность этих исследований можно также обосновать внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, получением новых результатов в теории дробного интегро-дифференцирования, а также их прикладным значением.

Для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений многими авторами [1–5, 7, 8, 10] исследовались задачи со смещением и задачи типа задачи Бицадзе – Самарского, когда на эллиптической части границы области задано локальное условие, а на характеристической части границы нелокальное условие, поточечно связывающее значения искомого решения или производной от него, вообще говоря, дробной определенного порядка, зависящего от порядка вырождения уравнения.

Цель исследования – изучение влияния параметров уравнения и порядков операторов дробного интегро-дифференцирования в краевом условии на однозначную или неоднозначную разрешимость задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} - u_{yy} + a y^{\frac{m}{2}-1} u_x = 0, \qquad (1)$$

где $m \geq 2$, $a \neq 0$ – вещественная постоянная, в конечной области Ω, ограниченной характеристиками уравнения (1):

$$AC: x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0;$$

$$BC: x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

и отрезком $\overline{I} \equiv AB = [0,1]$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup I)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0) = \tau(x), \quad \forall x \in \overline{I}; \qquad (2)$$

$$A(x) D_{0x}^{\delta} u[\theta_0(x)] + B(x) D_{x1}^{\mu} u[\theta_1(x)] = C(x),$$

$$\forall x \in I, \qquad (3)$$

где δ, μ – вещественные числа, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $\tau(x) \in C(\overline{I})$, причем

$$A^2(x) + B^2(x) \neq 0;$$

$\theta_0(x)$, $\theta_1(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in I$ с характеристиками AC, BC соответственно; D_{0x}^{l}, D_{x1}^{l} – операторы дробного в смысле Римана – Лиувилля интегро-дифференцирования [9, 10].

Разрешимость задачи (2), (3) для обобщенного уравнения Трикоми

$$y_m u_{xx} - u_{yy} = 0; \; m = \text{const} > 0$$

при любых δ, μ была исследована И. Оразовым [6].

При $|a| < \frac{m}{2}$ решение задачи Коши $u(x,0) = \tau(x)$, $u_y(x,0) = \nu(x)$ для уравнения (1) имеет вид [1]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} y \int_0^1 \nu\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta} dt +$$
$$+ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \tau\left[x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} (2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1} dt, \qquad (4)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера [9].

Пользуясь решением (4), вычислим

$$u[\theta_0(x)] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{1-\alpha-\beta} \int_0^x \frac{\xi^{\beta-1}\tau(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}} + \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \int_0^x \frac{\xi^{-\alpha}\nu(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\beta}}.$$

Последнее в терминах операторов дробного интегро-дифференцирования [17] примет вид

$$u[\theta_0(x)] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} x^{1-\alpha-\beta} D_{0x}^{-\alpha} x^{\beta-1} \tau(x) + \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} D_{0x}^{\beta-1} x^{-\alpha} \nu(x).$$

Аналогично получаем

$$u[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-x)^{1-\alpha-\beta} \int_x^1 (1-\xi)^{\alpha-1} \frac{\tau(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{1-\beta}} +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} \int_x^1 (1-\xi)^{-\beta} \frac{\nu(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{\alpha}}.$$

В терминах операторов дробного интегро-дифференцирования последнее примет вид

$$u[\theta_1(x)] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} (1-x)^{1-\alpha-\beta} D_{x1}^{-\beta} (1-x)^{\alpha-1} \tau(x) +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}} D_{x1}^{\alpha-1} (1-x)^{-\beta} \nu(x).$$

Удовлетворим $u[\theta_0(x)]$, $u[\theta_1(x)]$ краевому условию (3). В результате преобразований получим

$$\Gamma(2-\alpha-\beta)\left(\frac{m+2}{4\Gamma}\right)^{\frac{2}{m+2}}\left[\frac{A(x)}{(1-\alpha)}D_{0x}^{\delta+\beta-1}x^{-\alpha}\nu(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{B(x)}{\Gamma(1-\beta)}D_{x1}^{\mu+\alpha-1}(1-x)^{-\beta}\nu(x)\right]=f(x), \qquad (5)$$

где

$$f(x)=-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}A(x)D_{0x}^{\delta}x^{1-\alpha-\beta}D_{0x}^{-\alpha}x^{\beta-1}\tau(x)-$$
$$-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}B(x)D_{x1}^{\mu}(1-x)^{1-\alpha-\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\alpha-1}\tau(x)+C(x).$$

Исследуем разрешимость задачи (1)–(3) для любых промежутков изменения параметров δ, μ.

Теорема 1. Пусть $\mu = 1-\alpha$; $\delta < 1-\alpha-\beta$; $B(x) \neq 0$,

$$A(x), B(x), C(x)\in C^1(\bar{I}); \quad \tau(x)\in C^1(\bar{I})\cap C^3(I).$$

Тогда решение задачи (1)–(3) существует и единственно.

В самом деле, при $\delta < 1-\beta$ и выполнении условий теоремы уравнение (5) примет вид

$$\nu(x)+b_1(x)\int_0^x\frac{t^{-\alpha}\nu(t)dt}{(x-t)^{\delta+\beta}}=F_1(x), \qquad (6)$$

где $b_1(x)=\dfrac{\Gamma(1-\beta)(1-x)^{\beta}}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta-\delta)}\dfrac{A(x)}{B(x)}$;

$$F_1(x)=\frac{\Gamma(1-\beta)(1-x)^{\beta}}{\Gamma(2-\alpha-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}B(x)}\left[C(x)-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}A(x)D_{0x}^{\delta}x^{1-\alpha-\beta}D_{0x}^{-\alpha}x^{\beta-1}\tau(x)-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}B(x)D_{x1}^{1-\alpha}(1-x)^{1-\alpha-\beta}D_{x1}^{-\beta}(1-x)^{\alpha-1}\tau(x)\right].$$

Уравнение (6) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\nu(x)$ со слабой особенностью в ядре, единственное решение которого в искомом классе функций может быть построено методом последовательных приближений.

Далее, регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем любую функцию $u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и такую, что функция $u_y(x, 0) = \nu(x) = x^{\delta+\alpha+\beta-2}\nu_1(x)$ в точке $x = 0$ обращается в нуль порядка $\delta + \alpha + \beta - 2$, а $\nu_1(x)$ – достаточное число раз дифференцируемая функция в некоторой окрестности $(0,\delta)$ точки $x = 0$ и $\nu1(0) \neq 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия

$$\mu = 1-\alpha;\ (1-\beta)+k < \delta < (1-\beta)+\mathrm{k}+1,$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots .$$
$$\tau(x) = x^{\sigma}\,\tau_1(x),$$

где $\sigma \geq \delta$;

$$\tau_1(x)\in C^{k+1}(\bar{I});$$
$$B(x) = x(1-x)^{2-\alpha}B_1(x),$$

где $A(x), B_1(x), C(x)\in C^1(\bar{I})$,

причем $A(x)\cdot B_1(x)\neq 0$, $\forall x\in \bar{I}$. Тогда задача (1)–(3) имеет бесконечное множество линейно-независимых решений.

Доказательство. Покажем сначала, что утверждение имеет место при $k = 1$. В этом случае уравнение (5) примет вид

$$x(1-x)^{2-\alpha-\beta}\, b(x)\nu(x)+\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{t^{-\alpha}\nu(t)dt}{(x-t)^{\delta+\beta-2}} = f(x), \tag{7}$$

где

$$b(x)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(3-\delta-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\frac{B_1(x)}{A(x)},\quad f(x)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(3-\delta-\beta)F(x)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}A(x)}.$$

Для доказательства неединственности решения задачи достаточно показать, что соответствующее (7) однородное уравнение

$$(1-x)^{2-\alpha}\, xb(x)\nu(x)+\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{t^{-\alpha}\nu(t)dt}{(x-t)^{\delta+\beta-2}}=0 \tag{8}$$

имеет нетривиальное решение.

В самом деле, обозначим

$$\varphi(x)=\int_0^x \frac{t^{-\alpha}\nu(t)dt}{(x-t)^{\delta+\beta-2}}. \tag{9}$$

Тогда применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, получим

$$\nu(x)=\frac{\sin\pi(\delta+\beta-2)}{\pi}x^{\alpha}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{3-\delta-\beta}}.$$

Уравнение (8) примет вид

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)+\frac{\sin\pi(\delta+\beta-2)}{\pi}(1-x)^{2-\alpha-\beta}\, x^{\alpha+1}b(x)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{3-\delta-\beta}}=0. \tag{10}$$

Полагая $\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=\psi(x)$, после преобразований получим интегральное уравнение

$$\psi(x)+\int_0^x K_1(x,\xi)\psi(\xi)d\xi = f_1(x), \tag{11}$$

где

$$K_1(x,\xi)=\frac{\sin\pi(\delta+\beta-2)}{\pi(\delta+\beta-2)}x(x-\xi)^{\delta+\beta-2};$$

$$f_1(x)=\frac{\sin\pi(\delta+\beta-2)}{\pi}c_1B(2,\delta+\beta-2)(\delta+\beta-1)(1-x)^{2-\alpha}\, x^{\alpha+\delta+\beta-1}b(x).$$

Так как при $k = 1$ по условию теоремы $2 - \beta < \delta < 3 - \beta$, то (11) есть интегральное уравнение Вольтерра с непрерывным ядром $K_1(x,\xi)\in C(\overline{I}\times\overline{I})$ и непрерывной правой частью $f_1(x)\in C(\overline{I})$.

Уравнение (11) имеет на $\overline{I}$ единственное непрерывное решение

$$\psi(x)= f_1(x)+\int_0^x R(x,t,\delta) f_1(t)dt,$$

где $R(x, t, \delta)$ – резольвента ядра $K_1(x, t)$. Тем самым неединственность решения задачи при $k = 1$ доказана. Докажем существование решения задачи.

С учетом (9) уравнение (7), принимая во внимание ранее проведенные вычисления, перепишем в виде

$$\psi(x)+\int_0^x K_1(x,t)\psi(\xi)d\xi = f_1(x)+f(x). \qquad (12)$$

где $K_1(x, t)$ и правая часть (12) достаточно гладкие функции.

Известно, что в классе непрерывных функций на $\overline{I}$ уравнение (12) имеет непрерывное решение

$$\psi(x)=f^*(x)+\int_0^x R_1(x,t,\delta)f^*(t)dt,$$

где $f^*(x) = f_1(x) + f(x)$, а $R_1(x, t, \delta)$ – резольвента ядра $K_1(x, \xi)$.

Допустим, что задача (1)–(3) имеет бесчисленное множество линейно-независимых регулярных решений при $k = n – 1$, и докажем, что это утверждение верно при $i = n$.

При $k = n$; $(1 – \beta) + n < \delta < (1 – \beta) + n + 1$ и уравнение (7) примет вид

$$x(1-x)^{2-\alpha}b(x)\nu(x)+\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\int_0^x \frac{t^{-\alpha}\nu(t)\,dt}{(x-t)^{\delta+\beta-1-n}} = f(x), \qquad (13)$$

где

$$b(x)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+2-\delta-\beta)}{\Gamma(1-\beta)}\frac{B_1(x)}{A(x)};\quad f(x)=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+2-\delta-\beta)}{\Gamma(1-\alpha-\beta)\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}}\frac{F(x)}{A(x)}.$$

Вводя обозначение $\varphi(x)=\int_0^x \frac{t^{-\alpha}\nu(t)dt}{(x-t)^{\delta+\beta-1-n}}$, а затем $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\varphi(x)=\psi(x)$, как и ранее при $f(x) = 0$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и правой частью

$$\psi(x)+\int_0^x K_n(x,t)\psi(t)dt = F_n(x), \qquad (14)$$

где

$$K_n(x,t)=\frac{\sin\pi(\delta+\beta-1-n)}{\pi}x^{\alpha}(1-x)^{2-\alpha}b(x)\times$$
$$\times(x-\xi)^{\delta+\beta-2}\left[2(x-\xi)\frac{\Gamma(\delta+\beta-n)}{\Gamma(\delta+\beta)}+x\frac{\Gamma(\delta+\beta-1-n)}{\Gamma(\delta+\beta-1)}\right];$$

$$F_n(x)=-\frac{\sin\pi(\delta+\beta-1-n)}{\pi}\frac{(\delta+\beta-1)\Gamma(\delta+\beta-n-1)}{\Gamma(\delta+\beta)}c_n x^{\delta+\beta+\alpha-1}(1-x)^{2-\alpha-\beta}b(x).$$

Отсюда следует, что уравнение (14) в классе функций $C(\overline{I})$ имеет непрерывное нетривиальное решение, которое задается формулой

$$\psi(x)=F_n(x)+\int_0^x R(x,t,\delta)F_n(t)dt,$$

и решение задачи (1)–(3) неединственно.

В неоднородном случае получим уравнение

$$\psi(x)+\int_0^x K_n(x,t)\psi(t)dt = f(x)+F_n(x),$$

которое имеет непрерывное решение

$$\psi(x)=\left[f(x)+F_n(x)\right]+\int_0^x R^*(x,t,\delta)\left[f(t)+F_n(t)\right]dt,$$

где $R^*(x, t, \delta)$ резольвента ядра $K_n(x, t)$.

Итак, решение задачи (1)–(3) при выполнении условий теоремы 2 существует, но оно неединственно.

Список литературы

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448с.

2. Водахова В.А., Шамеева К.А. Задачи со смещением для системы уравнений первого порядка Лыкова // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2013. – № 2(52). – С. 3–7.

3. Кумыкова С.К. Об одной задаче с нелокальными краевыми условиями на характеристиках для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т.10. № 1. – С. 78–88.

4. Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т.14. № 1. – С. 50–65.

5. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287с.

6. Оразов И. Об одной краевой задаче со смещением для обобщенного уравнения Трикоми // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т.17. № 2. – С. 5–17.

7. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки» . – 2013. – № 1(30). – С. 150–158.

8. Репин О.А., Кумыкова С.К. О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. – 2012. – № 9(100). – С. 52–60.

9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск, 1987. – 688 с.

10. Шогенов В.Х., Кумыкова С.К., Шхануков М.Х. Обобщенное уравнение переноса и дробные производные // Доклады национальной академии наук Украины. – 1997. – № 12. – С. 47–54.