

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ПУЧКОВ ВЫСОКОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗВУКОВЫХ ПОЛЯХ

¹Чистяков А.Е., ²Никитина А.В., ³Проценко Е.А., ⁴Тимофеева Е.Ф., ⁵Кузнецова И.Ю.

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, e-mail: cheese_05@mail.ru;

²Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева Южного федерального университета, Таганрог, e-mail: nikitina.vm@gmail.com;

³Таганрогский педагогический институт имени А.П. Чехова Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), Таганрог, e-mail: eapros@rambler.ru;

⁴Северо-Кавказский федеральный университет, г. Ставрополь, e-mail: teffena@mail.ru;

⁵Институт компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета, Таганрог, e-mail: ikuznecova@sfnedu.ru

Настоящая статья посвящена построению и исследованию дискретной модели распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелинейно-диссипативной среде в трехмерных звуковых полях. Дискретная модель строится на основе метода расщепления по физическим процессам. При построении дискретной модели предпочтение отдано монотонным схемам. Также в статье предложена модификация итерационного метода минимальных поправок для решения СЛАУ с комплексной матрицей коэффициентов специального вида, проведено исследование предложенного метода на сходимость, получена оценка ее скорости, выбран оптимальный итерационный параметр τ и определен вид оператора предобуславливателя B . Приведена программная реализация предложенной дискретной модели, описан алгоритм, логическая структура и функциональное предназначение блоков программы, а также результаты вычислительных экспериментов по исследованию пространственных нелинейных эффектов в волновых полях конечной амплитуды.

Ключевые слова: уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова, схема расщепления, схема с весами, вычислительный эксперимент, звуковой пучок, дифракция, нелинейность, диссипация

ANALYSIS OF DISCRETE MODEL OF PROPAGATION OF THE SOUND BEAMS OF FINITE AMPLITUDE IN 3D NONLINEAR DISSIPATIVE MEDIUM

¹Chistyakov A.E., ²Nikitina A.V., ³Procenko E.A., ⁴Timofeeva E.F., ⁵Kuznetsova I.Y.

¹Don state technical university, Rostov-on-Don, e-mail: cheese_05@mail.ru;

²Kalyaev Scientific Research Institute of Multiprocessor Computer Systems, Southern Federal University, Taganrog, e-mail: nikitina.vm@gmail.com;

³Chekhov Taganrog Pedagogical Institute, Rostov State University of Economics, Taganrog, e-mail: eapros@rambler.ru;

⁴North-Caucasus Federal University, Stavropol, e-mail: teffena@mail.ru;

⁵Institute of Computer Technology and Information Security, Southern Federal University, Taganrog, e-mail: ikuznecova@sfnedu.ru

The article is devoted to mathematical modeling of propagation of the sound beams of finite amplitude in nonlinear dissipative medium, as well as to the study of constructed discrete model. Discrete model based on the method of splitting by physical processes. In case of construction of the discrete model preference is given to the monotone schemes. Also the work is dedicated to the modification of iterative Krilov-type method for solving system of linear equations with complex coefficients matrix and obtaining the estimation of the convergence rate of the method, choosing the optimal iterative parameter τ and finding form of preconditioner B . The article is presented the software implementation of the discrete model, algorithm, logical structure and functional using of the program blocks as well as the results of computational experiments of propagation of the sound beams of finite amplitude in nonlinear dissipative medium.

Keywords: Khokhlov Zabolotskaya Kuznetsov equation, splitting scheme, the scheme with weights, a numerical experiment, the sound beam, diffraction, nonlinearity, dissipation

Нелинейные процессы в ультразвуковых пучках вследствие отсутствия физической дисперсии в большинстве звукопрозрачных сред представляют собой сложные пространственно-временные явления, описываемые квазилинейными уравнениями со степенным характером нелинейных членов. Оптимальной возможностью изучения

нелинейных волновых эффектов является применение методов математического моделирования.

Основными физическими процессами, сопровождающими распространение волновых пучков большой амплитуды, являются дифракционные, диссипативные, нелинейные. Влиянием дисперсии скорости

звука в среде в большинстве практически важных случаев можно пренебречь. Указанные процессы могут быть учтены в рамках квазилинейного уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова [5, 6]. В последнее время интерес к изучению сложных пространственных нелинейных волновых процессов связан с широкими перспективами их практического использования [3, 4]. При этом, как правило, результаты по существующим моделям носят частный характер и встречаются в научной литературе по нелинейной акустике [1, 2].

Рассмотрим кратко основные особенности математических моделей для решения уравнения нелинейных звуковых пучков. Бахвалов Н.С. с соавторами разработал численный метод для решения уравнения ХЗК на основе схемы расщепления по физическим процессам для осесимметричных источников. В предложенном алгоритме дифракционные и диссипативные процессы вычислялись в частотной области, а нелинейный член – во временной области, при этом использовался метод Годунова со специальной разностной схемой для решения уравнений в частных производных [1]. В 1984 году Аанонсен с соавторами [13] разработал алгоритм решения ХЗК в частотной области. Алгоритм использует преобразование Фурье для конвертации ХЗК в набор двохенных дифференциальных уравнений в частных производных. Позже Бейкер с соавторами [14] обобщил частотный алгоритм Аанонсена для неосесимметричных источников и обобщил метод для импульсных волн (код Бергена). В 2005 г. Янг и соавторы [16] обобщили Техасский код на случай неосесимметричных источников, при этом использовалась схема разложения по поперечным пространственным направлениям. В работе [15] был предложен подход для аппроксимации дифракционного члена без разложения его по боковым осям x и y .

Важным недостатком разновидностей Техасского кода является то, что при решении дифракционной задачи направление счета совпадает с направлением роста временной переменной, при этом используются граничные условия первого рода для $v(z, \theta, \infty, \infty) = 0$ начального и конечного момента времени, такие же, как и при расчете диссипации. Вследствие этого в указанных моделях выполнение правого граничного условия по времени (для конечного момента времени) при расчете дифракционной задачи не гарантируется.

Постановка задачи

Для описания распространения звуковых пучков конечной амплитуды в нелиней-

но-диссипативной среде использовано уравнение Хохлова-Заболотской-Кузнецова:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial v}{\partial \theta} - \Gamma \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right) = \frac{N}{4} \Delta_{\perp} v \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$v(0, \theta, x, y) = V(\theta, x, y), \quad (2)$$

условие периодичности сигнала:

$$\begin{aligned} v(z, 0, x, y) &= v(z, 2\pi, x, y), \\ v'_\theta(z, 0, x, y) &= v'_\theta(z, 2\pi, x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

условие отсутствия источников энергии в бесконечно удаленной точке:

$$v(z, \theta, x, \infty) = 0, \quad v(z, \theta, \infty, y) = 0, \quad (4)$$

где $v = v(z, \theta, x, y)$ – величина скорости частиц среды, Γ – диссипативный параметр, θ – время в сопровождающей системе координат, z – нормированное расстояние, N – параметр уравнения, характеризующий соотношение нелинейной и дифракционной длин волны, Δ_{\perp} – поперечный лапласиан в декартовой системе координат

$$\left(\Delta_{\perp} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

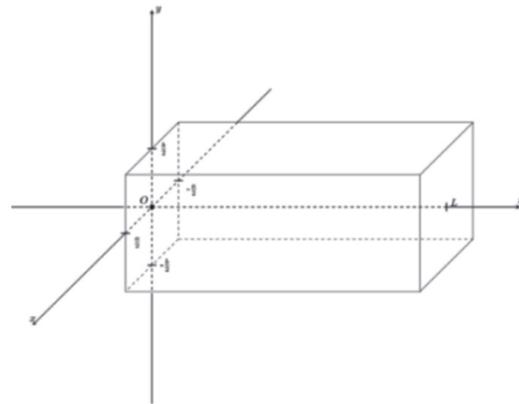


Рис. 1. Расчетная область

Для решения поставленной задачи в работе использованы методы расщепления по физическим процессам, интегро-интерполяционный метод, экономичные прямые методы решения сеточных уравнений, хорошо зарекомендовавшие себя при решении задач гидродинамики [10], метод решения комплексной матрицы специального вида [7].

Программная реализация

Разработка программного комплекса, реализующего построенную математиче-

скую модель, предполагала достижение следующих основных целей: создание мощного инструмента для проведения исследований в области теории нелинейных волновых процессов; разработка современных программных средств для выполнения инженерных расчетов при создании новых образцов техники, основанной на принципах нелинейной акустики. Программный комплекс реализует два основных подхода к описанию нелинейных волновых процессов – полевой и спектральный. Предложенные программно-алгоритмические решения позволяют выполнять расчеты поля скорости частиц среды в акустической волне и порядка нескольких тысяч гармонических составляющих нелинейно искажающегося временного профиля. В структуру программного комплекса входят следующие блоки: блок управления, в котором осуществляются следующие действия: выделение памяти, ввод начальных условий, вывод данных; блок расчета скорости частиц среды с учетом диссипации и нелинейности процесса распространения волновых пучков; блок построения сеточных уравнений для расчета скорости частиц среды; блок дискретного преобразования Фурье, в которых для прямого и обратного направлений преобразований для каждого сечения (x, y) как для вектора применяется быстрое преобразование Фурье; блок расчета скорости частиц среды с учетом дисперсии; блок расчета комплексной СЛАУ

специального вида; блок расчета СЛАУ методом циклической прогонки [9].

Схема алгоритма программы представлена на рис. 2. Для тестирования программного комплекса использовалась модельная задача распространения первоначально синусоидального звукового пучка конечной амплитуды с гауссовым поперечным распределением.

Такая задача хорошо исследована и может считаться эталонной для проверки правильности работы построенной математической модели и ее программной реализации. При $N \gg 1$ приведенная задача имеет известное аналитическое решение [4].

Результаты численных экспериментов для гауссового пучка

Рассмотрим распространение звукового пучка с начальным значением скорости частиц среды:

$$V(\theta, x, y) = e^{-r^2} \sin(\theta + \pi) = e^{-(x^2+y^2)} \sin(\theta + \pi).$$

Моделирование производилось с параметрами: $M = 4096$, $a = 4,0$, $b = 4,0$, $\Gamma = 0,001$, $N = 0,4$, $P_x = P_y = 101$. На рис. 3 представлена зависимость скорости распространения волны от двух переменных $v(x, y, \theta)_{y=0} \sim v(r, \theta)$ при фиксированных значениях z : $z = 0,0, 0,5, 1,0, 2,0$. Вертикальная ось соответствует r , горизонтальная – θ . С ростом z происходит расширение пучка вдоль r (диссипация энергии), положительный и отрицательный фронты сближаются (эффекты нелинейности).

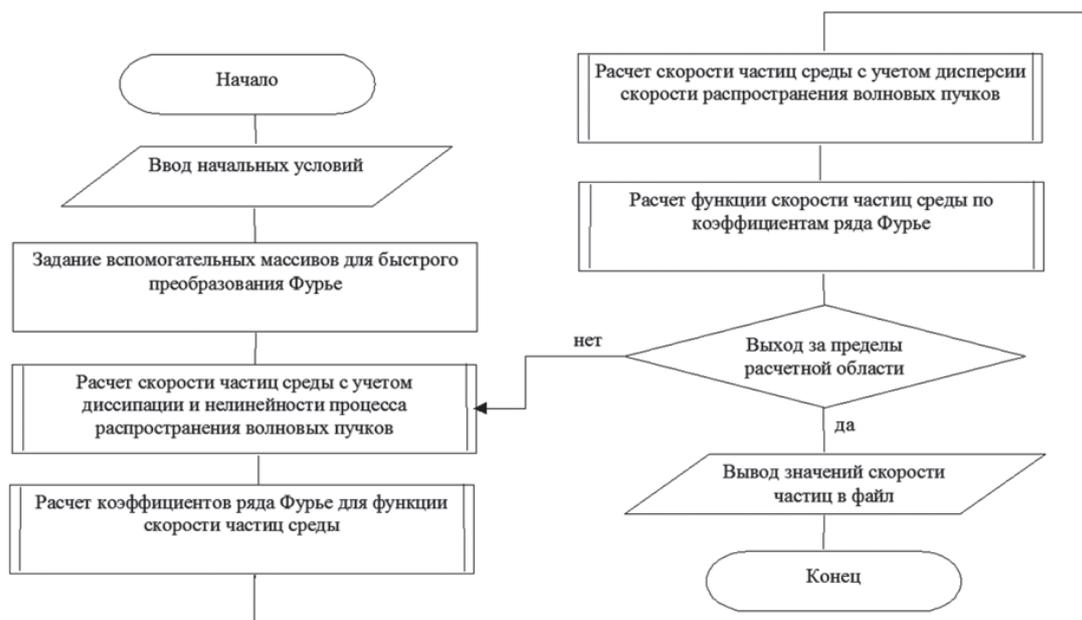


Рис. 2. Структурная схема алгоритма программы

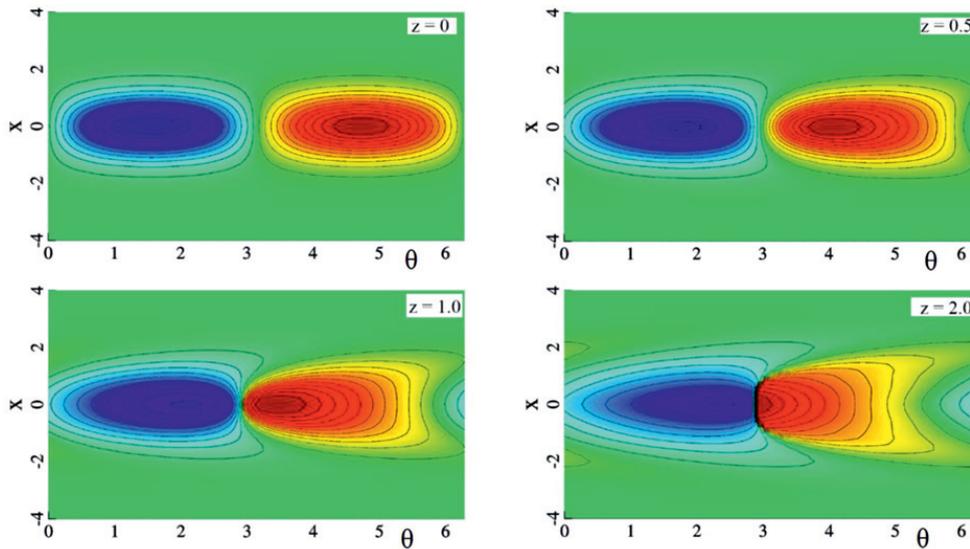


Рис. 3. Зависимость функции v при $y = 0$ на расстоянии z , равном:
а) $z = 0$, б) $z = 0,5$, в) $z = 1$, г) $z = 2$

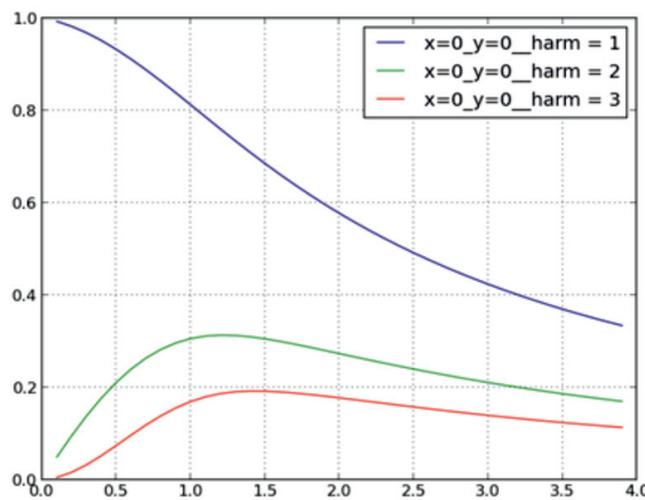


Рис. 4. Зависимость первой (синяя), второй (зеленая) и третьей (красная) гармоник от расстояния z на оси симметрии

С дальнейшим распространением вдоль оси z отрицательный волновой фронт «набегает» на положительный. С увеличением z энергия перераспределяется между гармониками из-за нелинейности процесса, степень нелинейности регулируется параметром Γ . На рис. 4 представлены зависимости амплитуд первых трех гармоник от z .

Пример применения программного комплекса для исследования сложных нелинейных пространственных эффектов

Построенная математическая модель позволяет значительно расширить воз-

можности моделирования различных физических ситуаций при изучении закономерностей распространения нелинейных волн при их фокусировке. В частности, например, можно выполнять моделирование сходящихся звуковых пучков не только в точку (такая возможность имела в модели [5]), но и имеющих цилиндрический характер фокуса.

Моделируем распространение звукового пучка с начальным условием:

$$V(\theta, x, y) = \sin(\theta + 1.6\pi x^2 + \pi) e^{-(x^2 + y^2)}.$$

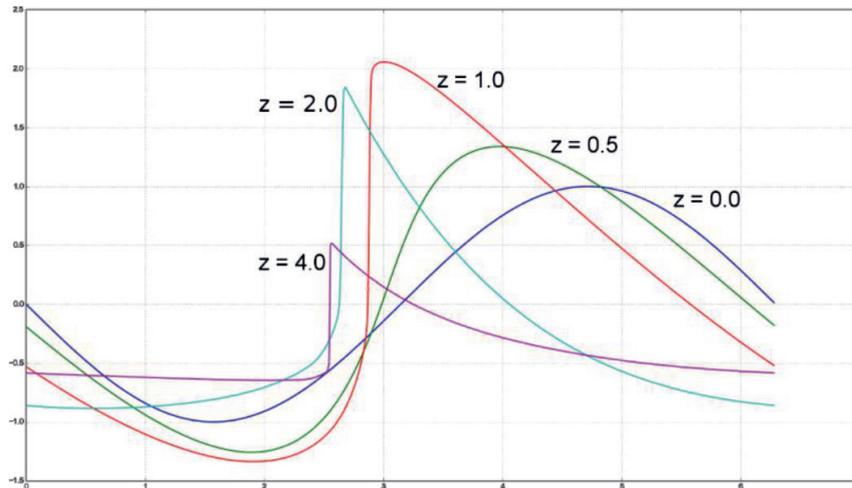


Рис. 5. Скорость движения частиц среды в зависимости от θ на оси симметрии ($x = 0, y = 0$) при различных z : $z = 0,0, 0,5, 1,0, 2,0, 4,0$

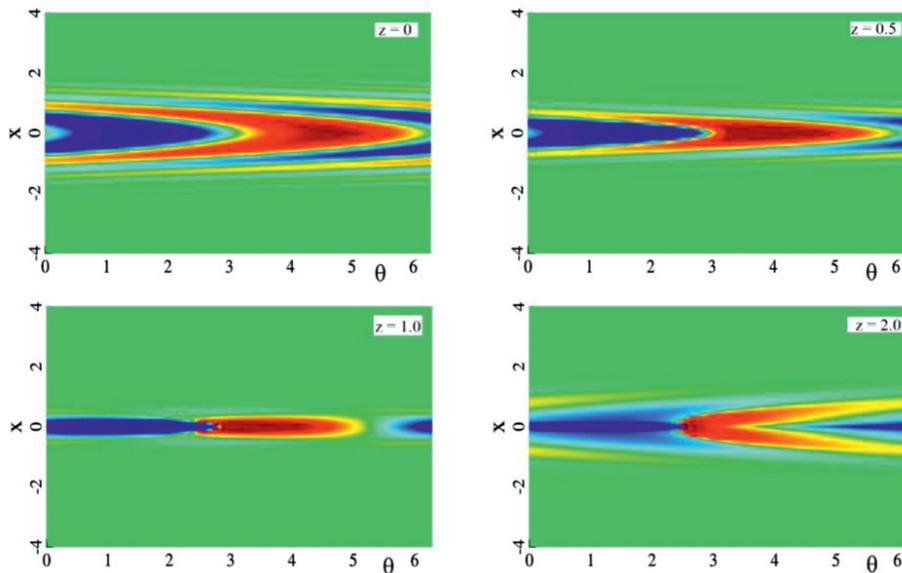


Рис. 6. Зависимость поля колебательной скорости от x и времени θ в сечении $y = 0$ при различных фиксированных z : $z = 0,0, 0,5, 1,0, 2,0, 4,0$

Вычисление выполнено при данных параметрах модели: $\Gamma = 0,001, N = 0,2, N_x = N_y = 81, a = 8,0, b = 8,0$. Рис. 5 иллюстрирует зависимости скорости распространения частиц среды от θ на оси симметрии ($x = 0, y = 0$) при z : $z = 0,0, 0,5, 1,0, 2,0, 4,0$. В точке $z \approx 1,0$ происходит фокусировка звукового пучка.

С расстоянием происходит значительное увеличение градиентов поля и концентрация энергии в фокальной области $x = 0$. Соответствующее распределение амплитуды положительной и отрицатель-

ной части временного профиля представлено на рис. 7.

Верификация результатов работы программного комплекса

Для проверки корректности работы разработанного программного комплекса выполнялись расчеты при стандартных начальных условиях в виде гауссова звукового пучка с гармонической временной зависимостью при различных значениях внешних параметров N и Γ модельного уравнения ХЗК. Такая методика провер-

ки позволяет выполнить ее для всех предельных случаев соотношения масштабов проявления нелинейных, дифракционных и диссипативных процессов. Проверка работы программного комплекса выполнялась для промежуточных значений внеш-

них параметров уравнения ХЗК. Для этого использовались данные вычислительных экспериментов из [5]. Результаты наложения волновых профилей при соответствующих значениях параметров N , Z , Γ представлены на рис. 8.

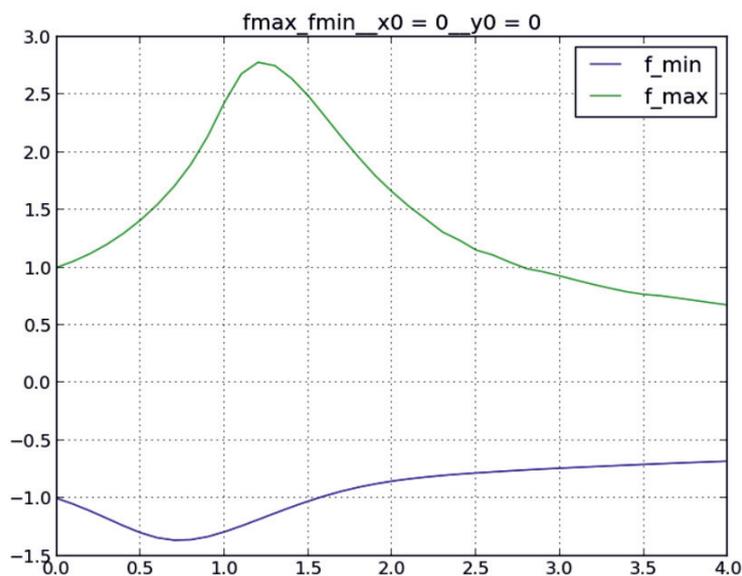


Рис. 7. Распределение амплитуды положительной и отрицательной части временного профиля

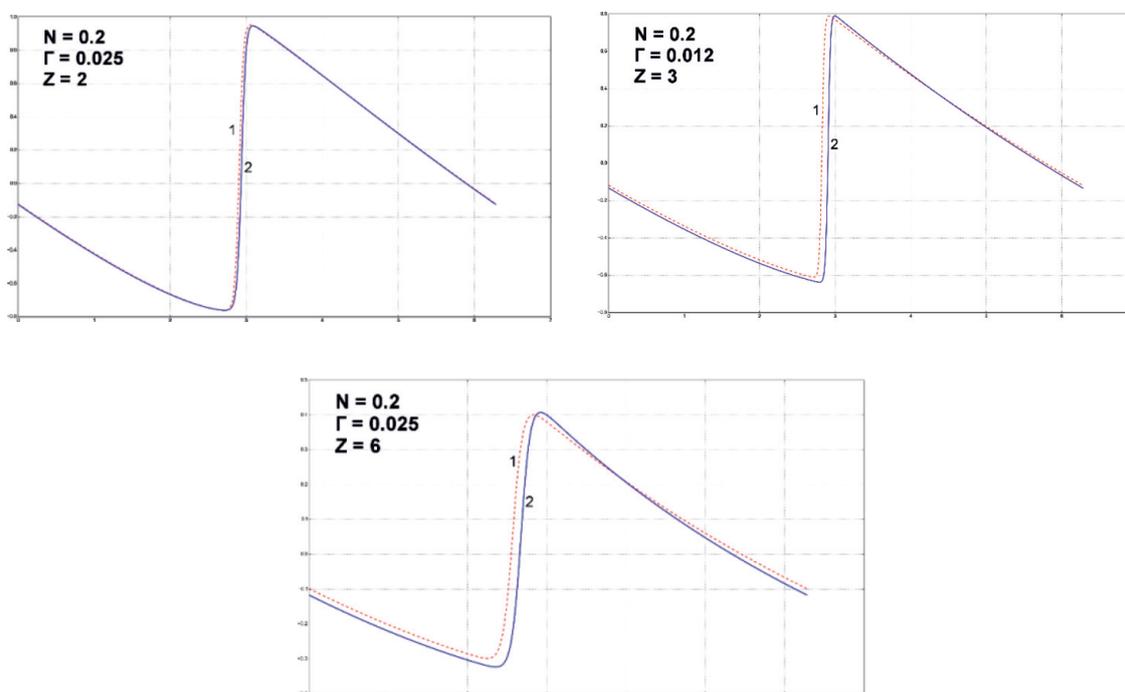


Рис. 8. Результаты наложения волновых профилей: 1 – результаты [5], 2 – результаты экспериментов, основанных на данной работе

Так как в каждом из предельных случаев разработанное программное обеспечение дает погрешность всего лишь в пределах 2%, то можно предположить, что значительное расхождение с источником [5] не связано с ошибочностью результатов работы разработанного программного комплекса.

Выводы

В работе предложен метод для решения систем линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей специального вида. Данный метод позволил модифицировать ранее разработанную конечно-разностную модель решения уравнения Хохлова-Заболотской-Кузнецова, значительно расширив возможности моделирования различных физических явлений при изучении закономерностей распространения нелинейных волн в квадратично-нелинейных средах, не обладающих физической дисперсией. Разработанный программный комплекс может быть использован для выполнения инженерных расчетов при подготовке новой ультразвуковой аппаратуры, работающей на принципах нелинейной акустики.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 16-37-00129, № 15-01-08619, № 15-07-08626.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Нелинейная теория звуковых пучков / Н.С. Бахвалов, Я.М. Жилейкин, Е.А. Заболотская. – М.: Наука, 1982. – 176 с.
2. Гурбатов С.Н. Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике / С.Н. Гурбатов, О.В. Руденко, А.И. Саичев. – М.: Физматлит, 2008. – 496 с.
3. Савицкий О.А. Нелинейный источник звука для зондирования донных структур. // Сборник трудов Научной конференции «Сессия Научного совета РАН по акустике

и XXIV сессия Российского акустического общества». – М.: ГЕОС, 2011. – Т. 1. – С. 173–177.

4. Савицкий О.А., Нагучев Д.Ш., Сахаров В.Л. Предпосылки и концепция создания современных параметрических профилографов в ОКБ «Ритм» ЮФУ. // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2008. – Т. 89, № 12. – С. 89–94.

5. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Математическая модель распространения ультразвуковых пучков высокой интенсивности // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2010. – № 6(107). – С. 168–174.

6. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Сжатие и декомпрессия импульсов при взаимодействии с низкочастотными волнами конечной амплитуды в звуковых пучках // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2011. – № 8(121). – С. 122–129.

7. Савицкий О.А., Чистякова Т.А. Вариант метода минимальных поправок для систем линейных уравнений с комплексной матрицей коэффициентов специального вида. // Альманах современной науки и образования. – 2013. – № 1. – С. 129–134.

8. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

9. Самарский А.А. Методы решения сеточных уравнений. / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Алексеенко Е.В. Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 3. – С. 3–21.

11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Тимофеева Е.Ф., Шишенин А.В. Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 32–44.

12. Aanonsen S.I., Barkve T., Tjøtta J.N., and Tjøtta S. Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam // J. Acoust. Soc. Am. – 1984. – № 75. – P. 749–768.

13. Baker A.C., Berg A.M., Sahin A., and Tjøtta J.N. The nonlinear pressure field of plane rectangular apertures: experimental and theoretical results // J. Acoust. Soc. Am. – 1995. № 97. – P. 3510–3517.

14. Hajihassani M. et al. A novel numerical solution to the diffraction term in the KZK nonlinear wave equation // Ultrasonic Industry Association (UIA), 2009 38th Annual Symposium of the IEEE, 2009. – P. 1–9.

15. Yang X., Cleveland R.O. Time domain simulation of nonlinear acoustic beams generated by rectangular pistons with application to harmonic imaging // J. Acoust. Soc. Am. – 2005. – № 117. – P. 113–123.